

LES VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES

1. Définition d'une variété. - Il nous faut maintenant généraliser la notion géométrique d'espace affine sur un espace vectoriel. Il nous faut trouver la structure générale de ce que nous appellerons "espace", structure qui s'appliquera à l'espace-temps de la Relativité générale. En effet, en Relativité générale, il n'existe plus de référentiel galiléen global permettant de définir les quadri-vecteurs, donc il n'y a plus d'espace vectoriel global sous-jacent sur lequel est construit l'espace géométrique.

Nous avons déjà la notion de certains espaces qui ne sont pas des espaces affines, comme la surface d'une sphère par exemple. Mais nous les considérons comme placés dans un espace affine de plus grande dimension. Cependant, nous devons être capables d'étudier la structure de l'espace-temps de la Relativité générale, qui constitue la trame de notre univers, d'une manière intrinsèque, sans avoir à le plonger dans un univers fictif échappant à nos sens, donc à la physique.

Ce qu'il nous reste, c'est la notion d'évènement, évènements correspondants aux points de l'espace-temps. Enfin, nous sommes capables de repérer l'emplacement de ces évènements et le moment auquel ils se produisent par trois coordonnées d'espace et une de temps.

Ce type d'espace, nous l'appellerons *variété différentiable*. Il est constitué par un ensemble de points repérés par une suite de nombres appelés *coordonnées*. Le nombre de coordonnées que nous supposerons dans la suite égal à n constitue ce qu'on appelle la *dimension* de la variété. D'un point donné à un point voisin, les coordonnées varient d'une manière continue; ce qui peut constituer la définition du *voisinage*, s'il n'y en a pas d'autre plus intuitive. Enfin, il se peut qu'il ne soit pas possible d'avoir un seul type de coordonnées sur l'ensemble de la variété. Certaines régions peuvent nécessiter l'emploi de coordonnées différentes. Nous supposerons que le nombre de coordonnées est partout le même. Le domaine d'application d'un certain type de coordonnées sur la variété constituera une *carte*, et nous supposerons que les cartes se recouvrent. Dans une zone de

recouvrement, nous supposons que les deux types de coordonnées différentes sont des fonctions différentiables les une des autres jusqu'à tout ordre nécessaire pour le calcul, d'où le terme de variété différentiable. Un ensemble de cartes recouvrant complètement la variété constitue un *atlas*. On reconnaît là les termes utilisés en géographie. La surface de la Terre est en effet un exemple de variété.

2. Espace vectoriel tangent. - Il nous faut maintenant définir d'une manière intrinsèque ce que nous appellerons *vecteur tangent* en un point de la variété. Essayant de rester le plus proche possible de la structure d'espace affine sur un espace vectoriel, nous nous rappelons que dans cette structure, à un ensemble de deux points A et B , on associe le vecteur \overrightarrow{AB} . Dans la variété, ceci ne sera possible que pour deux points voisins M et M' .

À deux tels points, on peut associer l'ensemble des nombres du^1, \dots, du^n ; avec : $du^i = u^i(M') - u^i(M)$. Si l'on prend les coordonnées v^j , on aura :

$$du^i = \frac{\partial u^i}{\partial v^j}(M) dv^j \quad (11, 1)$$

Nous avons déjà trouvé une telle relation, (9,19) dans l'étude des coordonnées curvilignes dans les espace affines. Tout ensemble de nombres reliés par la relation (11,1) dans un changement de coordonnées devra donc constituer un *vecteur tangent* en M à la variété. Nous sommes donc amenés à la construction suivante :

Considérons un point M fixé. Considérons la relation R entre deux suites de n nombres (a^i) et (b^j) définies en coordonnées u^i et v^j .

$$\begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^i \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix}_{(u^i)} R \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^j \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix}_{(v^j)} \quad \text{si} \quad a^i = \frac{\partial u^i}{\partial v^j}(M) b^j \quad (11, 2)$$

C'est une relation d'équivalence, en effet, elle est réflexive :

$$\frac{\partial u^i}{\partial u^j} a^j = \delta^i_j a^j = a^i$$

Elle est symétrique :

$$\frac{\partial v^m}{\partial u^i} a^i = \frac{\partial v^m}{\partial u^i} \frac{\partial u^i}{\partial v^j} b^j = \frac{\partial v^m}{\partial v^j} b^j = b^m$$

Elle est transitive :

$$a^i = \frac{\partial u^i}{\partial v^j} \frac{\partial v^j}{\partial w^k} c^k = \frac{\partial u^i}{\partial w^k} c^k$$

De plus : $(a^i)R(b^j)$ et $(a^i)R(b'^j) \Rightarrow (a^i + a'^i)R(b^j + b'^j)$ et $(ka^i)R(kb^j)$.

Ainsi, les classes d'équivalences sont stables par ces opérations. On peut donc munir l'ensemble de ces classes de ces opérations. L'ensemble des classes est ainsi

muni d'une structure d'espace vectoriel sur \mathbb{R} . On a ainsi construit la structure d'espace vectoriel tangent en M à la variété. Les dérivées partielles variant à priori d'une manière quelconque d'un point à un autre, et cette variation dépendant du type de coordonnées choisi, il n'y a aucun lien entre les deux espaces tangents en deux points voisins. Ainsi, il est impossible de définir d'une manière canonique indépendante des coordonnées une égalité du type : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ même pour des points voisins. Ceci est relié au fait que les espaces vectoriels tangents en des points différents sont **déconnectés**. Il n'y a aucun moyen de faire correspondre à un vecteur en M , un vecteur en un point voisin M' . La seule chose que nous donne l'espace vectoriel tangent, c'est au fond un code qui, à partir du point M , permet de donner une direction de déplacement sur la variété, et un plus ou moins grand déplacement dans cette direction. On pose :

$$\frac{\partial}{\partial u^i} = \text{Classe} \left[\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right) \xrightarrow{i^{\text{em}} \text{ position}} \\ (u^i) \end{array} \right] \quad (11, 3)$$

On a :

$$\overrightarrow{MM'} = du^i \frac{\partial}{\partial u^i} = dv^j \frac{\partial}{\partial v^j} \quad (11, 4)$$

Ainsi, on retrouve le même lien (9,4) entre coordonnées et vecteurs de bases qu'en espace affine. Enfin, dans l'égalité précédente, prenons $dv^j = 1$; $dv^{j'} = 0$ pour $j \neq j'$; il vient :

$$du^i = \frac{\partial u^i}{\partial v^j} dv^j + \frac{\partial u^i}{\partial v^{j'}} dv^{j'} = \frac{\partial u^i}{\partial v^j} \quad (\text{ssj})$$

(11,4) donne alors :

$$\frac{\partial}{\partial v^j} = \frac{\partial u^i}{\partial v^j} \frac{\partial}{\partial u^i} \quad (11, 5)$$

Et on a retrouvé (9,15).

Disposant de l'espace vectoriel tangent en M à la variété, la notion de tenseur en M s'en déduit. Un tenseur en M est donc un ensemble de nombres obéissant à la bonne loi de transformation, c'est à dire (9,20) lors d'un changement de base de l'espace vectoriel tangent en M ; c'est également une forme multilinéaire sur un produit cartésien contenant un certain nombre de fois l'espace tangent en M et un certain nombre de fois son dual.

En particulier, on a les formes linéaires, et la base duale $\{e^{*i}\}$ de la base $\{e_i = \frac{\partial}{\partial u^i}\}$. On a :

$$e^{*i}(d\vec{M}) = e^{*i} \left(\frac{\partial}{\partial u^j} du^j \right) = e^{*i} \left(\frac{\partial}{\partial u^j} \right) du^j = \delta^i_j du^j = du^i$$

On note toujours $e^{*i} = du^{*i}$; et on a :

$$du^{*i}(d\vec{M}) = du^i \quad (11, 6)$$

On a retrouvé ainsi (9,6). Notons qu'on peut définir les vecteurs tangents à une variété différentiable comme opérateurs de dérivation sur les fonctions scalaires définies sur la variété. Certains auteurs préfèrent eux, définir d'abord les formes linéaires de l'espace dual comme différentielles des fonctions scalaires définies sur la variété, et passer ensuite aux vecteurs tangents par dualité. Toutes ces définitions sont équivalentes.

3. Variétés riemanniennes. - Ce sont des variétés où il existe un produit scalaire dans l'espace tangent en M auquel correspond un élément linéaire par :

$$(a^i)_{(u^i)} \bullet (b^j)_{(u^j)} = g_{ij}a^ib^j \quad (11, 7)$$

$$\overrightarrow{MM'} \bullet \overrightarrow{MM'} = ds^2 = g_{ij}du^idu^j \quad (11, 8)$$

$$\text{On a : } g_{ij} = \frac{\partial}{\partial u^i} \bullet \frac{\partial}{\partial u^j} \quad (11, 9)$$

$g = \vec{g} = (g_{ij})$ est un tenseur deux fois covariants.

Réciproquement, la donnée d'un élément linéaire $ds^2 = g_{ij}du^idu^j$ indépendant des coordonnées choisies munit l'espace tangent d'un produit scalaire, les g_{ij} obéissant aux bonnes lois de transformation pour un tenseur deux fois covariants donc un produit scalaire. Nous avons vu au § 3 du chapitre 7 que tel est le cas pour l'espace-temps de la Relativité générale. Nous retrouverons l'expression générale du ds^2 (11,8) au § 2 du chapitre 12. L'espace-temps de la Relativité générale est donc une variété riemannienne. Dans toute la suite de ce chapitre, nous supposons que l'on a affaire à de telles variétés.

Nous avons vu que sur une variété, il n'y a pas de connection entre des vecteurs tangents en des points différents de la variété. Nous ne pouvons donc pas définir les droites comme chemins de direction constante, car il n'y a aucun moyen de comparer une direction en un point à une direction en un autre point.

L'élément linéaire nous permet cependant de définir un ensemble de courbes d'intervalle stationnaire. Les démonstrations des § 4 et § 5 du chapitre 10 sont en effet valables sur une variété riemannienne quelconque. Nous appellerons ces courbes qui généralisent les droites des espaces affines, des *géodésiques*. Elles ont pour équation :

$$\frac{d^2u^h}{d\lambda^2} + \Gamma_{kl}^h \frac{du^k}{d\lambda} \frac{du^l}{d\lambda} = 0 \quad (11, 10)$$

à la condition de poser :

$$\Gamma_{kl}^h = \frac{1}{2}g^{hi} (g_{ki,l} + g_{il,k} - g_{kl,i}) \quad (11, 11)$$

On retrouve ainsi exactement les formules obtenues en espace affine euclidien, bien que la notion de dérivée covariante d'un vecteur ne soit pas définie pour le moment. On appellera encore les Γ_{jk}^i les symboles de CHRISTOFFEL.

