

Chapitre Douze

LOI DYNAMIQUE EN RELATIVITÉ GÉNÉRALE

1. Introduction. - Grâce à l'intermède des trois chapitres précédents, nous sommes maintenant en possession de toutes les mathématiques nécessaires pour développer complètement la Théorie de la relativité générale.

Dans ce chapitre, nous allons effectuer complètement le programme décrit au §4 du chapitre 7. **Il s'agit de savoir quelles sont les lois physiques en présence d'un champ de gravitation.** En particulier, quelle est la trajectoire d'une particule soumise uniquement à la gravitation, et plus généralement, quelle est la trajectoire d'une particule soumise également à d'autres interactions que la gravitation. Nous regroupons cela sous le terme de *loi dynamique* (§14, chapitre 7) dont l'expression est $\mathbf{F} = m\vec{\gamma}$ en Mécanique newtonienne. Nous effectuons ce programme en utilisant le principe d'équivalence décrit au §1 du chapitre 7, et sa forme mathématique, le principe de covariance généralisée décrit au §4 du même chapitre.

2. L'espace-temps une variété différentiable riemannienne. - Nous supposons tout d'abord que l'espace-temps est une variété différentiable, c'est à dire qu'il est toujours possible de repérer les évènements dans un domaine par une coordonnée de temps et trois coordonnées d'espace. Cela est toujours possible dans un petit domaine en choisissant un référentiel galiléen, c'est à dire en chute libre et ne tournant pas par rapport aux galaxies lointaines. Les coordonnées sont alors celles utilisées en Relativité restreinte : les coordonnées galiléennes types.

Dans un tel référentiel, à deux évènements voisins, on peut associer l'intervalle :

$$ds^2 = C^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (12, 1)$$

Nous sommes assurés que ce nombre ne dépend que des deux évènements car dans tout autre référentiel galiléen, on trouverait par le même procédé le même nombre (cf §3 du chapitre 7). Ce nombre constitue l'élément linéaire permettant de considérer l'espace-temps comme une variété riemannienne.

Avec des coordonnées quelconques $u^{\bar{\beta}}$, les x^α étant fonctions de ces coordonnées, on a :

$$dx^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^{\bar{\beta}}} du^{\bar{\beta}}$$

et

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^{\bar{\alpha}}} \frac{\partial x^\beta}{\partial u^{\bar{\beta}}} du^{\bar{\alpha}} du^{\bar{\beta}}$$

$$ds^2 = g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} du^{\bar{\alpha}} du^{\bar{\beta}} \quad (12, 2)$$

On a bien la formule générale (11,8) pour une variété différentiable riemannienne, et les $g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$ ont bien la loi de transformation (9,20) dans le cas d'un tenseur deux fois covariant.

Dans le référentiel galiléen, la Relativité restreinte s'applique. L'espace-temps a donc ainsi localement une structure d'espace affine sur un espace vectoriel pseudo-euclidien.

D'autre part, l'espace-temps est une variété différentiable; grâce à ce qui a été fait au chapitre précédent, localement autour d'un point de l'espace-temps, nous avons alors des coordonnées rectilignes, et l'espace-temps est identifié de nouveau, mais d'une manière purement mathématique cette fois, à un espace affine sur un espace vectoriel pseudo-euclidien.

Le problème est d'identifier ces deux structures obtenues par deux méthodes différentes, une méthode mathématique et une méthode physique : l'utilisation pour faire les mesures d'un référentiel en chute libre. Ceci revient à identifier les coordonnées rectilignes locales trouvées grâce à la méthode mathématique du chapitre précédent, et les coordonnées galiléennes qui sont des coordonnées rectilignes de l'espace-temps local de la Relativité restreinte.

Les géodésiques de l'espace-temps de la Relativité générale sont définies avec l'équation des géodésiques (11,10) faisant intervenir les symboles de CHRISTOFFEL définis par (11,11) avec le tenseur métrique et ses dérivées. Dans un référentiel galiléen, en coordonnées galiléennes, c'est à dire rectilignes au sens de l'espace-temps de la Relativité restreinte, les symboles de CHRISTOFFEL qui s'expriment par la même formule (10,5) sont nuls. Or le tenseur métrique défini par le ds^2 avec les équation (10,2) et (11,8) est le même partout dans les deux cas : espace-temps de la Relativité restreinte local et espace-temps global de la Relativité générale. Il en est donc ainsi des symboles de CHRISTOFFEL, et les symboles de CHRISTOFFEL de la variété de la Relativité générale sont nuls avec ces coordonnées galiléennes.

