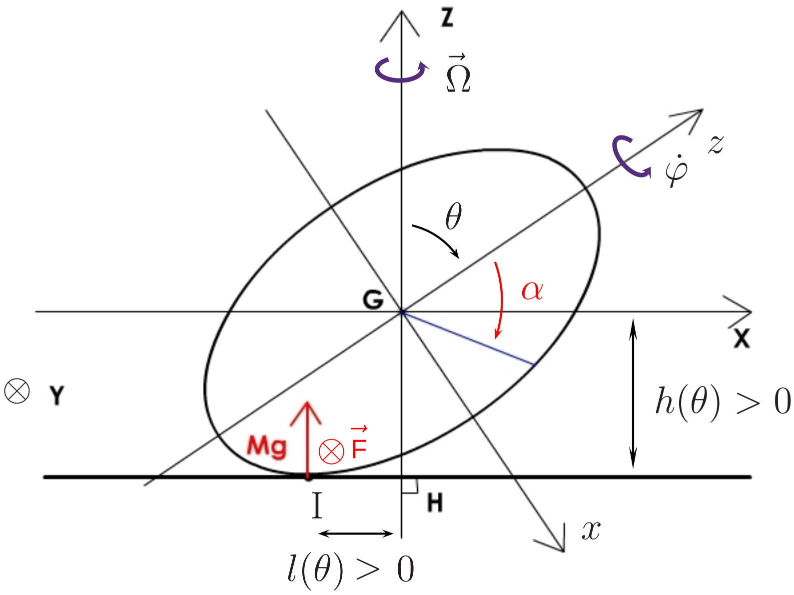
[1]L'ŒUF QUI SE LÈVE



On étudie le mouvement dans le référentiel (X, Y, Z) tournant à la vitesse angulaire $\vec{\Omega}$ autour de l'axe vertical Z. Ce référentiel contient en permanence le grand axe de l'ellipsoïde allongé. L'axe des X est horizontal. Le grand axe de l'ellipsoïde tourne autour de l'axe Y qui s'enfonce dans la feuille (variation de θ). Enfin, l'ellipsoïde peut tourner sur lui-même ($\dot{\varphi}$) autour de son grand axe : l'axe des z. On complète l'axe des z avec l'axe des y identique à l'axe des Y, et l'axe des x, de façon à former le repère direct (x, y, z). La force de frottement horizontale étant faible, on considère que le centre de gravité G est immobile.

Soit $\vec{\omega}$ le vecteur rotation de l'ellipsoïde par rapport au référentiel fixe.

$$\vec{\omega}_{(X,Y,Z)} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}\,\sin\theta \\ \dot{\theta} \\ \Omega + \dot{\varphi}\,\cos\theta \end{pmatrix} \qquad \vec{\omega}_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} -\Omega\,\sin\theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} + \Omega\,\cos\theta \end{pmatrix}$$

Les moments principaux d'inertie étant A, A, et C, et $\vec{\sigma}$ étant le moment cinétique en G :

$$\vec{\sigma}_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} -A\Omega\sin\theta \\ A\dot{\theta} \\ C\dot{\varphi} + C\Omega\cos\theta \end{pmatrix} \vec{\sigma}_{(X,Y,Z)} = \begin{pmatrix} -A\Omega\sin\theta\cos\theta + C\dot{\varphi}\sin\theta + C\Omega\sin\theta\cos\theta \\ A\dot{\theta} \\ A\Omega\sin^2\theta + C\dot{\varphi}\cos\theta + C\Omega\cos^2\theta \end{pmatrix}$$

[1] egg

$$X_I = \frac{dh}{d\theta} < 0 \qquad l = -\frac{dh}{d\theta} > 0 \qquad Z_H = -h(\theta) < 0$$

Calculons la vitesse du point du solide en contact à l'instant t en I avec le plan horizontal :

$$\vec{V}_I = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{GI} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}\sin\theta \\ \dot{\theta} \\ \Omega + \dot{\varphi}\cos\theta \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -l \\ 0 \\ -h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{\theta}h \\ -l\Omega - l\dot{\varphi}\cos\theta + h\dot{\varphi}\sin\theta \\ l\dot{\theta} \end{pmatrix}$$

Si les variations de θ sont lentes, on voit que seule la composante en Y de $\vec{V}_I$ est non nulle. On peut penser que cette composante est négative ; il restera à le vérifier à la fin. Donc, la force appliquée en I s'écrit dans (X, Y, Z) :

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ F \\ Mg \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \quad F > 0$$

compte tenu des lois de Coulomb du frottement solide. La troisième composante est Mg car l'accélération verticale liée à $\dot{\theta}$ est faible.