Les symboles de CHRISTOFFEL sont bien symétriques, comme dans le cas des espaces affines, de par leur définition en fonction du tenseur métrique qui est symétrique.

La loi de transformation des symboles de CHRISTOFFEL dans un changement de coordonnées s'obtient par la formule les définissant en fonction du tenseur métrique, avec la loi de transformation des composantes de ce tenseur et la loi de transformation des coordonnées et de leurs dérivées partielles. Or toutes les formules et lois de transformations sont identiques à celles trouvées dans le cas des espaces affines. Dans ce dernier cas, les formules et lois de transformations étaient en accord avec la loi de transformation des symboles de CHRISTOFFEL dans un changement de coordonnées vue au chapitre 9. Cette loi de transformation est donc nécessairement la même, et il n'est pas nécessaire de la recalculer.

4. Transport parallèle d'un vecteur. - Un champ de vecteur constant en espace affine, vérifiait :

$$(dV)^i = dV^i + V^j \Gamma_{jk}^i du^k = 0 \quad (11, 12)$$

Nous pouvons donc définir la non variation d'un vecteur lors du déplacement $\overrightarrow{MM'}$ = (du^k) sur une variété riemannienne, par la formule précédente. On dit que l'on fait le transport parallèle du vecteur \mathbf{V} de M à M' . Ce vecteur reste en effet parallèle à lui même, il garde une direction (et une intensité) constante ; mais c'est la formule précédente qui permet de définir ce qu'on appellera direction et intensité constante sur une variété riemannienne. Cette définition est intéressante, car elle permet de considérer localement les géodésiques comme des courbes de direction constante. Posant $V^i = \frac{du^i}{d\lambda}$; $\mathbf{V} = (V^i)$ est un vecteur tangent à la géodésique ; et l'équation des géodésiques (11,10) redonne (11,12).

Notre but est en effet de montrer que localement les variétés riemanniennes peuvent être considérées comme des espaces affines munis d'un produit scalaire sur un espace vectoriel. Les géodésiques devront alors être localement des droites, donc des courbes de direction constante.

Notons que le procédé que nous utilisons, quoique faisant appel à des mathématiques plus élaborées, est le même que celui qui permet de construire la géométrie de notre espace à trois dimensions. En géométrie physique, le concept primitif est la notion de chemin, et de longueur d'un chemin. On définit alors

les droites comme des chemins de longueur minimale, et on les visualise avec une ficelle tendue. On dit alors que deux bipoints sont équipollents si le quadrilatère formé est un parallélogramme, ce qui suppose que les diagonales (qui sont des droites) se coupent en leur milieu. La notion de parallélisme, donc de direction constante est ainsi obtenue à partir des droites obtenues auparavant comme courbes de longueur minimale. Le reste de la géométrie se déroule alors à partir de ce point de départ physique. Il reste la propriété remarquable que dans un espace affine les droites sont à la fois les courbes de direction constante, et de longueur stationnaire.

Les espaces vectoriels en deux points voisins M et M' sont maintenant connectés, la différence de deux vecteurs, l'un en M , l'autre en M' , à un sens, avec :

$$\begin{aligned} (\mathbf{V}(M') - \mathbf{V}(M))^i &= dV^i + V^j \Gamma_{jk}^i du^k \\ (\mathbf{V}(M') - \mathbf{V}(M))^i &= (dV)^i \quad ; \quad d\mathbf{V} = (dV)^i \frac{\partial}{\partial u^i} \end{aligned}$$

Pour que la définition précédente soit valable, il faut que les nombres $(dV)^i$ se transforment bien comme les composantes d'un vecteur dans un changement de base. Or leur loi de transformation se déduit de (11,2) pour V^i et de la loi de transformation des symboles de CHRISTOFFEL. Cette loi de transformation est la même que dans le cas des espaces affines. Dans ce dernier cas, cette loi de transformation des symboles de CHRISTOFFEL était bien accord avec le fait que les nombres $(dV)^i$ étaient les composantes d'un vecteur. Toutes les formules étant identiques, il n'est pas nécessaire de faire le calcul, le résultat est acquis.

On dit que la variété est munie d'une *connection* définie par les symboles de CHRISTOFFEL. Cette connection ayant été construite à partir de l'élément linéaire riemanien ds^2 , on dit qu'on a une *connection riemanienne*.

La formule ci-dessus donne, pour $\mathbf{V} = \frac{\partial}{\partial u^j}$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial u^j}(M') - \frac{\partial}{\partial u^j}(M) \right)^i &= \delta^m_j \Gamma_{mk}^i du^k = \Gamma_{jk}^i du^k \\ d \frac{\partial}{\partial u^j} &= \left(d \frac{\partial}{\partial u^j} \right)^i \frac{\partial}{\partial u^i} = \Gamma_{jk}^i \frac{\partial}{\partial u^i} du^k \\ \text{soit :} \quad d\mathbf{e}_j &= \Gamma_{jk}^i \mathbf{e}_i du^k \end{aligned}$$

et on a retrouvé (9,13).

5. Stabilité de la somme et du produit externe par un nombre des vecteurs par transport parallèle. - Le vecteur obtenu par transport parallèle d'un point à un autre le long d'une courbe d'une combinaison linéaire de deux

vecteurs est égal à la même combinaison linéaire des deux vecteurs transportés. On a en effet :

$$\begin{aligned} d(\lambda \mathbf{V} + \mu \mathbf{W})^i &= -(\lambda \mathbf{V} + \mu \mathbf{W})^j \Gamma_{jk}^i du^k \\ &= -\lambda V^j \Gamma_{jk}^i du^k - \mu W^j \Gamma_{jk}^i du^k = \lambda dV^i + \mu dW^i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi : } (\lambda \mathbf{V} + \mu \mathbf{W})^i(M') &= (\lambda \mathbf{V} + \mu \mathbf{W})^i(M) + d(\lambda \mathbf{V} + \mu \mathbf{W})^i = \\ &= \lambda V^i(M) + \lambda dV^i + \mu W^i(M) + \mu dW^i = \lambda V^i(M') + \mu W^i(M') \end{aligned}$$

6. Transport parallèle d'un tenseur. - À partir du transport parallèle des vecteurs, on peut définir le transport parallèle des formes linéaires et plus généralement des tenseurs, suivant le même procédé qu'aux § 7 et § 8 du chapitre 9. On aboutit alors aux mêmes formules avec les symboles de CHRISTOFFEL.

La variation d'une forme linéaire est définie à partir de l'équation (9,25) posée comme définition. Cette définition assure qu'une forme linéaire transportée parallèlement à elle-même, c'est à dire constante, donne une valeur constante en étant appliquée à un vecteur transporté parallèlement à lui-même, donc constant :

$$d\mathbf{V} = 0 \quad ; \quad d\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad d(\varphi(\mathbf{V})) = 0$$

De la même manière qu'au chapitre 9, il en découle alors : (9,26) ; (9,28) ; (9,30) ; (9,32) ; et (9,33).

Pour les tenseurs d'ordres quelconques, la définition du transport parallèle est faite en posant (9,31). De là découle (9,34) et (9,35).

La propriété de stabilité du § 5 est encore valable pour les tenseurs comme on le voit immédiatement avec la formule utilisant les symboles de CHRISTOFFEL.

7. Conservation du produit scalaire par transport parallèle. - Nous avons :

$$d(\mathbf{V} \bullet \mathbf{W}) = d(g_{ij} V^i W^j)$$

Cette formule exprime la différentielle du produit scalaire en fonction des g_{ij} , dg_{ij} , dV^i , et dW^j . Ces dernières s'expriment avec les symboles de CHRISTOFFEL. Les formules sont les mêmes que dans le cas des espaces affines ; en particulier le lien entre les symboles de CHRISTOFFEL et le tenseur métrique. Dans le cas des espaces affines on trouvait zéro. De nouveau, il est inutile de faire le

calcul, nécessairement $d(\mathbf{V} \bullet \mathbf{W}) = 0$, et il y a conservation du produit scalaire par transport parallèle. Ainsi, au transport parallèle du vecteur $d\vec{M} = \overrightarrow{MM'}$, correspond deux nouveaux points M_1, M'_1 , définissant le nouveau vecteur, tels que l'intervalle entre ces deux derniers soit le même que celui du départ. En ce sens le transport parallèle construit respecte la métrique, et cette condition le définit d'une manière unique. En effet, réciproquement, tout transport parallèle correspond à la formule (11.12) avec certains symboles de CHRISTOFFEL ayant la loi de transformation (9,36); la conservation du produit scalaire implique $d(\mathbf{e}_i \bullet \mathbf{e}_j) = dg_{ij} = 0$, qui sont les identités de RICCI, dont on déduit l'expression des symboles de CHRISTOFFEL en fonction du tenseur métrique.

8. Transport parallèle d'un vecteur le long d'une courbe fermée. -
 Considérons un circuit fermé C qui est le bord d'une surface S (fig. 11.1).

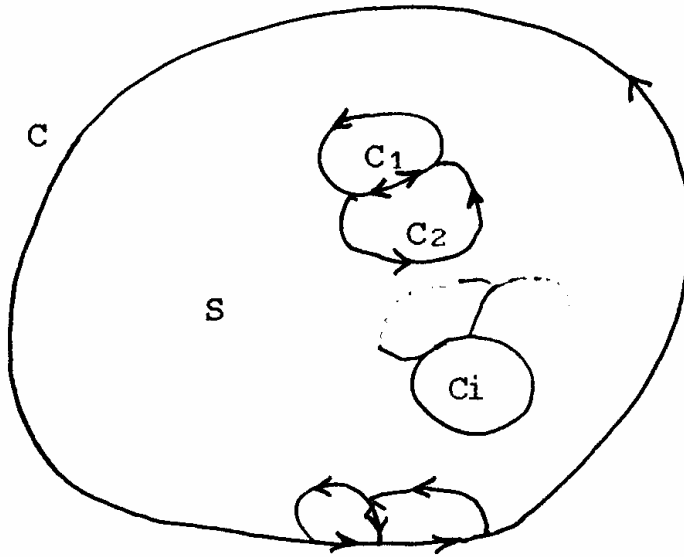


Fig. 11.1

On peut diviser la surface S en petites cellules limitées par de petits circuits fermés C_i . Le changement du vecteur \mathbf{V} par transport parallèle le long de C est la somme des changements obtenus par transport autour de chaque circuit C_i . Le changement de \mathbf{V} autour d'une cellule intérieure est en effet annulé par les changements obtenus en circulant en sens inverse autour des cellules adjacentes. Il ne reste donc que la contribution des bords extérieurs des cellules bordant S qui constitue C . On peut donc ne se préoccuper que du changement de \mathbf{V} lors du transport parallèle autour d'un petit circuit. Dans ce cas, on a :

$$dV^i = -V^j \Gamma_{jk}^i du^k \quad \Rightarrow \quad V^j(\lambda) = V^j(\lambda_0) - V^m(\lambda_0) \Gamma_{ml}^j(\lambda_0) (u^l(\lambda) - u^l(\lambda_0)) + \dots$$

$$\Gamma_{jk}^i(\lambda) = \Gamma_{jk}^i(\lambda_0) + \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial u^l}(\lambda_0) (u^l(\lambda) - u^l(\lambda_0)) + \dots$$

$$V^i(\lambda_1) = V^i(\lambda_0) + \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} - \left(V^j(\lambda_0) - V^m(\lambda_0) \Gamma_{ml}^j(\lambda_0) \left(u^l(\lambda) - u^l(\lambda_0) \right) \right) \\ \times \left(\Gamma_{jk}^i(\lambda_0) + \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial u^l}(\lambda_0) \left(u^l(\lambda) - u^l(\lambda_0) \right) \right) \left(\frac{du^k}{d\lambda} \right) d\lambda$$

