[1]THÉORÈME DU VIRIEL

1- Cas gravitationnel

On considère n points matériels de masses m_i en interactions gravitationnelles les uns avec les autres. Ces points matériels restent localisés dans un volume fini et on suppose que leurs vitesses restent également finies. Clausius a appelé Viriel le terme :

$$w(t) = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \, m_i \vec{v}_i(t)$$

où $\vec{r}_i = \overrightarrow{OM_i}$, O étant un point fixe. $< \dot{w}(t) >= 0$, $< \dot{w}(t) >$ signifiant la valeur moyenne de $\dot{w}(t)$ prise sur un temps suffisamment long.

En effet, $w(t)$ est borné :
$0 < w(t) \leq M$.

$$< \dot{w}(t) >= \lim_{\Delta\to\infty} \frac{1}{2\Delta} \int_{-\Delta}^{+\Delta} \dot{w}(t)\, dt \; = \; \lim_{\Delta\to\infty} \frac{w(\Delta) - w(-\Delta)}{2\,\Delta} \; \leq \; \lim_{\Delta\to\infty} \frac{M}{\Delta} \; = \; 0$$

$$\dot{w}(t) = \sum_{i=1}^{n} m_i {\vec{v}_i}^{\,2} - \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \, \vec{\nabla}_i U = 2E_C - \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \, \vec{\nabla}_i U$$

U étant l'énergie potentielle gravitationnelle totale du système.

$$\vec{\nabla}_i \, U = \vec{\nabla}_i \, U_i \quad \text{avec à } i \text{ fixé :}$$

$$U_i = -G \sum_{j\neq i} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \, \vec{\nabla}_i U = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \, \vec{\nabla}_i U_i = -G \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \, \vec{\nabla}_i \sum_{j\neq i} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} = -G \sum_{(i,j) j\neq i} \vec{r}_i \; m_i m_j \vec{\nabla}_i \left(\frac{1}{r_{ij}}\right)$$

$$= -G \sum_{(i,j) i>j} m_i m_j \left[\vec{r}_i \, \vec{\nabla}_i \left(\frac{1}{r_{ij}}\right) + \vec{r}_j \, \vec{\nabla}_j \left(\frac{1}{r_{ji}}\right)\right]$$

$$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + \ldots}\,; \quad \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r_{ij}}\right) = -\frac{1}{{r_{ij}}^2} \frac{\partial r_{ij}}{\partial x_i} = -\frac{1}{{r_{ij}}^2} \frac{x_i - x_j}{r_{ij}} = -\frac{x_i - x_j}{{r_{ij}}^3}$$

[1] viriel

$$\left[\vec{r_i}\,\overrightarrow{\nabla}_i\left(\frac{1}{r_{ij}}\right)+\vec{r_j}\,\overrightarrow{\nabla}_j\left(\frac{1}{r_{ji}}\right)\right]_{\text{premier terme}} = -x_i\,\frac{x_i-x_j}{{r_{ij}}^3}-x_j\,\frac{x_j-x_i}{{r_{ji}}^3} = -\frac{(x_i-x_j)^2}{{r_{ij}}^3}$$

$$\vec{r_i}\,\overrightarrow{\nabla}_i\left(\frac{1}{r_{ij}}\right)+\vec{r_j}\,\overrightarrow{\nabla}_j\left(\frac{1}{r_{ji}}\right) = -\frac{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2+(z_i-z_j)^2}{{r_{ij}}^3} = -\frac{1}{r_{ij}}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{r_i}\,\overrightarrow{\nabla}_i U = -G\sum_{(i,j)i>j} m_i m_j\left(-\frac{1}{r_{ij}}\right) = +G\sum_{(i,j)i>j} m_i m_j\left(\frac{1}{r_{ij}}\right) = -U$$

Finalement : $\dot{w}(t)\;=\;2\,E_C+U$; $\quad < \dot{w}(t) > \;=\; 2 < E_C > + < U > = 0$

$$E_{\text{totale}} = E_C + U \qquad < E_C > + E_{\text{totale}} = 0 \qquad < E_C > = -E_{\text{totale}}$$

2- Cas d'un gaz parfait dans un bocal

Dans le cas d'un gaz parfait, les forces ne sont que des forces de choc. Les termes du Viriel relatifs aux chocs entre molécules s'annulent deux à deux, car au cours d'un choc, les deux molécules ont le même vecteur position, mais subissent des forces opposées. Il ne subsiste donc que les forces de pression appliquées aux molécules quand elles rencontrent les parois.

$$-\sum_{i=1}^{n}\vec{r_i}\,\overrightarrow{\nabla}_i U = \sum_{i=1}^{n}\vec{r_i}\,\vec{F_i}$$

$$< \sum_{i=1}^{n}\vec{r_i}\,\vec{F_i} > = < \sum_j \vec{r_j}\left(-p\,\delta\overrightarrow{S}\right) = -p < \sum_j \vec{r_j}\,\delta\overrightarrow{S} > = -p\sum_j \vec{r_j}\delta\overrightarrow{S_j}$$

À l'instant t, les molécules j sont celles qui sont dans la zone de contact et d'influence de la paroi. On attribue à chaque molécule, une partie δS_j de la surface, telle que $\vec{F_j} = -p\,\delta\overrightarrow{S_j}$. L'ensemble de toutes ces surfaces δS_j doit faire la surface totale, car globalement, on rejoint une formulation continue, et chaque morceau de la surface, par la pression contribue bien en permanence au confinement du gaz. On obtient le triple du volume du cône de sommet O s'appuyant sur δS_j.

Finalement $\qquad < \sum_{i=1}^{n}\vec{r_i}\,\vec{F_i} > = -p\sum_j 3\,\delta V_j = -3\,p\,V$

On obtient :

$$2 < E_C > -3pV = 0 \qquad < E_C >= \frac{3}{2}pV = \frac{3}{2}Nk_BT$$

Pour une particule seule, l'énergie cinétique de translation vérifie $< e_C >= \frac{3}{2}k_BT$. Soit u la densité volumique d'énergie cinétique de translation : $p = \frac{2}{3}\,u$.

3- Formulation continue pour une étoile

Les étoiles sont constituées d'atomes dont la seule énergie cinétique est de translation.

$$\frac{dp}{dr} = -G\frac{m(r)\rho}{r^2}\,; \quad \frac{dp}{4\pi r^2\rho\, dr} = -G\frac{m}{4\pi r^4}\,; \quad \frac{dp}{dm} = -\frac{Gm}{4\pi r^4}$$

$$4\pi r^3 dp = -\frac{Gm}{r}dm\,; \quad 3V\,dp = -\frac{Gm}{r}\,dm\,; \quad 3\int V\,dp = -\int \frac{Gm}{r}\,dm = U$$

En intégrant par partie le premier membre : $\quad -3\displaystyle\int p\,dV = U$

$$3V < p >= -U \qquad \frac{2}{3}\frac{< E_C >}{V}3V = -U \qquad 2 < E_C >= -U$$

Pierre BOUTELOUP