En utilisant ces coordonnées, cela assure que les traces locales des géodésiques de l'espace-temps sont les droites de l'espace-temps plat local construit à

partir des référentiels galiléens locaux. Or ces traces locales sont également les droites de l'espace plat auquel on a identifié la variété localement au moyen de la méthode mathématique. Ceci prouve que les droites obtenues mathématiquement sont les mêmes que les droites obtenues physiquement. Les coordonnées galiléennes, donc obtenues à partir d'un référentiel en chute libre, sont donc également les coordonnées rectilignes locales de la variété espace-temps de la Relativité générale. La structure affine de l'espace-temps de la Relativité restreinte est donc identifiée à la structure affine locale de la variété, trouvée mathématiquement.

Les deux espaces vectoriels, celui des vecteurs libres et celui de l'espace de MINKOWSKI sont alors identiques dans la zone de validité des coordonnées rectilignes. En effet, un vecteur libre est finalement, compte tenu de la constance des composantes par transport parallèle en coordonnées rectilignes, et compte tenu de (11,3), la donnée d'un ensemble de nombres dans un système de coordonnées rectilignes, muni de la loi de transformation (11,2) où les $\frac{\partial u^i}{\partial v^j}$ sont des constantes compte tenu de ce qui est dit au § 13 du chapitre 11. Ceci est totalement identique à la définition des quadrivecteurs par (3,15) avec $\Lambda^\alpha_{\bar{\beta}} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\bar{\beta}}}$ compte tenu de (3,12).

En ce qui concerne les quadrivecteurs déplacement, considérons les deux événements \mathcal{A} et \mathcal{B} de coordonnées a^α et b^β ; le quadrivecteur associé en Relativité restreinte par (3,14) est identique au vecteur libre associé par (11,17) compte tenu de (11,3).

Nous avons vu au § 2 du chapitre 7 qu'il n'y a pas de référentiels galiléens globaux en présence de champs de gravitation créés par des masses. Cela est dû au fait que des ascenseurs en chute libre en différents endroits ne sont plus en mouvement de translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres; ce qui était une des propriétés de base demandées aux référentiels galiléens pour la construction de la Relativité restreinte. Il est alors impossible de construire la structure d'espace affine sur un espace vectoriel de MINKOWSKI globalement sur tout l'espace-temps. Cela veut dire que cette structure, qui existe localement devient peu à peu fautive lorsqu'on considère un domaine trop vaste de l'espace-temps. Nous avons vu au chapitre précédent que cela est la caractéristique du fait que le tenseur de courbure est non nul sur la variété différentiable. Ainsi, nous en arrivons à la conclusion que des masses doivent créer une courbure de l'espace-temps par leur action gravitationnelle. Cette courbure est caractérisée par le tenseur de courbure.

Nous pouvons déjà en déduire que la création d'un champ de gravitation par une masse devra se manifester mathématiquement par une équation reliant la présence de la masse, avec la valeur du tenseur de courbure dans le repère étudié

de l'espace-temps. Ce sera la loi de force, étudiée au chapitre suivant.

3. Trajectoire d'une particule libre. - Nous appelons particule libre, une particule qui n'est soumise qu'au champ de gravitation. Dans un référentiel galiléen, la Relativité restreinte s'applique, la gravité s'évanouissant et la particule considérée décrit une droite de l'espace-temps. Traduisons cette propriété en termes mathématiques. Dans une région suffisamment petite pour que la variété y soit considérée comme plate, la particule décrit une droite, donc un morceau de géodésique. Ceci se reproduisant localement tout le long de la trajectoire, il est clair que cette trajectoire dans son ensemble est une géodésique de la variété.

Ainsi les particules libres décrivent les géodésiques de l'espace-temps. Il est clair que pour obtenir ce résultat, nous avons utilisé le principe d'équivalence permettant de trouver un référentiel où la gravité est annulée.

D'ailleurs, le principe d'équivalence est utilisé pour construire la structure de variété différentiable en introduisant l'élément linéaire par l'intermédiaire des référentiels galiléens (§ 2 chapitre 7 et § 3 chapitre 7), donc pour construire les géodésiques.

Nous pourrions considérer en Relativité générale la lumière comme constituée de particules libres, les photons animés de la vitesse C , et suivant donc d'après ce qui vient d'être dit des géodésiques de l'espace-temps. Ce sont les géodésiques d'intervalle lumière : $ds^2 = 0$ pour deux évènements voisins sur la géodésique. La description ondulatoire de la lumière est également cohérente avec la Relativité générale. Nous utiliserons cette description au paragraphe 21.