Si le circuit est fermé : $\oint du^k = 0$

On néglige le terme en $(u^l(\lambda) - u^l(\lambda_0))^2$; il reste, au premier ordre non nul :

$$V^i(\lambda_1) - V^i(\lambda_0) = V^j \left(\Gamma_{jl}^h \Gamma_{hk}^i - \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial u^l} \right) \oint u^l du^k$$

$$\oint u^l du^k = \underbrace{\oint d(u^l du^k)}_{\mathbf{0}} - \oint u^k du^l$$

Pour tout tenseur T^i_{jkl} , on a alors :

$$T^i_{jkl} \oint u^l du^k = \frac{1}{2} T^i_{jkl} \oint u^l du^k - \frac{1}{2} T^i_{jkl} \oint u^k du^l = \frac{1}{2} (T^i_{jlk} - T^i_{jkl}) \oint u^k du^l$$

Appliquant cela :

$$V^i(\lambda_1) - V^i(\lambda_0) = V^j \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial u^l} - \frac{\partial \Gamma_{jl}^i}{\partial u^k} + \Gamma_{jk}^h \Gamma_{hl}^i - \Gamma_{jl}^h \Gamma_{hk}^i \right) \oint u^k du^l \\ \Delta V^i = \frac{1}{2} V^j R^i_{jkl} \oint u^k du^l \quad (11,13)$$

Avec :

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial u^l} - \frac{\partial \Gamma_{jl}^i}{\partial u^k} + \Gamma_{jk}^h \Gamma_{hl}^i - \Gamma_{jl}^h \Gamma_{hk}^i \quad (11,14)$$

Les nombres R^i_{jkl} sont les composantes d'un tenseur du fait de la covariance de l'équation (11,13) ; on l'appelle : *Le tenseur de courbure de RIEMANN CHRISTOFFEL*.

Remarquons la grande analogie de la formule (11,14) avec la formule (5,79) :

$$F_{kl} = \frac{\partial A_l}{\partial u^k} - \frac{\partial A_k}{\partial u^l}$$

exprimant le tenseur électromagnétique en fonction du potentiel vecteur. Les symboles de CHRISTOFFEL sont appelés les *coefficients de connection*. La connection est en effet caractérisée par la formule (11,12) donnant le transport parallèle d'un vecteur, donc par les symboles de CHRISTOFFEL. On voit que les composantes du potentiel vecteur jouent le rôle de coefficients de connection.

Le quadripotentiel vecteur A^α est soumis à la transformation de jauge (5,86) laissant invariant **le tenseur de courbure de la connection** : $F^{\alpha\beta}$. De même, les symboles de CHRISTOFFEL sont soumis à la transformation de Jauge (9,36) laissant invariant le tenseur R^i_{jkl} par (11,14).

Dans les Théories de jauge, à chaque interaction correspond une connection sur un espace fibré. Considérons une variété différentiable quelconque. L'ensemble de cette variété et des espaces vectoriels tangents (l'espace vectoriel tangent est l'ensemble des vecteurs tangents en un point) constitue ce qu'on appelle un *espace fibré*. L'espace est la variété ; en chaque point de cette variété, il y a une fibre qui est l'espace vectoriel tangent en ce point qu'on peut identifier à un plan affine (fig. 11.2).

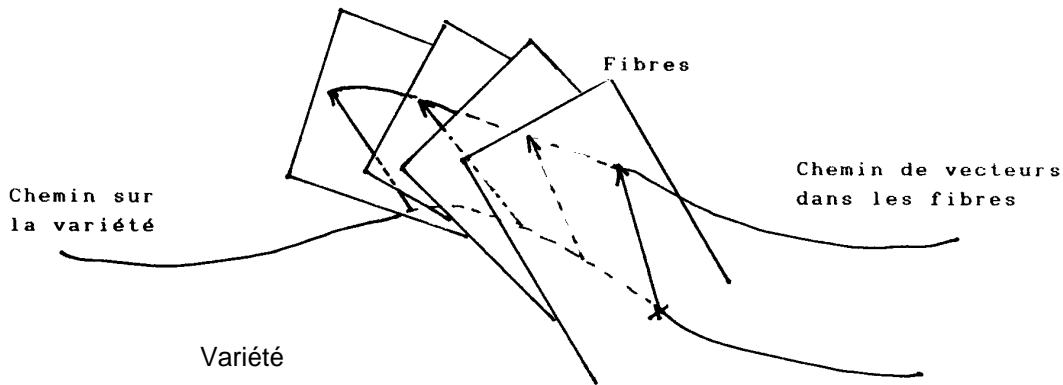


Fig. 11.2

La connection permet d'associer à un chemin sur la variété un chemin dans l'ensemble des fibres. À partir d'un vecteur dans l'espace tangent au point de départ, on peut associer par transport parallèle un vecteur dans l'espace tangent au point d'arrivée, et un vecteur dans toutes les fibres du chemin. La variation du vecteur correspond à une variation de l'état de la particule, donc à une interaction agissant sur elle. Dans le cas de la Relativité générale, la connection correspond à l'existence des géodésiques de l'espace-temps trajectoires des particules libres.

Mais plus généralement, en chaque point de la variété, on peut associer une fibre (un espace vectoriel) qui n'est pas nécessairement l'espace tangent à la va-

riété. Il reste ensuite à construire la connection correspondante. Dans le cas de l'électromagnétisme, en chaque point de l'espace-temps, la fibre est un espace vectoriel à une dimension ; un vecteur correspond à l'état de la phase de la fonction d'onde. Le potentiel vecteur correspondant à la connection change la phase de la particule, ce qui correspond pour un paquet d'ondes, par interférences, à un changement de direction, donc à l'application d'une force. L'arbitraire de jauge pour le potentiel vecteur correspond à un effet de perspective sur la vision du potentiel vecteur par la particule en fonction de la phase de départ en un point, choisie arbitrairement.

Le fait qu'il n'y ait qu'un indice pour les coefficients de la connection correspondant à l'électromagnétisme vient du fait que la fibre étant à une dimension, dans la formule (9,13) il n'y a plus besoin que de l'indice k . On arrive ainsi à la formule simplifiée (5,79).

Ainsi le tenseur électromagnétique est le tenseur de courbure de la connection caractérisée par le potentiel vecteur de l'électromagnétisme.

Les nombres R^i_{jkl} sont fixes au point M . Pour des circuits vérifiant $\oint u^k du^l$ très inférieur aux inverses de ces nombres, on a : $\frac{\Delta V^i}{V^j} \simeq 0$.

Si les coordonnées u^i sont homogènes à une longueur, on voit que les inverses des composantes du tenseur de courbure sont homogènes à une surface. La condition est donc que la surface délimitée par le petit circuit soit très inférieure à l'ordre de grandeur de cette surface caractéristique (pour une carte terrestre, c'est la surface à partir de laquelle une carte plane est manifestement fautive et ne respecte pas les distances). Dans ce cas, l'erreur relative commise en considérant les ΔV^i comme nuls est négligeable. Le transport parallèle d'un vecteur sur un circuit fermé redonne le vecteur du départ.

Cette propriété est bien sur vérifiée rigoureusement si le tenseur de courbure est nul. On dit dans ce cas que *l'espace est plat* ; d'où la terminologie utilisée pour dénommer l'espace-temps de la Relativité restreinte, dont le tenseur de courbure est nul (voir alinéa suivant). Dans ce cas, en décomposant un circuit donné en somme de petits circuits, comme indiqué ci-dessus, le transport parallèle redonne le vecteur du départ quel que soit le circuit. Cette propriété est vraie d'une manière approchée, tant que l'aire du circuit est inférieure à l'aire caractéristique correspondant aux composantes du tenseur de courbure.

Le plan affine, comme tout espace affine sur un espace vectoriel est bien sur plat. Ainsi, le sens que nous donnons à l'adjectif "plat" est bien le même que le sens commun. Le plan usuel évoqué par la surface d'un lac sans vent est bien plat ! En effet, en coordonnées rectilignes dans un espace affine, d'après (9,13) tous les symboles de CHRISTOFFEL sont nuls et (11,14) donne $R^i_{jkl} = 0$. Toutes

les composantes du tenseur de courbure sont nulles dans une base, et ce tenseur est donc nul. Le transport parallèle correspond à garder le même vecteur de l'espace vectoriel associé à l'espace affine, et sur un circuit fermé, on retrouve donc évidemment le même vecteur !

Nous établirons la réciproque, à savoir que toute variété riemannienne sur laquelle le tenseur de courbure est partout nul est un espace affine sur un espace vectoriel au § 13. Ceci à part des problèmes de connexité que nous n'étudierons pas ici et qui pourraient empêcher l'espace d'avoir globalement cette structure ; comme pour le cône par exemple, qui est bien plat, pouvant être déplié et étendu sur une surface plane sans modification de l'élément de longueur, donc sans déformation de la surface, mais dont le point sommet pose problème.

Insistons bien à ce propos sur le fait que, du point de vue de la géométrie interne, il n'y a pas de différence de structure entre une partie de cône et une partie de plan, parce que le tenseur de courbure est également nul. Ceci se traduit par la possibilité de déplier le cône et de le plaquer sur le plan.

Pourquoi cela ? Parce que la transformation envisagée ne modifie pas les distances et ne déforme donc pas la surface. C'est une isométrie. Une telle isométrie est possible parce que le cône et le plan ont le même élément linéaire. Cela signifie qu'il est possible de trouver des coordonnées sur le cône, et des coordonnées sur le plan, telles que la formule (11,8) soit la même pour le cône et le plan. Il suffit alors, pour construire l'isométrie, d'associer les points ayant les mêmes coordonnées sur le cône et sur le plan avec ces systèmes de coordonnées.