Le théorème du moment cinétique au centre de gravité G donne :

$$\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial t} + \vec{\Omega} \wedge \vec{\sigma} = \overrightarrow{HI} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Mg \end{pmatrix} + \overrightarrow{GH} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{pmatrix} + \overrightarrow{HI} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} X_I \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Mg \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -h \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_I \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} hF \\ -Mg\,X_I \\ F\,X_I \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -A\Omega\sin\theta\cos\theta + C\dot{\varphi}\sin\theta + C\Omega\sin\theta\cos\theta \\ A\dot{\theta} \\ A\Omega\sin^2\theta + C\dot{\varphi}\cos\theta + C\Omega\cos^2\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dots \\ -A\Omega^2\sin\theta\cos\theta + C\Omega\dot{\varphi}\sin\theta + C\Omega^2\sin\theta\cos\theta \\ \dots \end{pmatrix}$$

Pour la composante en Y, on obtient :

$$A\ddot{\theta} - A\Omega^2\sin\theta\cos\theta + C\Omega\dot{\varphi}\sin\theta + C\Omega^2\sin\theta\cos\theta = -Mg\,X_I$$

On peut supposer les variations de θ faibles, ainsi que le poids, par rapport aux termes contenant Ω qui sont nettement prépondérants, si l'ellipsoïde tourne vite, et qui s'équilibrent. On obtient alors :

$$(C-A)\Omega^2 \sin\theta\cos\theta + C\Omega\dot{\varphi}\sin\theta = 0$$

$$(C-A)\Omega\,\cos\theta\,+\,C\,\dot{\varphi}\,=\,0$$

Il s'agit d'une relation d'équilibre gyroscopique. Du coup, l'expression de $\vec{\sigma}$ se simplifie :

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 \\ A\,\dot{\theta} \\ A\,\Omega \end{pmatrix}$$

et le théorème du moment cinétique devient :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ A\ddot{\theta} \\ A\dot{\Omega} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ A\dot{\theta} \\ A\Omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h\,F \\ -M g\,X_I \\ F\,X_I \end{pmatrix}$$

$$-A\Omega\dot{\theta} = hF \qquad A\dot{\Omega} = FX_I \qquad A\Omega = -\frac{hF}{\dot{\theta}}$$

d'où l'équation différentielle :

$$\frac{\dot{\Omega}}{\Omega} = -\frac{FX_I\dot{\theta}}{hF} = -\frac{\frac{dh}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}}{h} = -\frac{\dot{h}}{h}$$

$$\ln\Omega + \ln h = Cte \qquad \Omega h = Cte \qquad \text{soit} \quad \vec{\sigma}\bullet\overrightarrow{GI} = Cte = -J$$

$$\sigma h = J$$

J s'appelle la constante de Jellett (voir H.K. Moffatt et Y. Shimomura Nature Vol 416 28 mars 2002). C'est un invariant adiabatique du problème.

Ceci permet d'arriver à l'équation différentielle en θ :

$$A\Omega h = J \qquad A\Omega\dot{\theta} = -hF \qquad \dot{\theta}\frac{J}{h} = -hF$$

$$\dot{\theta} = -\frac{1}{J}h^2F < 0$$

et l'axe de symétrie de révolution de l'ellipsoïde se redresse, jusqu'à temps que cette relation donne $\dot{\theta} = 0$, ce qui est obtenu quand l'axe est vertical, c'est à dire pour $F = 0$ car $\vec{V_I} = \vec{0}$ dans ce cas.