4. Trajectoire d'une particule en interaction. - Utilisons maintenant la forme mathématique du principe d'équivalence, c'est à dire le principe de covariance généralisé. Dans un référentiel galiléen l'équation du mouvement s'écrit :

$$\Phi^\alpha = \frac{dp^\alpha}{d\tau} = m \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = m \frac{D^2(\overrightarrow{OM})^\alpha}{D\tau^2} \quad (12, 3)$$

La dernière égalité venant du fait qu'avec les coordonnées utilisées, localement, les symboles de CHRISTOFFEL sont nuls. L'équation (12,3) s'écrit avec les coordonnées particulières choisies, sous la forme générale :

$$\Phi^\alpha = m \frac{D^2(\overrightarrow{OM})^\alpha}{D\tau^2} = m \frac{d^2 u^\alpha}{d\tau^2} + m \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{du^\beta}{d\tau} \frac{du^\gamma}{d\tau} \quad (12, 4)$$

Les composantes Φ^α sont les composantes du quadrivecteur force dans le système de coordonnées curvilignes u^α . L'équation précédente est covariante ; elle est vraie dans un référentiel galiléen ou la Relativité restreinte s'applique, les symboles de CHRISTOFFEL y devenant nuls. Elle est donc toujours vraie, d'après le principe de covariance généralisé.

Le dernier terme peut s'écrire $-\Phi_g^\alpha$, Φ_g^α pouvant s'interpréter suivant les circonstances (et d'une manière arbitraire) comme une force de gravité ou d'inertie.

$$\Phi_g^\alpha = -m\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{du^\beta}{d\tau} \frac{du^\gamma}{d\tau} \quad (12, 5)$$

La possibilité d'une telle interprétation au choix, assure l'égalité de la masse inerte et de la *masse gravitationnelle passive* (sensibilité à un champ de gravitation correspondant à l'équation (12,5)); cette égalité est la conséquence directe du principe d'équivalence.

La formule (12,5) permettra ainsi de retrouver aussi bien la force d'attraction universelle $\mathbf{F} = -\mathbf{grad} \phi$, comme cela est fait au § 15 de ce chapitre, que la force de CORIOLIS par exemple : cela est fait au § 7 de ce chapitre avec les équations (12,16) qui peuvent être obtenues en faisant intervenir les forces d'inerties centrifuges et de CORIOLIS.

Les forces d'inertie et de gravitation sont bien ainsi **unifiées** dans le même formalisme, ce qui prouve que les forces d'inertie sont **réelles** et d'origine gravitationnelle, en accord avec le principe de MACH. La Relativité générale est donc la théorie exprimant la relativité générale (valable dans tous les cas) de l'inertie et de la gravitation.

Pour trouver la force classique qui n'existe que dans un référentiel galiléen (on peut cependant toujours considéré le référentiel galiléen immobile par rapport au corps étudié à l'instant considéré), il faut trouver l'expression du quadrivecteur force correspondant à l'équation (12,4) et passer à la force dans le référentiel galiléen choisi grâce à la formule (4,15). Nous verrons l'utilisation de cela aux paragraphes 15, 16, 18, 19 de ce chapitre.

L'action d'un champ gravitationnel sur un corps étendu sera évaluée en considérant ce corps comme l'ensemble des particules élémentaires le constituant. Chaque particule élémentaire obéira alors à l'équation (12,4), $\vec{\Phi}$ étant la force appliquée par les autres particules (ou champs), et par le moyen des autres interactions que la gravitation, sur la particule étudiée.

D'une manière générale, les équations de la physique en présence d'un champ de gravitation s'obtiendront en utilisant le principe de covariance généralisée. Prenons l'exemple de l'électromagnétisme. Pour écrire les équations de MAXWELL en présence d'un champ de gravitation, il nous suffit de trouver les équations généralement covariantes redonnant (5,76) et (5,77). Ces équations sont :

$$F_{\alpha\beta;\gamma} + F_{\beta\gamma;\alpha} + F_{\gamma\alpha;\beta} = 0 \quad (12, 6)$$

$$F^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = -\mu_0 j^\alpha \quad (12, 7)$$

D'autre part nous pouvons démontrer ici la formule (12,8) :

$$F^{\alpha\beta}{}_{;\alpha\beta} = 0 \quad (12, 8)$$

Dans un référentiel galiléen, nous avons en effet :

$$\frac{\partial^2 F^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = -\frac{\partial^2 F^{\beta\alpha}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = -\frac{\partial^2 F^{\beta\alpha}}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} = -\frac{\partial^2 F^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = 0$$

Le scalaire $F^{\alpha\beta}{}_{;\alpha\beta}$ nul dans un référentiel galiléen est bien sur toujours nul. La formule (12,8) sera utilisée au § 9 du chapitre 13.