Par contre, on sait qu'il est impossible de plaquer un morceau de pelure d'orange ayant une certaine dimension sur le plan. La pelure se fendille en plusieurs endroits. Ceci parce que le tenseur de courbure n'est pas nul pour l'orange. Il est impossible de trouver des coordonnées sur l'orange et dans le plan donnant la même formule pour l'élément linéaire.

Toutes les propriétés géométriques que nous étudions ici, comme la distance de deux points, ou le tenseur de courbure, sont ainsi construites à partir de l'élément linéaire. Cet élément linéaire caractérise donc toutes les propriétés géométriques intrinsèques de la variété.

C'est GAUSS qui envisagea le premier qu'il existait des propriétés géométriques intrinsèques des surfaces, étudiables sans avoir à considérer ces surfaces dans l'espace à trois dimensions, et ceci uniquement par l'expression de l'élément linéaire.

Cette idée apparaît en effet pour la première fois dans la publication de GAUSS en 1827 : "Disquisitiones generales circa superficies curvas" ; GAUSS distingue alors pour la première fois les propriétés internes de la surface, c'est à dire la géométrie ressentie par des êtres vivant sur cette surface, des propriétés externes

caractérisant comment la surface est immergée dans un espace de plus grande dimension. GAUSS se rend alors compte que les propriétés internes sont complètement caractérisées par la distance ou intervalle de deux points voisins. GAUSS raisonne alors uniquement sur les espaces à 2 dimensions, c'est à dire les surfaces. La généralisation de cela aux espaces à plus de 2 dimensions revient à RIEMANN en 1854.

9. Transport parallèle d'une forme linéaire et d'un tenseur quelconque le long d'une courbe fermée. - La propriété précédente : le transport parallèle sur une courbe fermée redonne l'objet du départ lorsque le tenseur de courbure est nul, est vraie pour les forme linéaires et les tenseurs, quand elle est vraie pour les vecteurs.

Cela se voit d'après la définition de leur transport parallèle du § 6. Ainsi les indices 1 et 2 se référant au point de départ M_1 et au point d'arrivée M_2 avec $M_1 = M_2$:

$$\varphi_2(M) (\mathbf{V}_2(M)) = \varphi_1(M) (\mathbf{V}_1(M)) \text{ (transport parallèle de } \varphi) = \varphi_1(M) (\mathbf{V}_2(M))$$

(transport parallèle de \mathbf{V} redonne $\mathbf{V} \Rightarrow \mathbf{V}_2(M) = \mathbf{V}_1(M)$); cette égalité étant vraie quel que soit \mathbf{V} , on a $\varphi_2(M) = \varphi_1(M)$, et le transport parallèle de φ redonne φ .

Puis, pour un tenseur T :

$$\begin{aligned} T_2(M) (\varphi_2(M), \psi_2(M), \mathbf{V}_2(M)) &= T_1(M) (\varphi_1(M), \psi_1(M), \mathbf{V}_1(M)) \\ &= T_1(M) (\varphi_2(M), \psi_2(M), \mathbf{V}_2(M)) \Rightarrow T_2(M) = T_1(M) \end{aligned}$$

Dans toute la suite, jusqu'au § 13 nous supposons le tenseur de courbure nul ou négligeable dans le domaine considéré.

10. Champ de vecteurs obtenu par transport parallèle d'un vecteur.

- Puisque le tenseur de courbure est considéré comme nul, la variation d'un vecteur par transport parallèle sur un circuit fermé est nulle. Dans ce cas nous allons montrer que le transport parallèle d'un point à un autre ne dépend pas du chemin suivi. Appelons $\Delta_{A \rightarrow B}^C V^i$ la variation des composantes de \mathbf{V} par transport parallèle de A à B le long du circuit C . Pour une transformation infinitésimale :

$$dV_{M \rightarrow M'}^i = -V^j \Gamma_{jk}^i du^k = +V^j \Gamma_{jk}^i (-du^k) = -dV_{M' \rightarrow M}^i$$

$$\begin{aligned} \text{Par intégration :} \quad \Delta_{A \rightarrow B}^C V^i &= -\Delta_{B \rightarrow A}^C V^i \\ \Delta_{A \rightarrow B}^{C_1} V^i + \Delta_{B \rightarrow A}^{C_2} V^i &= 0 \quad (\text{circuit total } C_1 \cup C_2 \text{ fermé}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Delta_{A \rightarrow B}^{C_1} V^i - \Delta_{A \rightarrow B}^{C_2} V^i = 0 \quad (\text{propriété ci-dessus})$$

$$\text{soit :} \quad \Delta_{A \rightarrow B}^{C_1} V^i = \Delta_{A \rightarrow B}^{C_2} V^i$$

Ainsi, on obtient la même valeur pour un vecteur par transport parallèle de A à B quel que soit le chemin suivi. Le raisonnement est le même avec des formes linéaires et des tenseurs, pour passer d'une variation nulle sur un circuit fermé à une variation indépendante du chemin suivi pour un circuit non fermé.

11. Vecteur libre sur la variété. - Définissons une relation R entre deux vecteurs $\mathbf{V}(A)$ et $\mathbf{W}(B)$ en deux points différents A et B si $\mathbf{W}(B)$ est obtenu par transport parallèle du vecteur $\mathbf{V}(A)$ de A à B . Cette relation est réflexive, symétrique et transitive. Les classes d'équivalences sont les champs de vecteurs obtenus par transport parallèle d'un vecteur unique à travers tout le domaine considéré. La relation R est compatible avec la combinaison linéaire de deux vecteurs d'après la propriété du § 5. On peut transporter cette opération sur les classes. L'ensemble des classes, c'est à dire l'ensemble des champs de vecteurs obtenu par transport parallèle est ainsi muni d'une structure d'espace vectoriel. Le transport parallèle respectant le produit scalaire, cet espace vectoriel est muni de ce produit scalaire qui en fait un espace euclidien ou pseudo-euclidien suivant les cas.

On appelle une classe d'équivalence un *vecteur libre*. Les vecteurs tangents en un point à la variété sont appelés *vecteurs liés*.

Regardons ce qui se passe en ce qui concerne les formes linéaires. On peut définir une relation d'équivalence du même type pour elles. Deux formes sont équivalentes si elles se déduisent l'une de l'autre par transport parallèle. La relation est stable pour la combinaison linéaire. Toutes les formes d'un tel champ (classe d'équivalence) prennent la même valeur pour tous les vecteurs liés représentant un même vecteur libre. On peut dire que c'est la valeur de ces formes pour ce vecteur libre. Appelant φ la forme libre, \mathbf{V} le vecteur libre, tandis que les indices 1 et 2 se réfèrent aux formes et vecteurs liés aux points M_1 et M_2 , on a :

$$\varphi(\mathbf{V}) = \varphi_2(\mathbf{V}_2) = \varphi_1(\mathbf{V}_1)$$

On a la valeur prise par l'ensemble des formes (forme libre) pour le vecteur libre. Une forme libre est donc une forme linéaire sur l'espace des vecteurs libre, et réciproquement.

Ce raisonnement peut maintenant être recopié pour tout tenseur. Un ensemble de tenseurs reliés, que l'on appelle un tenseur libre (la combinaison linéaire étant stable pour cette relation), c'est à dire donnant la même valeur pour des formes

linéaires et des vecteurs reliés, c'est à dire obtenu par transport parallèle d'un tenseur lié, est un tenseur du même type construit sur l'espace des vecteurs libre et son dual. Résumons nous : un champ de tenseurs obtenus par transport parallèle est un tenseur sur l'espace des vecteurs libres et son dual du même type. On l'appelle *tenseur libre*.

Il nous reste maintenant à montrer que la variété a une structure d'espace affine sur l'espace vectoriel des vecteurs libres, localement si le tenseur de courbure n'est pas nul, globalement sur toute la variété, si le tenseur de courbure est partout nul.

12. Coordonnées associées à une base de vecteurs libres. - Nous noterons \mathbf{V} un vecteur libre, $\mathbf{V}(M)$ sont représentant, vecteur lié en M . Etant donnée une base de vecteurs libres $\{\mathbf{e}_i\}$, existe-t-il des coordonnées x^i telles que :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i(M) &= \frac{\partial}{\partial x^i}(M) \quad \Leftrightarrow \quad e^{*i}(M) = dx^{*i}(M) \\ \Leftrightarrow \quad \forall d\vec{M} ; e^{*i}(M)(d\vec{M}) &= [e^{*i}(M)]_j du^{*j}(M)(d\vec{M}) \\ &= [e^{*i}(M)]_j du^j = dx^{*i}(M)(d\vec{M}) = dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^j}(M) du^j \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{\partial x^i}{\partial u^j}(M) = [e^{*i}(M)]_j \end{aligned} \quad (11, 15)$$

Le champ de formes $e^{*i}(M)$ étant obtenu par transport parallèle, on peut appliquer (9,28) avec $d\varphi = 0$, et $\varphi(M) = e^{*i}(M)$. Avec un changement d'indices muets, il vient :

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^k \partial u^j} = \frac{\partial [e^{*i}(M)]_j}{\partial u^k} = [e^{*i}(M)]_l \Gamma_{jk}^l = [e^{*i}(M)]_l \Gamma_{kj}^l = \frac{\partial [e^{*i}(M)]_k}{\partial u^j} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^j \partial u^k}$$

La relation ci-dessus assure la compatibilité du système différentiel et l'existence des coordonnées x^i , exprimées ici en fonction des u^1, \dots, u^n , et appelées *coordonnées rectilignes*; cette dénomination étant justifiée par ce qui va suivre.

13. Structure d'espace affine de la variété. - Dans le système de coordonnées rectilignes x^i , on a :

$$de_j(M) = \Gamma_{jk}^i \mathbf{e}_i(M) dx^k = 0$$

En effet, les vecteurs $\mathbf{e}_j(M)$ sont transportés parallèlement à eux même. On en déduit : $\Gamma_{jk}^i = 0$.