Il nous reste à vérifier que $(\vec{V_I})_Y < 0$.

$$(V_I)_Y = -l\Omega - l\dot{\varphi}\cos\theta + h\dot{\varphi}\sin\theta$$

$$= \frac{A-C}{C}\frac{J}{A}\sin\theta\cos\theta - \frac{A-C}{C}\frac{J}{A}\frac{l\cos^2\theta}{h} - \frac{lJ}{Ah}$$

$$\overrightarrow{GM} \quad \left| \begin{array}{l} a\sin\alpha \\ b\cos\alpha \end{array} \right. \qquad b > a$$

$$(\overrightarrow{GM})_Z = -a\sin\alpha\sin\theta + b\cos\alpha\cos\theta$$

Pour I, $\sin\alpha > 0$ et $\cos\alpha < 0$.

Pour $\overrightarrow{GI}$, on a $dZ_M = 0$.

$$-a\cos\alpha\sin\theta - b\sin\alpha\cos\theta = 0$$

$$\tan\alpha = -\frac{a}{b}\tan\theta$$

$$-h = Z(I) \Rightarrow$$

$$-h = -a\sin\theta\frac{\frac{a}{b}\tan\theta}{\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}\tan^2\theta}} - b\cos\theta\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}\tan^2\theta}} = -\frac{b\cos\theta}{\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}\tan^2\theta}}\left[1+\frac{a^2}{b^2}\tan^2\theta\right]$$

$$h = b\cos\theta\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}\tan^2\theta}$$

$$\frac{dh}{d\theta} = -b\sin\theta\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}\tan^2\theta} + \frac{b\cos\theta\frac{a^2}{b^2}2\frac{\tan\theta}{\cos^2\theta}}{2\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}\tan^2\theta}}$$

$$= -\frac{b\sin\theta + \frac{a^2}{b}\frac{\sin^3\theta}{\cos^2\theta} - \frac{a^2}{b}\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}}{\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}\tan^2\theta}}$$

$$\text{on a} \quad \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\left(\sin^2\theta - 1\right) = \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}(-\cos^2\theta) = -\sin\theta$$

$$\text{donc} \quad = -\frac{b\sin\theta - \frac{a^2}{b}\sin\theta}{\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}\tan^2\theta}} = -\frac{1}{b}\frac{(b^2-a^2)\sin\theta}{\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}\tan^2\theta}}$$

$$\frac{dh}{d\theta} = -\frac{1}{b}\frac{(b^2-a^2)\sin\theta}{\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}\tan^2\theta}}$$

$$\frac{l}{h} = \frac{1}{b}\frac{(b^2-a^2)\sin\theta}{\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}\tan^2\theta}}\frac{1}{b\cos\theta\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}\tan^2\theta}}$$

$$\frac{l}{h} = \frac{(b^2 - a^2)\tan\theta}{b^2 + a^2\tan^2\theta} \quad b > a \quad C = \frac{2}{5}Ma^2 \quad A = \frac{M(a^2 + b^2)}{5} \quad A - C = \frac{M(b^2 - a^2)}{5} > 0$$

Et faisons la vérification finale :

$$\frac{M\frac{b^2-a^2}{5}}{\frac{2}{5}Ma^2}\sin\theta\cos\theta - \frac{M\frac{b^2-a^2}{5}}{\frac{2}{5}Ma^2}\frac{l\cos^2\theta}{h} - \frac{2l}{2h} < 0?$$

$$\frac{b^2 - a^2}{2a^2}\sin\theta\cos\theta - \frac{b^2 - a^2}{2a^2}\cos^2\theta\frac{(b^2 - a^2)}{b^2 + a^2\tan^2\theta}\tan\theta - \frac{2}{2}\frac{(b^2 - a^2)\tan\theta}{b^2 + a^2\tan^2\theta} < 0?$$

$$\cos^2\theta - \cos^2\theta\frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2\tan^2\theta} - \frac{2a^2}{b^2 + a^2\tan^2\theta} < 0?$$

$$b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta - b^2\cos^2\theta + a^2\cos^2\theta - 2a^2 < 0?$$

$$-a^2 < 0 \quad \text{OK}$$