5. Propriétés du tenseur d'impulsion-énergie dans un espace courbe ou règne un champ de gravitation. - Ces propriétés découlent de celles trouvées au chapitre 8 et du principe de covariance généralisé.

Tout d'abord, le tenseur d'impulsion-énergie est symétrique. L'égalité :

$$T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha} \quad (12, 9)$$

est en effet une égalité entre tenseurs, donc est covariante. Elle est vrai dans un référentiel galiléen où les symboles de CHRISTOFFEL sont nuls. Elle est donc toujours vraie d'après le principe de covariance généralisé.

D'autre part, dans un référentiel galiléen, nous avons également : $\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0$, ce qui est équivalent, dans ce référentiel où les symboles de CHRISTOFFEL sont nuls à :

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0 \quad (12, 10)$$

Cette dernière égalité est covariante ; à cause du principe de covariance généralisé, elle est donc toujours vraie. Nous arrivons bien ainsi à la propriété mentionnée au § 20 du chapitre 8.

Dans un référentiel quelconque où les symboles de CHRISTOFFEL ne sont pas nuls, il s'agit bien d'une égalité différente de $\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0$, et dans un référentiel quelconque, $\overline{T^{\alpha\beta}} \neq 0$.

Nous avons vu au § 5 et au § 22 du chapitre 8 que l'égalité $\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0$ venait de la conservation du quadrivecteur impulsion-énergie global lors des chocs entre les particules de matière et les particules virtuelles assurant l'interaction, et de la conservation de l'impulsion-énergie entre deux chocs.

On peut donc dire que l'égalité $T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$ traduit la conservation de l'impulsion-énergie globale par les interactions autre que la gravitation, le “ ; ” traduisant les échanges d'impulsion-énergie avec la gravitation, donc la modification de la trajectoire de ces particules par cette interaction.

En ce qui concerne le tenseur d'impulsion-énergie d'un fluide parfait, dans un référentiel galiléen, il prend la forme (8,22). Le tenseur :

$$T^{\alpha\beta} = (\rho C^2 + p) U^\alpha U^\beta - p g^{\alpha\beta} \quad (12, 11)$$

$g^{\alpha\beta}$ étant le tenseur métrique correspondant à (12,2) est bien un tenseur de par sa construction et prend la forme (8,22) dans un référentiel galiléen. Ce sera donc le tenseur d'impulsion-énergie d'un fluide parfait dans le cas le plus général.

6. Étude du disque tournant. - Nous avons vu que les forces d'inertie sont totalement équivalentes du point de vue de leur cause (action gravitationnelle des étoiles lointaines, principe de MACH) et de leur effet physique (principe d'équivalence) aux forces gravitationnelles. L'intérêt de l'étude du disque tournant est de pouvoir complètement développer les calculs de Relativité générale avec un champ de gravitation dû à l'inertie, tout en ayant ainsi la vérification du retour à la Relativité restreinte dans le référentiel d'inertie par rapport auquel le disque tourne.

Dans le référentiel d'inertie :

$$ds^2 = C^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Nous ne nous occupons que du plan du disque ($z = 0$), r et $\bar{\theta}$ étant la distance à l'origine et l'angle polaire :

$$ds^2 = C^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\bar{\theta}^2$$

Nous supposons que le disque tourne à la vitesse angulaire ω . Les points sur le disque sont maintenant repérés par t , r et : $\theta = \bar{\theta} - \omega t$. On obtient :

$$\begin{aligned} ds^2 &= C^2 dt^2 - dr^2 - r^2 (d\theta + \omega dt)^2 \\ ds^2 &= (C^2 - \omega^2 r^2) dt^2 - dr^2 - 2\omega r^2 dt d\theta - r^2 d\theta^2 \end{aligned} \quad (12, 12)$$

Pour un point immobile sur le disque à la distance r , nous avons :

$$ds^2 = (C^2 - \omega^2 r^2) dt^2$$

Nous supposons d'autre part, que pendant le court interval de temps entre les instants t et $t + dt$, une horloge étalon liée au disque fonctionne comme une horloge étalon qui se détache à l'instant t du disque pour suivre ensuite un mouvement rectiligne uniforme. Une telle supposition a déjà été faite au § 6 du chapitre 3. Elle correspond au fait que l'on suppose que seules les vitesses affectent localement l'écoulement du temps et non les accélérations.