Ainsi, les symboles de CHRISTOFFEL exprimés en coordonnées x^i sont nuls. Ceci est également vrai avec d'autre coordonnées rectilignes $x^{\bar{i}}$. On en déduit,

d'après la formule de transformation :

$$0 = \Gamma_{\bar{j}\bar{k}}^{\bar{i}} = 0 + \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{\bar{j}} \partial x^{\bar{k}}} \frac{\partial x^{\bar{i}}}{\partial x^i} \Rightarrow \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{\bar{j}} \partial x^{\bar{k}}} = 0$$

Les coordonnées rectilignes sont donc des fonction linéaires les unes des autres. Cela est évident puisque les dérivées partielles $\frac{\partial x^i}{\partial x^{\bar{i}}}$ permettent de passer par combinaison linéaire de la base de vecteurs libres $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ à la base $\{\frac{\partial}{\partial x^{\bar{i}}}\}$. Ceci est réalisé par passage d'une relation entre vecteurs liés, vraie en tout point M par transport parallèle de tous les vecteurs, à la même relation entre vecteurs libres (cf § 5 de ce chapitre). Ces dérivées sont donc des constantes indépendantes de M .

En coordonnées rectilignes, l'équation des géodésiques s'écrit :

$$\frac{d^2 x^i}{d\lambda^2} = 0 ; \quad \text{soit} \quad x^i = a^i + \lambda(b^i - a^i) \quad (11, 16)$$

Ceci pour une géodésique passant par le point A de coordonnées (a^i) et le point B de coordonnées (b^i) .

On peut alors associer aux deux points A et B le vecteur libre :

$$(b^i - a^i) \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (11, 17)$$

Dans un autre système de coordonnées rectilignes, on associerait :

$$\begin{aligned} (b^{\bar{i}} - a^{\bar{i}}) \frac{\partial}{\partial x^{\bar{i}}} &= \left[\left(b^{\bar{i}} \frac{\partial x^{\bar{i}}}{\partial x^i} + c^i \right) - \left(a^{\bar{i}} \frac{\partial x^{\bar{i}}}{\partial x^i} + c^i \right) \right] \frac{\partial x^j}{\partial x^{\bar{i}}} \frac{\partial}{\partial x^j} \\ &= (b^i - a^i) \frac{\partial x^{\bar{i}}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{\bar{i}}} \frac{\partial}{\partial x^j} = (b^i - a^i) \frac{\partial}{\partial x^i} \end{aligned}$$

On associe bien ainsi aux deux points A et B un vecteur unique ne dépendant pas du système de coordonnées que l'on appelle \overrightarrow{AB} . Il est clair que les axiomes des espaces affines sont vérifiés. Pour $a^{\bar{i}} - a^i$ petit, on voit que l'on associe le vecteur libre dont le représentant en A est le vecteur $d\vec{A} = \overrightarrow{AA'}$ tangent à la variété définit quand on a construit l'espace vectoriel tangent. Enfin l'équation des géodésiques s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{AB} \quad (11, 18)$$

C'est bien l'équation d'une droite dans un espace affine.

Ainsi dans toute la variété si le tenseur de courbure est nul, ou dans une région suffisamment petite s'il n'est pas nul, toute variété riemannienne, a la structure d'un espace affine sur un espace vectoriel euclidien ou pseudo-euclidien.

À partir de coordonnées rectilignes, on peut obtenir des coordonnées rectilignes types, les résultats du § 1 chapitre 10 à ce sujet s'appliquant localement. On a alors avec ces coordonnées $g_{ij} = \eta_{ij} = \pm\delta^i_j$. $\mathfrak{g} = \eta = \pm 1$ suivant le nombre de -1 et de 1, qui constitue la signature de la métrique. Localement la propriété du § 11 du chapitre 10 correspondant à l'équation (10,17) est vérifiée, et $\mathfrak{g} = \det g_{ij}$ a un signe indépendant des coordonnées choisies.

La propriété locale de structure d'espace affine pour une variété permet par exemple d'avoir un procédé simple de tracé des géodésiques sur les surfaces euclidiennes, comme celles plongées dans notre espace à trois dimensions.

Dans le plan euclidien, deux roues solidaires et soudées à un arbre perpendiculaire à elles sont obligées de tourner à la même vitesse; elles décrivent deux droites parallèles (fig. 11.3).

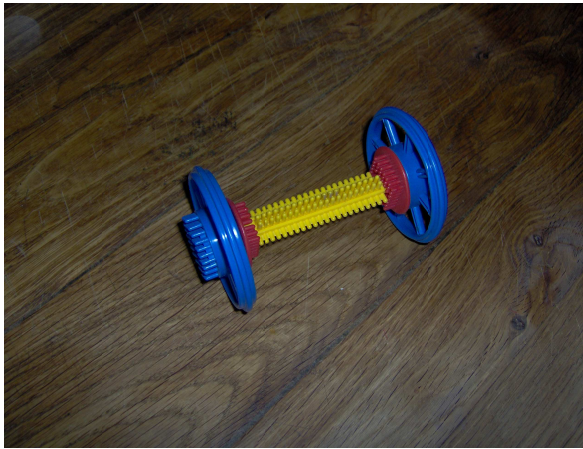


Fig. 11.3

Toute variété à deux dimensions euclidienne étant localement identifiée au plan euclidien, un moyen de tracer une géodésique sur une telle surface est de faire rouler un tel dispositif. La courbe obtenue est localement une droite affine au voisinage de chacun de ses points. Elle vérifie donc partout l'équation (11,10) et est donc globalement une géodésique.

14. Utilisation des formules dans une variété différentiable riemannienne quelconque. - Nous avons vu à la fin du paragraphe précédent que nous pouvons utiliser les résultats des chapitres 9 et 10 dans une variété riemannienne quelconque. Voyons cela de plus près :

D'une manière générale, une variété riemannienne ayant localement la structure d'espace affine sur un espace vectoriel euclidien ou pseudo-euclidien, toutes les formules locales des chapitres 9 et 10 s'appliquent sur une variété riemannienne quelconque. Il en est ainsi par exemple de (5,41). En ce qui concerne un résultat global, il faudra examiner si le tenseur de courbure intervient, ceci distinguant le

cas des variétés plates, espaces affines, des variétés *courbes* (tenseur de courbure non nul).

15. Propriétés algébriques du tenseur de courbure. - Commençons par examiner quelles sont les composantes du tenseur de courbure dans un système de coordonnées rectilignes. Dans un tel système, les symboles de CHRISTOFFEL sont nuls et :

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} \quad (11, 19)$$

$$\text{avec : } \Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{ih} (g_{jh,k} + g_{hk,j} - g_{jk,h})$$

En coordonnées rectilignes, $g^{ik}_{,l} = 0$.

$$R^i_{jkl} = \frac{1}{2} g^{ih} (g_{jh,kl} + g_{hk,jl} - g_{jk,hl} - g_{jh,lk} - g_{hl,jk} + g_{jl,hk}) \quad (11, 20)$$

$$\text{or : } g_{jh,kl} = \frac{\partial^2 g_{jh}}{\partial x^l \partial x^k} = \frac{\partial^2 g_{jh}}{\partial x^k \partial x^l} = g_{jh,lk} \quad (11, 21)$$

$$R^i_{jkl} = \frac{1}{2} g^{ih} (-g_{hl,jk} + g_{hk,jl} - g_{jk,hl} + g_{jl,hk}) \quad (11, 22)$$

$$R_{ijkl} = g_{i\lambda} R^\lambda_{jkl} \quad \Rightarrow$$

$$R_{ijkl} = \frac{1}{2} (-g_{il,jk} + g_{ik,jl} - g_{jk,il} + g_{jl,ik}) \quad (11, 23)$$

Le tenseur métrique est symétrique. De plus on peut intervertir deux dérivées successives (cf équation (11,21)). Compte tenu de ces deux propriétés, il est aisé de vérifier, sur la forme précédente du tenseur de courbure les propriétés algébriques suivantes :

$$(A) \quad \text{Symétrie} \quad : \quad R_{ijkl} = R_{klij} \quad (11, 24)$$

$$(B) \quad \text{Antisymétrie} \quad : \quad R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk} = R_{jilk} \quad (11, 25)$$

$$(C) \quad \text{Cyclicité} \quad : \quad R_{ijkl} + R_{iljk} + R_{iklj} = 0 \quad (11, 26)$$

Les équations précédentes sont des égalités entre tenseurs vraies dans un système de coordonnées. Elles sont donc vraies dans tout système de coordonnée.

On défini le *tenseur de Ricci* par :

$$R_{jl} = g^{ik} R_{ijkl} \quad (11, 27)$$

$$(A) \quad \Rightarrow \quad R_{jl} = R_{lj} \quad (11, 28)$$

$$R_{jl} = g^{ik} R_{ijkl} = g^{ik} g_{i\lambda} R^\lambda_{jkl} = \delta^k_\lambda R^\lambda_{jkl} = R^\lambda_{j\lambda l}$$

$$R_{jl} = R^\lambda_{j\lambda l} \quad (11, 29)$$

(B) implique que le tenseur de RICCI est le seul tenseur du second ordre qui peut être formé par contraction à partir du tenseur de courbure car, en multipliant les équations (B) par g^{ik} , on obtient :

$$R_{jl} = -g^{ik} R_{jikl} = -g^{ik} R_{ijlk} = g^{ik} R_{jilk} \quad (11, 30)$$

De plus (B) implique que :

$$g^{ij} R_{ijkl} = -g^{ij} R_{jikl} = -g^{ji} R_{jikl} = 0 \quad (11, 31)$$

Car les indices i et j sont muets ; de même :

$$g^{kl} R_{ijkl} = -g^{kl} R_{ijlk} = -g^{lk} R_{ijlk} = 0 \quad (11, 32)$$

Les indices i, j, k, l dans l'expression (11,23) du tenseur de courbure étant numérotés 1, 2, 3, 4, la contraction peut porter sur les couples : (1,2) ; (1,3) ; (1,4) ; (2,3) ; (2,4) ; (3,4). (11,27) correspond à (1,3) ; (11,30) à (2,3) ; (1,4) ; (2,4). (11,31) implique que (1,2) donne 0. (11,32) implique que (3,4) donne 0. Toutes les contractions possibles ont bien ainsi été envisagées, et elles aboutissent toutes, au signe près au seul tenseur de RICCI comme tenseur non nul.

Il n'y a alors qu'une façon de contracter le tenseur de RICCI pour obtenir un scalaire R , qu'on appelle la *courbure scalaire*.

$$R = g^{ij} R_{ij} = R^j_j = R_i^i \quad (11, 33)$$

$$\text{et : } R^j_j = g_{ji} R^{ji} = g_{ij} R^{ij}$$

Ainsi, on a également :

$$R = g_{ij} R^{ij} \quad (11, 34)$$

On a enfin, directement à partir du tenseur de courbure :

$$R = g^{jl} g^{ik} R_{ijkl} \quad (11, 35)$$

16. Nombre de composantes indépendantes du tenseur de courbure.

- L'espace étant de dimension n , appelons ce nombre de composantes C_n . Nous allons utiliser la notation de PETROV :

$$R_{ijkl} = R_{I,J} \quad (11, 36)$$

I et J étant des indices repérant les couples (i,j) et (k,l). Ainsi, à chaque valeur de l'indice I correspond un couple (i,j), de même, pour J .

(B) implique que chacun des indices I et J prend un nombre de valeurs indépendantes égal au nombre d'éléments d'une matrice antisymétrique d'ordre n , soit : $1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) = \frac{1}{2}n(n - 1)$.

(A) implique que $R_{I,J}$ est symétrique en ces indices. Le nombre de composantes indépendantes est donc égal au nombre de composantes indépendantes d'une matrice symétrique d'ordre $\mathcal{N} = \frac{1}{2}n(n-1)$, soit :

$$\frac{\mathcal{N}(\mathcal{N}-1)}{2} + \mathcal{N} = \frac{\mathcal{N}(\mathcal{N}+1)}{2}$$

\mathcal{N} étant le nombre de valeurs pour la diagonale, le premier terme étant le même que pour une matrice antisymétrique. On obtient :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}n(n-1) \right) \left(\frac{1}{2}n(n-1) + 1 \right) = \frac{1}{8}n(n-1)(n^2 - n + 2)$$

Les équations (A) et (B) rendent la somme de l'équation (C) complètement antisymétrique, de sorte que l'égalité (C) introduit :

$\frac{1}{4!}n(n-1)(n-2)(n-3)$ relations. En effet, les indices doivent être tous différents, d'où n choix pour le premier, $n-1$ pour le second, etc ; puis, toute permutation (et il y en a $4!$) redonne une équation qui n'apporte rien de nouveau à cause de l'antisymétrie.

$$C_n = \frac{1}{8}n(n-1)(n^2 - n + 2) - \frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)$$

$$C_n = \frac{1}{12}n^2(n^2 - 1) \quad (11, 37)$$

(B) et (C) impliquent qu'en dimension 1 le tenseur de courbure s'annule. Il peut paraître surprenant qu'une ligne courbe ait un tenseur de courbure nul, mais cela montre simplement que le tenseur de courbure reflète les propriétés internes de l'espace, et non pas la manière dont il est immergé dans un espace de dimensions supérieures. Dans un espace de dimension 2, on voit que le tenseur de courbure a une seule composante indépendante qui peut être prise égale à R_{1212} . R la courbure scalaire, est donc fonction de R_{1212} . En inversant cette fonction, on voit que toutes les composantes du tenseur de courbure sont fonction de cette seule courbure scalaire. Elle décrit donc complètement la courbure d'une surface (espace de dimension 2). Dans le cas de la Relativité générale où $n = 4$, nous aurons $C_n = 20$ composantes indépendantes.

17. L'identité de BIANCHI. - Dans un système de coordonnées rectilignes, nous avons :

$$R_{ijkl;m} = R_{ijkl,m} = \frac{1}{2} (-g_{il,jkm} + g_{ik,jlm} - g_{jk,ilm} + g_{jl,ikm}) ;$$

en permutant cycliquement k , l et m , il est facile de voir avec l'expression précédente que :

$$R_{ijkl;m} + R_{ijlm;k} + R_{ijmk;l} = 0 \quad (11, 38)$$

C'est *l'identité de Bianchi*. C'est une équation tensorielle, donc vraie dans tout système de coordonnées.

L'identité de BIANCHI pour la connexion correspondant à l'interaction électromagnétique est l'équation (5,76) (voir (12,6)) :

$$F_{ij;k} + F_{jk;i} + F_{ki;j} = 0 \quad (11, 39)$$

18. Le tenseur d'EINSTEIN. - Effectuons une première fois la multiplication contractée de l'identité de BIANCHI par le tenseur métrique ; dans un système de coordonnées rectilignes, on obtient :

$$g^{ik} (R_{ijkl,m} + R_{ijlm,k} + R_{ijmk,l}) = 0$$

or $g^{ik}{}_{,m} = g^{ik}{}_{,l} = g^{ik}{}_{,k} = 0$ (ssk). Il vient :

$$\frac{\partial}{\partial x^m} (g^{ik} R_{ijkl}) + \frac{\partial}{\partial x^k} (g^{ik} R_{ijlm}) + \frac{\partial}{\partial x^l} (g^{ik} R_{ijmk}) = 0$$

Compte tenu de (11,29) :

$$\begin{aligned} R_{jl,m} + R^k{}_{jlm,k} - R_{jm,l} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x^m} (g^{jl} R_{jl}) + \frac{\partial}{\partial x^k} (g^{jl} R^k{}_{jlm}) - \frac{\partial}{\partial x^l} (g^{jl} R_{jm}) &= 0 \\ R_{,m} - R^k{}_{m,k} - R^l{}_{m,l} &= 0 \end{aligned}$$

En effet, compte tenu de (11,29) :

$$\begin{aligned} g^{jl} R^k{}_{jlm} &= g^{jl} g^{ki} R_{ijlm} = -g^{ki} R_{im} = -R^k{}_m \\ (2R^k{}_m - \delta^k{}_m R)_{,k} &= 0 \end{aligned}$$

Puis, en faisant la multiplication contractée par g^{jm} :

$$(2R^{kj} - g^{kj} R)_{,k} = 0$$

$$\text{Nous posons : } G^{ij} = R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} R \quad (11, 40)$$

Le tenseur G est appelé le *tenseur d'Einstein* et $G^{ij}{}_{,j} = 0$.

Il n'y aura jamais de confusion possible avec la constante de la gravitation universelle qui sera donc notée également G .

Encore une fois, puisque nous sommes dans un système de coordonnées rectilignes, la dérivation covariante est identique à la dérivation ordinaire, ce qu'on peut écrire : “, = ;”. Il vient :

$$G^{ij}{}_{;j} = 0 \quad (11, 41)$$

Cette égalité tensorielle vraie dans un système de coordonnées est alors vraie dans tout système de coordonnées. Le tenseur d'EINSTEIN a une divergence nulle.

D'une manière générale, soit une égalité du type $Q^i_{j;i} = 0$; dans un système de coordonnées rectilignes, on obtient $Q^i_{j,i} = 0$, puis puisque dans ce système de coordonnées, les dérivées partielles du tenseur métrique sont nulles $\frac{\partial}{\partial x^i}(g^{kj}Q^i_j) = 0$; soit $Q^{ik}_{,i} = 0$; soit $Q^{ik}_{;i} = 0$. Ceci étant finalement vrai, en tant qu'égalité tensorielle dans tout système de coordonnées. On peut résumer cela en disant que puisque la dérivée covariante du tenseur métrique est nulle, on peut intervertir la multiplication contractée par le tenseur métrique, et l'opération de dérivation covariante.

19. Déviation des géodésiques. - Dans un espace non euclidien ou non pseudo-euclidien, c'est à dire quand le tenseur de courbure de la variété n'est pas nul, l'axiome des parallèles d'EUCLIDE n'est plus vérifié. Par un point extérieur à une droite (géodésique), soit on peut mener plusieurs parallèles à cette droite (espace à courbure négative), soit aucune (espace à courbure positive). Le tenseur de courbure caractérisant l'écart à un espace euclidien ou pseudo-euclidien doit donc également caractériser le comportement de deux géodésiques voisines. Si ces deux géodésiques sont parallèles en deux points voisins (vecteurs tangents parallèles), ce qui correspond à une distance stationnaire, elles ne doivent pas le rester lorsqu'on les parcourt, la dérivée seconde de la distance doit donc être non nulle. Il suffit de prendre deux grands cercles voisins sur une sphère pour visualiser ce comportement.

Considérons donc deux géodésiques voisines paramétrées par le même nombre τ (ce sera le temps propre en relativité). Ces géodésiques ont pour équations paramétriques : $u^i(\tau)$ et $u^i(\tau) + \delta u^i(\tau)$.

Les équations sont :

$$0 = \frac{d^2 u^i}{d\tau^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{du^j}{d\tau} \frac{du^k}{d\tau}$$

$$0 = \frac{d^2}{d\tau^2} (u^i + \delta u^i) + \Gamma^i_{jk} (u^l + \delta u^l) \frac{d}{d\tau} (u^j + \delta u^j) \frac{d}{d\tau} (u^k + \delta u^k)$$

Evaluons la différence entre ces deux équations au premier ordre en δu^i :

$$0 = \frac{d^2 \delta u^i}{d\tau^2} + \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial u^l} \delta u^l \frac{du^j}{d\tau} \frac{du^k}{d\tau} + 2\Gamma^i_{jk} \frac{du^j}{d\tau} \frac{d\delta u^k}{d\tau} \quad (11, 42)$$

Evaluons cette différence avec la dérivée covariante du vecteur séparation (δu^i) entre les deux géodésiques (équation (9,24)).

$$\frac{D(\delta u^i)}{D\tau} = \frac{d}{d\tau} \delta u^i + \Gamma^i_{jk} \delta u^j \frac{du^k}{d\tau}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{D}{D\tau} \left(\frac{D(\delta u^i)}{D\tau} \right) = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{D(\delta u^i)}{D\tau} \right) + \Gamma_{jk}^i \frac{D(\delta u^j)}{D\tau} \frac{du^k}{d\tau} \\
& = \frac{d^2 \delta u^i}{d\tau^2} \Gamma_{jk}^i \frac{d\delta u^j}{d\tau} \frac{du^k}{d\tau} + \Gamma_{jk}^i \delta u^j \left(-\Gamma_{lm}^k \frac{du^l}{d\tau} \frac{du^m}{d\tau} \right) + \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial u^l} \delta u^j \frac{du^k}{d\tau} \frac{du^l}{d\tau} \\
& \quad + \Gamma_{jk}^i \frac{du^k}{d\tau} \frac{d\delta u^j}{d\tau} + \Gamma_{jk}^i \Gamma_{lm}^j \frac{du^k}{d\tau} \delta u^l \frac{du^m}{d\tau}
\end{aligned}$$

Remplaçons $\frac{d^2 \delta u^i}{d\tau^2}$ par sa valeur (équation (11,42)), le terme contenant le symbole de CHRISTOFFEL avec le coefficient 2 annule deux termes ; en changeant certains indices muets, on obtient :

$$\frac{D^2}{D\tau^2} (\delta u^i) = R^i_{jkl} \delta u^k \frac{du^j}{d\tau} \frac{du^l}{d\tau} \quad (11, 42)$$

C'est l'équation de *déviations des géodésiques*. Cette équation exprimera en Relativité générale, comment deux particules voisines évoluent l'une par rapport à l'autre dans un champ de gravitation. Elle consiste donc en ce que nous appelons une loi dynamique. Cette loi exprime l'effet de l'interaction, ici la gravitation, en fonction du tenseur de courbure de la connexion. Elle est tout à fait équivalente à la loi correspondante de l'électromagnétisme faisant intervenir le tenseur de courbure de l'électromagnétisme (équation (5,4)), qui peut s'écrire :

$$\Phi^\alpha = m \frac{D^2(\overline{OM})^\alpha}{D\tau^2} = q F^\alpha_\beta \frac{D(\overline{OM})^\beta}{D\tau^2}$$

soit :

$$\frac{D^2(\overline{OM})^\alpha}{D\tau^2} = \frac{q}{m} F^\alpha_\beta \frac{du^\beta}{d\tau} \quad (11, 43)$$

En gravitation, il faut considérer deux points voisins, car pour une particule libre seule, sa trajectoire est une droite dans un référentiel en chute libre dans lequel tout effet gravitationnel disparaît. On peut dire que seuls les effets de marées ont un sens absolu. Par contre, pour l'électromagnétisme, et dans un référentiel galiléen, l'effet de l'interaction est parfaitement caractérisé par l'action sur un point unique.