L'horloge étalon qui se détache indique la durée $d\tau$ telle que : $ds^2 = C^2 d\tau^2$. Il vient donc, $d\tau$ étant également d'après ce qui précède la durée indiquée par une horloge solidaire du disque :

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}} dt, \text{ avec } v = \omega r \quad (12, 13)$$

Cette relation peut être intégrée pour un tour complet, et on retrouve le fait que les horloges sur le disque retardent par rapport à celles du référentiel d'inertie.

Entre deux rencontres d'une horloge sur le disque avec une horloge immobile, on a l'effet de retard donné par la Relativité restreinte et qui correspond au paradoxe des deux jumeaux.

L'élément linéaire possède un terme croisé en $dt d\theta$. Nous verrons (équation (12,29)) que cela correspond au fait que des événements voisins simultanés pour le disque n'ont pas la même coordonnée t .

7. Équation des géodésiques. - Écrivons le tenseur métrique :

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} C^2 - \omega^2 r^2 & 0 & -\omega r^2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -\omega r^2 & 0 & -r^2 \end{pmatrix} \quad (12, 14)$$

$g^{\alpha\beta}$ est la matrice inverse :

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{C^2} & 0 & -\frac{\omega}{C^2} \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{\omega}{C^2} & 0 & -\frac{1}{r^2} + \frac{\omega^2}{C^2} \end{pmatrix} \quad (12, 15)$$

Donnons l'exemple du calcul d'un symbole de CHRISTOFFEL :

$$\begin{aligned} \Gamma_{tr}^t &= \frac{1}{2} g^{tt} \left(\frac{\partial g_{tt}}{\partial r} \right) + \frac{1}{2} g^{t\theta} \left(\frac{\partial g_{\theta t}}{\partial r} \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{C^2} (-2\omega^2 r) + \frac{1}{2} \left(-\frac{\omega}{C^2} \right) (-2\omega r) \\ &= -\frac{\omega^2 r}{C^2} + \frac{\omega^2 r}{C^2} = 0 \end{aligned}$$

Les seuls symboles non nuls sont :

$$\begin{array}{lll} \Gamma_{r\theta}^t = -\frac{\omega r}{C^2} & \Gamma_{tt}^r = -\omega^2 r & \Gamma_{t\theta}^r = \Gamma_{\theta t}^r = -\omega r \\ \Gamma_{\theta\theta}^r = -r & & \Gamma_{tr}^\theta = \Gamma_{rt}^\theta = \frac{\omega}{r} \\ \Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r} & & \end{array}$$

Les équations des géodésiques sont donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0 \\ \frac{d^2 r}{d\tau^2} - r \left(\frac{d\theta}{d\tau} + \omega \frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0 \\ \frac{d^2 \theta}{d\tau^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\tau} \left(\frac{d\theta}{d\tau} + \omega \frac{dt}{d\tau} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (12.16)$$

Dans le cas où l'on étudie le mouvement d'un rayon lumineux, le paramètre décrivant une géodésique ne peut plus être τ , mais sera noté p . Il restera alors à étudier la loi reliant t à p . Ici, on arrive au fait que t est proportionnel à p . Ce

traitement de la lumière en introduisant le paramètre p décrivant les géodésiques sera effectué dans l'exercice 12.1 et au § 8 du chapitre 16.

Ici, le temps t est naturellement une fonction linéaire du temps propre τ , donc sa dérivée seconde est nulle.

En effet nous savons que la solution dans l'espace fixe est un mouvement rectiligne uniforme de vitesse constante v ; et par intégration de (12,13) :

$$\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}} t \quad (12, 17)$$

Le mouvement le plus général s'écrit :

$$\begin{cases} x = a \\ y = vt \end{cases}$$

L'axe des y étant pris parallèle au mouvement, orienté dans son sens; a est une constante.

On a :

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{a^2 + v^2 t^2} \\ \theta &= \arctan \frac{vt}{a} - \omega t \end{aligned} \quad (12, 18)$$

Il est facile de vérifier que ces deux fonctions vérifient les équations des géodésiques. Nous laissons le lecteur effectuer le calcul.

8. Conclusion. - L'angle absolu par rapport au repère galiléen étant égal à $\bar{\theta} = \theta + \omega t$, on voit que les équations en r et t redonnent pour les vitesses faibles devant celle de la lumière ($dt = d\tau$) :

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 &= 0 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} &= 0 \end{aligned} \quad (12, 19)$$

Ce sont les équations d'une droite parcourue à vitesse constante en coordonnées polaires. Ces équations avaient été trouvées au § 12 du chapitre 9 avec également l'utilisation des symboles de CHRISTOFFEL, mais dans l'espace euclidien à deux dimensions.

Il faut cependant bien voir la différence de nature entre le calcul fait ici et celui fait en Mécanique classique avec l'utilisation des coordonnées polaires. En Mécanique classique, les équations précédentes en r et θ sont de pures équations de cinématiques. Il faut leur adjoindre la loi dynamique $\mathbf{F} = m\gamma$ qui donne $\gamma = 0$ pour une particule libre, de façon à obtenir effectivement une loi de mécanique.

Par contre, dans le calcul fait dans l'espace-temps à quatre dimensions, la loi dynamique est incorporée dans la loi géométrique qui affirme que les trajectoires sont des géodésiques. Le passage de l'espace à trois dimensions à l'espace-temps unifie donc la cinématique et la mécanique dans une seule loi dynamique.

De plus, cette loi dynamique implique que la présence d'une force gravitationnelle ou d'inertie, qui correspond au fait que la trajectoire de la particule libre n'est plus une ligne droite de l'espace parcourue à vitesse constante, est liée à une modification de l'expression de l'élément linéaire (équation (12,12)). Cette modification correspond au fait que l'immobilité correspondant à la constance des coordonnées u^i n'est pas l'immobilité permanente, c'est à dire pendant une certaine durée, dans un référentiel galiléen. Nous verrons qu'il correspond à cette modification des modifications géométriques ou *déformations* de l'espace-temps, à savoir des effets de ralentissement de l'écoulement du temps (équations (12,17) et (12,30)) et de contraction des longueurs (voir §17). En particulier l'espace à trois dimensions n'est plus euclidien. Ce que nous venons de dire précise ce qui a été fait aux § 4; 5; 8; 9 du chapitre 7.

Tous ces phénomènes donnant lieu à des mesures physiques : mouvement d'une particule, écoulement du temps et propriétés de l'espace, qui semblent au premier abord ne rien à voir l'un avec l'autre, sont ainsi unifiés. Telle est la caractéristique d'une théorie féconde : unifier des phénomènes à priori sans aucun rapport.

Tout ensemble de particules agissant gravitationnellement (par son tenseur d'impulsion-énergie) déforme donc l'espace-temps. Cette déformation est ici, seulement un effet de "perspective" dû à l'emploi de coordonnées non galiléennes. Dans l'exemple ci-dessus, l'espace-temps est en effet plat. Cette déformation est simplement causée par l'emploi des coordonnées : r, θ, t . Elle est due, comme nous l'avons déjà dit, au fait que la fixité définie par la constance des coordonnées r et θ n'est pas la fixité permanente dans un référentiel galiléen.

Lorsque cette déformation sera intrinsèque, elle se manifestera par la présence d'un tenseur de courbure non nul. Nous devons alors étudier quantitativement cette déformation en fonction de sa cause, le tenseur d'impulsion-énergie. Cela sera fait au chapitre suivant dans l'étude de la loi de force.

Cependant nous pouvons déjà voir ici le lien quantitatif entre une force gravitationnelle donnée et la déformation correspondante de l'espace-temps, indépendamment de la cause de cette déformation; ceci en imposant de retrouver dans le cas limite où la Mécanique classique s'applique, la loi $\mathbf{F} = m\gamma$; ce sera fait au § 15. Mais pour pouvoir effectuer cela, il nous faut auparavant étudier avec plus de précision ce que signifient les coordonnées u^α permettant de repérer les évènements dans l'espace-temps. En particulier, dans quelle mesure elles permettent de faire ressortir ce que nous appelons l'espace, l'espace physique à trois dimensions, dont l'existence s'écoule dans le temps. Cet examen est nécessaire

de façon à pouvoir relier les déductions que nous obtiendrons, exprimées avec les coordonnées u^α à des propriétés usuelles traduisibles en expériences concrètes.

9. Signification des coordonnées u^α . - Nous avons vu que dans l'espace-temps de la Relativité générale qui est une variété riemannienne, la forme la plus générale de l'élément linéaire est :

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta \quad (12, 20)$$

u^0 est une coordonnée permettant de repérer les évènements dans le temps et u^1, u^2, u^3 sont trois coordonnées permettant de repérer les évènements dans l'espace.

On peut visualiser intuitivement ces coordonnées de la manière suivante : on attache au système de coordonnées u^α un *fluide en mouvement*. Chaque point du fluide a un mouvement tel que ses coordonnées u^1, u^2, u^3 restent constantes. Les différentes valeurs de la coordonnée u^0 permettent alors de savoir à quel moment le point considéré du fluide en mouvement est examiné. C'est un tel fluide fictif attaché aux coordonnées u^α qui constituera un *référentiel* en Relativité générale.