20. Courbure de la sphère. - φ étant la latitude et θ la longitude, nous avons, a étant le rayon de la sphère :

$$ds^2 = a^2 d\varphi^2 + a^2 \cos^2 \varphi d\theta^2$$

$$\text{ainsi : } \quad g_{ij} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \cos^2 \varphi \end{pmatrix}$$

Il est aisé de calculer les symboles de CHRISTOFFEL à partir du tenseur métrique ; les seuls coefficients non nuls sont :

$$\Gamma_{\theta\theta}^{\varphi} = \sin \varphi \cos \varphi \quad ; \quad \Gamma_{\theta\varphi}^{\theta} = \Gamma_{\varphi\theta}^{\theta} = -\tan \varphi$$

On obtient ensuite : $R^{\varphi}_{\theta\varphi\theta} = -\cos^2 \varphi$ puis, en descendant l'indice φ à l'aide du tenseur métrique : $R_{\varphi\theta\varphi\theta} = -a^2 \cos^2 \varphi$.

Les autres composantes du tenseur de courbure se déduisent par des considérations de symétrie de la composante précédente, ou sont nulles. Nous avons vu en effet au §16 que dans le cas où $n = 2$, il existe une seule composante indépendante pour le tenseur de courbure : R_{1212} .

En contractant avec le tenseur métrique, on trouve pour le tenseur de RICCI :

$$R_{\varphi\varphi} = -1 \quad ; \quad R_{\varphi\theta} = R_{\theta\varphi} = 0 \quad ; \quad R_{\theta\theta} = -\cos^2 \varphi$$

Puis en contractant de nouveau :

$$R = -\frac{2}{a^2} \tag{11, 44}$$

La courbure scalaire est donc constante et proportionnelle à l'inverse du carré du rayon. Le coefficient 2 et le signe n'ont pas de signification importante. On a l'habitude de dire pour des raisons historiques que la sphère est un espace à courbure positive. La *courbure* \mathcal{R} sera donc prise égale à l'opposé de la courbure scalaire, et :

$$\mathcal{R} = +\frac{2}{a^2} \tag{11, 44}$$

21. Exemple de surface à courbure constante et négative. - Dans le plan, la *Tractrice* est par définition, la courbe dont la tangente coupe l'axe des x à la distance T constante du point de contact. On appelle λ l'abscisse curviligne orienté positivement dans le sens où la tractrice se rapproche de l'axe des x (fig. 11.4 et fig. 11.5).

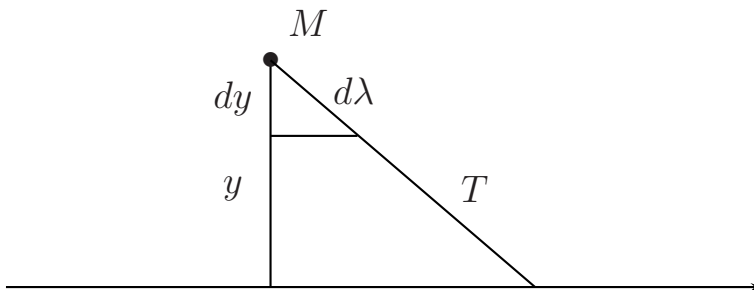


Fig. 11.4

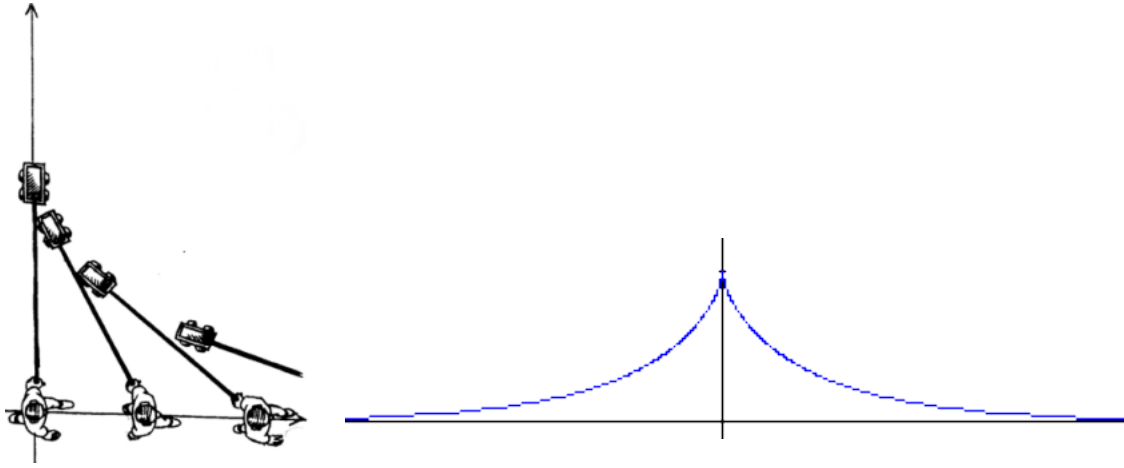


Fig. 11.5

On a :

$$\frac{d\lambda}{dy} = -\frac{T}{y} \quad ; \quad \frac{dy}{y} = -\frac{d\lambda}{T} \quad ; \quad y = Cte e^{-\frac{\lambda}{T}}$$

Prenons pour origine de l'abscisse curviligne λ le point où la tangente est verticale, par conséquent le point où $T = y$.

$$\text{On a :} \quad y = T e^{-\frac{\lambda}{T}}$$

Cette courbe s'appelle la *Tractrice*, car comme le montre l'image de gauche de la figure 11.5, on peut l'obtenir en tirant un objet.

Considérons maintenant la surface de révolution obtenue en faisant tourner la tractrice autour de l'axe des x (fig. 11.6).

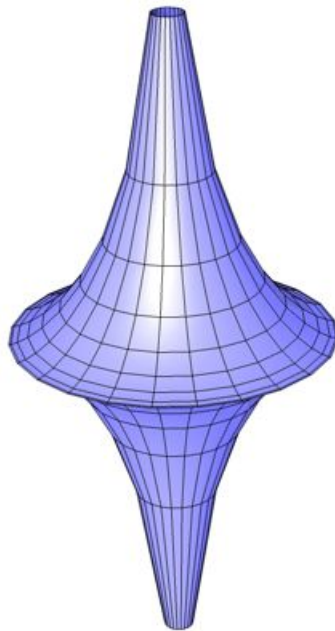


Fig. 11.6

Nous allons voir qu'elle est l'équivalent de la sphère mais à courbure \mathcal{R} négative, T jouant le rôle de a rayon de la sphère.

On a visiblement : $ds^2 = d\lambda^2 + y^2 d\theta^2$

$$ds^2 = d\lambda^2 + T^2 e^{-2\frac{\lambda}{T}} d\theta^2$$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T^2 e^{-2\frac{\lambda}{T}} \end{pmatrix}$$

Les seuls coefficients de CHRISTOFFEL non nuls sont :

$$\Gamma_{\theta\theta}^\lambda = T e^{-2\frac{\lambda}{T}} \quad ; \quad \Gamma_{\lambda\theta}^\theta = \Gamma_{\theta\lambda}^\theta = -\frac{1}{T}$$

$$R^\lambda_{\theta\lambda\theta} = e^{-2\frac{\lambda}{T}} \quad \text{puis :} \quad R_{\lambda\theta\lambda\theta} = e^{-2\frac{\lambda}{T}}$$

$$R_{\lambda\lambda} = \frac{1}{T^2} \quad ; \quad R_{\lambda\theta} = R_{\theta\lambda} = 0 \quad ; \quad R_{\theta\theta} = e^{-2\frac{\lambda}{T}}$$

$$R = \frac{2}{T^2} = Cte \quad ; \quad \mathcal{R} = -\frac{2}{T^2} \quad (11, 46)$$

22. Formule de STOKES. - L'intégrale de la divergence d'un champ de vecteur dans un domaine \mathcal{D} d'une variété est égale à l'intégrale sur le bord du domaine noté $\partial\mathcal{D}$ du flux de ce champ de vecteur. Démontrons d'abord cette formule au moyen d'une suite d'intégrales simples ; puis dans le paragraphe suivant, nous donnerons l'interprétation mentionnée ci-dessus. Cette formule sera très utile pour tout ce qui concerne les lois de conservation en Relativité générale.

Cette formule sera ainsi utilisée aux § 13 du chapitre 13, au § 7 du chapitre 15 et également au § 13 du chapitre 15.

Nous supposons que le déterminant du tenseur métrique est négatif, comme en Relativité générale (voir § 2 du chapitre 12).

$$\int_{\mathcal{D}} \text{div} \mathbf{V} \, d\mathbf{v} = \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\sqrt{-\mathbf{g}}} (V^i \sqrt{-\mathbf{g}})_{,i} \sqrt{-\mathbf{g}} \, du^1 \dots du^n = \int_{\mathcal{D}} (V^i \sqrt{-\mathbf{g}})_{,i} \, du^1 \dots du^n$$

On a une somme de n termes correspondant chacun à une valeur de l'indice i . Pour chacun de ces termes, effectuons l'intégration au moyen du théorème de FUBINI :

$$\sum_i \int du^1 \dots \int du^{i-1} \int du^{i+1} \dots \int du^n \int_{u_1^i}^{u_2^i} \underbrace{\frac{\partial}{\partial u^i} (V^i \sqrt{-\mathbf{g}})}_{\text{sans sommation sur } i} \, du^i$$

$$\sum_i \int du^1 \dots \int du^{i-1} \int du^{i+1} \dots \int du^n [V^i \sqrt{-\mathbf{g}}]_{u_1^i}^{u_2^i}$$

Utilisons la notation suivante :

$$du^1 \dots du^{i-1} du^{i+1} \dots du^n = du^1 \dots du^{\hat{1}} \dots du^n$$

Le chapeau sur le i veut dire que l'élément correspondant à cet indice est supprimé.

$$= \sum_i \int_{\partial\mathcal{D}} V^i \sqrt{-\mathbf{g}} du^1 \dots du^{\hat{1}} \dots du^n$$

$\partial\mathcal{D}$ signifie le bord du domaine \mathcal{D} . Ainsi le bord d'une boule est sa surface, une sphère. $u^1, \dots, u^{\hat{1}}, \dots, u^n$ étant fixés, le bord $\partial\mathcal{D}$ est composé de deux points, celui avec $u^i = u_2^i$, et celui avec $u^i = u_1^i$ (fig. 11.7).