On peut dire aussi que chaque point de ce fluide est une horloge emportée par ce mouvement. On a ainsi une infinité continue d'horloges en mouvement quelconque les unes par rapport aux autres. Chaque horloge est repérée par trois nombres invariables u^1, u^2, u^3 qui la caractérise. Elle est ensuite réglée de façon à indiquer le temps arbitraire u^0 . Il ne s'agit donc pas d'une horloge étalon, u^0 étant quelconque. On demande simplement que pour deux états d'une horloge donnée, u^0 est la valeur la plus grande pour l'état qui est le plus tardif.

Il va de soi qu'une telle représentation n'est valable dans le cas général que dans une région limitée de l'espace-temps. En effet deux horloges voisines peuvent se séparer puis se retrouver. Il est possible que à ce moment elle n'indiquent plus la même valeur de la coordonnée u^0 . Cela correspond au fait que dans un tel cas on a une carte valable uniquement dans une région limitée de la variété. L'essentiel est que la variété soit totalement recouverte par un ensemble de telles cartes.

10. Les durées. - Il nous faut déterminer le lien entre le temps réel qui s'écoule, indiqué par une horloge battant l'étalon de temps placée au point A considéré du fluide précédent et accompagnant le mouvement de ce fluide, et une horloge placée au même point et ayant le même mouvement mais réglée de façon à indiquer le temps u^0 .

Nous supposons toujours que l'horloge étalon accompagnant le fluide fonctionne de la même manière qu'une horloge étalon en chute libre, c'est à dire fixe dans un référentiel galiléen. Une telle horloge correspond à l'horloge se détachant

à l'instant t dans l'étude du disque tournant. Il faut bien sûr, que ces deux horloges étalons, celle accompagnant le fluide et celle qui est fixe dans le référentiel galiléen, soient immobiles l'une par rapport à l'autre à l'instant considéré.

Nous supposons donc, ce qui a déjà été rappelé dans l'étude du disque tournant, que les variations de l'écoulement du temps sont dues à la transformation de LORENTZ et elle seule localement.

Considérons deux évènements qui sont l'existence du point A considéré du fluide aux instants u^0 et $u^0 + du^0$. Pour ces deux évènements, on a $ds^2 = C^2 d\tau^2$. $d\tau$ est la durée écoulée indiquée en commun par les deux horloges étalons, celle accompagnant le fluide, et celle immobile par rapport à cette dernière à l'instant considéré et en chute libre. D'autre part $du^1 = du^2 = du^3 = 0$ pour ces deux évènements, et $ds^2 = g_{00}(du^0)^2$. Il vient donc :

$$d\tau = \frac{1}{C} \sqrt{g_{00}} du^0 \quad (12, 21)$$

Telle est la relation déterminant les temps réels (ou, comme on dit, le temps propre en un point de l'espace) en fonction de la coordonnée u^0 ; τ est le temps vécu par un objet ou un être accompagnant le fluide. Pour le disque tournant, nous retrouvons la formule : $d\tau = \frac{1}{C} \sqrt{C^2 - v^2} dt$, qui avait été établie par le même raisonnement effectué dans un cas particulier.

Les coordonnées du référentiel galiléen ci-dessus étant appelées x^α , nous avons :

$$dx^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^\beta} du^\beta \quad (12, 22)$$

Lorsque $du^j = 0$ pour $j = 1$ à 3 , nous avons également $dx^i = 0$ pour $i = 1$ à 3 . L'immobilité dans le référentiel galiléen choisi, définie par $dx^i = 0$, correspond en effet à l'immobilité dans le fluide définie par $du^j = 0$ à l'instant considéré.

Il vient :

$$\begin{aligned} ds^2 &= C^2 d\tau^2 = (dx^0)^2 = g_{00}(du^0)^2 \\ \Rightarrow dx^0 &= \sqrt{g_{00}} du^0 \end{aligned} \quad (12, 23)$$

Ces résultats s'écrivent :

$$\left(\frac{\partial x^0}{\partial u^0} \right)_{u^j = Cte} = \sqrt{g_{00}} \quad (12, 24)$$

$$\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^0} \right)_{u^j = Cte} = 0 \quad (12, 25)$$

11. L'espace. - L'espace est l'ensemble des évènements se produisant simultanément. L'espace, comme la simultanéité dépendra donc du référentiel considéré.

Pour définir un espace global dans une région étendue, il faudra être capable pour toute cette région de définir une simultanéité globale. Cela ne sera pas toujours possible quel que soit le référentiel utilisé.

On le voit déjà en reprenant l'exemple du disque rigide tournant qui constitue bien un référentiel en Relativité générale ; les coordonnées lui étant attachées étaient : t, r, θ .