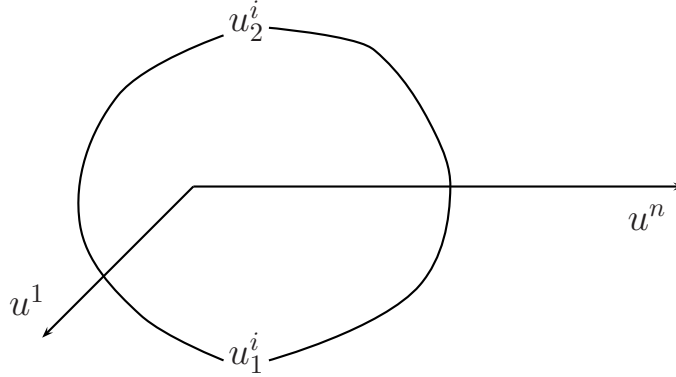


Fig. 11.7

$\int_{\partial\mathcal{D}}$ fait donc bien intervenir les deux termes correspondant à ces deux points :

$$V^i(u_2^i) \sqrt{-\mathbf{g}(u_2^i)} \quad \text{et} \quad -V^i(u_1^i) \sqrt{-\mathbf{g}(u_1^i)}$$

Les signes + et - correspondent à l'orientation de ce bord compte tenu de l'ordre des variables u^1, \dots, u^n .

$$\int_{\mathcal{D}} \text{div} \mathbf{V} d\mathbf{v} = \sum_i \int_{\partial\mathcal{D}} V^i \sqrt{-\mathbf{g}} du^1 \dots du^{\hat{1}} \dots du^n \quad (11, 47)$$

Cette formule constitue la *formule générale de Stokes*. À partir de cette formule, on peut retrouver toutes les formules usuelles de l'analyse vectorielle établissant une relation entre une intégrale sur un domaine d'une variété, et une intégrale sur le bord de ce domaine.

23. Interprétation de la formule de Stokes en terme de flux du champ de vecteur. - La formule de STOKES est vraie avec des coordonnées curvilignes quelconques. Pour l'interpréter, nous pouvons utiliser des coordonnées à notre convenance. Supposons donc que l'équation du bord $\partial\mathcal{D}$ soit : $u^1 = 0$. Supposons d'autre part que la coordonnée u^1 soit choisie de telle manière qu'une

petite variation de cette coordonnée à partir de la valeur 0 correspondant à un point de $\partial\mathcal{D}$ donne toujours un déplacement perpendiculaire à $\partial\mathcal{D}$. Cette coordonnée est enfin supposée normalisée, c'est à dire que :

$$\frac{\|\overrightarrow{MM'}\|}{|\Delta u^1|} = 1$$

Le point M correspond à la valeur $u^1 = 0$ et le point M' à $u^1 = \Delta u^1$, les autres coordonnées gardant la même valeur.

Si il intervient $\int du^1$ dans $\int_{\partial\mathcal{D}}$, on obtient 0 car $u^1 = Cte$ sur le bord de $\partial\mathcal{D}$. Dans le deuxième membre de la formule de STOKES il reste donc uniquement :

$$I = \int_{\mathcal{D}} \text{div}\mathbf{V} d\mathbf{v} = \int_{\mathcal{D}} V^1 \sqrt{-\mathbf{g}} du^2 \dots du^n$$

D'autre part :

$$d\mathbf{v} = \sqrt{-\mathbf{g}} du^1 du^2 \dots du^n = dS du^1$$

Puisque du^1 correspond à la longueur ou pseudo-longueur effective perpendiculairement au bord $\partial\mathcal{D}$, et d'après notre définition des éléments de volume. Nous appellerons $d\mathbf{v}$ élément de volume bien que le nombre de dimension soit n , et dS élément de surface (bien que le nombre de dimensions soit $n - 1$. Donc :

$$dS = \sqrt{-\mathbf{g}} du^2 \dots du^n$$

Vérifions cette formule. Avec notre système de coordonnées :

$$ds^2 = \pm(du^1)^2 + g_{ij}^{\partial\mathcal{D}} du^i du^j \quad (\text{avec } i \text{ et } j \neq 1)$$

Cette forme particulière de l'élément linéaire traduit l'orthogonalité du vecteur $\frac{\partial}{\partial u^1}$ au bord $\partial\mathcal{D}$, tous les autres vecteurs de base étant dans ce bord, et le fait que ce vecteur soit normalisé. Ceci s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial u^1} \bullet \frac{\partial}{\partial u^1} = \pm \delta^1_i$$

$g_{ij}^{\partial\mathcal{D}}$ est donc le tenseur métrique sur le bord $\partial\mathcal{D}$.

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{g_{ij}^{\partial\mathcal{D}}} \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Et on a bien :

$$dS = \sqrt{\mp \mathbf{g}^{\partial \mathcal{D}}} du^2 \dots du^n = \sqrt{-\mathbf{g}} du^2 \dots du^n$$

Puisque les deux déterminants sont égaux au signe près, comme on le voit en développant g suivant la première ligne ou la première colonne.

D'autre part :

$$\mathbf{V} = V^i \frac{\partial}{\partial u^i} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V} \bullet \frac{\partial}{\partial u^1} = \pm V^1$$

En orientant dS judicieusement, c'est à dire avec (nous notons en caractère gras le d et le S car nous n'avons pas la différentielle d'un vecteur S) :

$$d\mathbf{S} = \pm \frac{\partial}{\partial u^1} dS$$

on arrive bien à :

$$V^1 dS = \pm \mathbf{V} \bullet \frac{\partial}{\partial u^1} dS = \mathbf{V} \bullet d\mathbf{S}$$

Et la formule de STOKES s'écrit :

$$\int_{\mathcal{D}} \text{div} \mathbf{V} d\mathbf{v} = \int_{\partial \mathcal{D}} \mathbf{V} \bullet d\mathbf{S} \quad (11, 48)$$

Le deuxième membre s'interprétant bien comme le flux du vecteur \mathbf{V} à travers le bord de \mathcal{D} . Cette formule écrite d'une manière covariante, et vraie dans un système de coordonnées, est alors vraie dans tout système de coordonnées.

EXERCICES

11.1

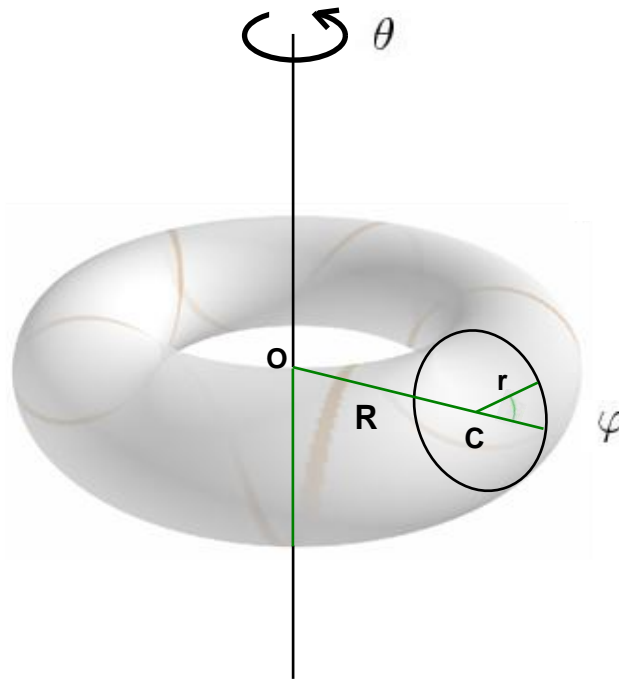
On étudie les géodésiques de la sphère.

1. Écrire l'équation de déviation des géodésiques faisant intervenir $R^\varphi_{\theta\varphi\theta}$. On ne considère qu'une déviation correspondant à $\delta\varphi$, se modifiant par variation de θ seul à l'endroit où la déviation est maximale.

2. Interprétez ce résultat.

11.2

On considère (voir figure) un tore obtenu en faisant tourner un cercle de rayon r autour d'un point fixe O situé à la distance R du centre C du cercle.



Un point sur le cercle est repéré par les angles polaires θ et φ .

1. Calculez l'élément linéaire en fonction de θ et φ .
2. Calculez les symboles de CHRISTOFFEL non nuls.
3. En déduire la courbure scalaire du tore.
4. Conclusions ?

11.3

Dans cet exercice, on veut réaliser complètement le programme du § 12 sur le cas des coordonnées polaires r et θ du plan affine.

1. Partant du point $A : \begin{pmatrix} r = 1 \\ \theta = 0 \end{pmatrix}$, transportez parallèlement à elle-même

la base :

$$\mathbf{e}_r(A) = \frac{\partial}{\partial r}(A) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{e}_\theta(A) = \frac{\partial}{\partial \theta}(A) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

au point $P = \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}$. On obtient ainsi le champ de vecteurs correspondant aux

vecteurs libres \mathbf{e}_x et \mathbf{e}_y , avec : $\mathbf{e}_x = (\mathbf{e}_x)^r(M) \frac{\partial}{\partial r}(M) + (\mathbf{e}_x)^\theta(M) \frac{\partial}{\partial \theta}(M)$, idem pour \mathbf{e}_y .

2. Vérifiez qu'il y a conservation du produit scalaire de ces deux vecteurs par transport parallèle. (on peut d'ailleurs également faire cette vérification au premier ordre dans l'exercice (12.6)).

3. Trouvez de même, par transport parallèle, les composantes dans la base mobile $dr^*(M)$ et $d\theta^*(M)$ des formes e^{*x} et e^{*y}

4. En déduire, grâce à la formule (11,15) les expressions des coordonnées rectilignes x et y en fonction de r et θ .

11.4

Démontrez, pour le champ de vecteurs $\mathbf{W}(M)$ la formule (voir figure) :

$$\int_{\partial S} \mathbf{W} d\mathbf{l} = \int \int_S \mathbf{rot} \mathbf{W} d\sigma$$

à partir de (11,48).