Supposons en effet qu'une telle simultanéité globale existe sur le disque, et qu'à la distance r , N lampes soient uniformément réparties sur le pourtour du disque. On suppose que lorsqu'on va de la lampe n à la lampe $n + 1$, on se déplace dans le sens de la rotation du disque. La distance sur le disque entre deux lampes est $\frac{L}{N}$, avec :

$$L = \frac{2\pi r}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{C^2}}}$$

Les lampes sont supposées être toutes allumées en même temps au sens du disque tournant. Appelons alors t_n l'instant de l'allumage de la lampe n dans le référentiel fixe. Appliquons la transformation de LORENTZ :

$$C(t_{n+1} - t_n) = \sinh \varphi \frac{L}{N} + \cosh \varphi \times 0$$

avec n allant de 1 à N et : $t_{N+1} = t_1$, la $N + 1^{\text{em}}$ lampe étant en effet identique à la première ; φ est défini par : $\tanh \varphi = \frac{\omega r}{C}$. On suppose en effet que deux lampes consécutives sont suffisamment voisines pour que l'on puisse considérer qu'elles ont à peu près le même vecteur vitesse. Rappelons d'autre part que l'on suppose que seules les vitesses influencent l'écoulement du temps, et non les accélérations. En ajoutant toutes ces égalités, on obtient : $C(t_{N+1} - t_1) = 0 = N \sinh \varphi \frac{L}{N} = L \sinh \varphi$. On arrive donc à une contradiction.

Autrement dit, vu du référentiel fixe, la lampe $n + 1$ s'allume après la lampe n qui s'allume après la lampe $n - 1$ etc. Mais il est impossible de trouver une lampe qui s'allume la première, car cette lampe étant supposée trouvée, celle qui est située derrière doit s'allumer avant. Or pour un ensemble de N lampes s'allumant toutes à des instants différents, il devrait en exister une s'allumant la première !

Il n'existe donc pas de simultanéité globale sur le disque.

En conclusion nous devons nous contenter souvent, un référentiel étant donné, de considérer une simultanéité locale définissant un espace local. Cette simultanéité sera celle définie dans le référentiel galiléen ayant le même mouvement que le fluide référentiel à l'instant et à l'endroit considéré.

12. Les distances. - Considérons deux points A et B liés au fluide et voisins. En les considérant simultanément dans le référentiel lié au fluide, nous pourrions mesurer leur distance spatiale.

Cette simultanéité et la distance spatiale sont celles définies dans le référentiel galiléen immobile par rapport à eux à ce moment. En effet, si A et B sont suffisamment voisins, leur vitesse relative est négligeable, donc le référentiel galiléen peut être immobile par rapport à chacun d'eux. De plus, nous supposons toujours qu'il n'y a pas d'effet de modification des longueurs ni des temps dû aux accélérations ; par conséquent, puisque seul l'accélération et non la vitesse distingue le référentiel galiléen précédent des points du fluide, ce référentiel galiléen peut bien servir pour définir les simultanités et donc la distance entre A et B .

Appelons comme dans le paragraphe précédent x^α les coordonnées dans ce référentiel galiléen. Soit $d\sigma$ la distance spatiale entre A et B .

$$d\sigma^2 = \sum_{l=1,3} dx^l dx^l = \sum_{l=1,3} \frac{\partial x^l}{\partial u^i} \frac{\partial x^l}{\partial u^j} du^i du^j$$

En effet :
$$dx^l = \frac{\partial x^l}{\partial u^\beta} du^\beta = \underbrace{\frac{\partial x^l}{\partial u^0}}_0 du^0 + \frac{\partial x^l}{\partial u^j} du^j$$

avec (12,25).

$$d\sigma^2 = \gamma_{ij} du^i du^j \quad (12, 26)$$

$$g_{ij} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial u^j} \eta_{\alpha\beta} \quad (12, 27)$$

$$g_{ij} = - \sum_{l=1,3} \frac{\partial x^l}{\partial u^i} \frac{\partial x^l}{\partial u^j} + \frac{\partial x^0}{\partial u^i} \frac{\partial x^0}{\partial u^j}$$

$$\gamma_{ij} = -g_{ij} + \frac{\partial x^0}{\partial u^i} \frac{\partial x^0}{\partial u^j}$$

$$g_{i0} = \frac{\partial x^0}{\partial u^i} \frac{\partial x^0}{\partial u^0} - \sum_{l=1,3} \frac{\partial x^l}{\partial u^i} \frac{\partial x^l}{\partial u^0} = \frac{\partial x^0}{\partial u^i} \underbrace{\frac{\partial x^0}{\partial u^0}}_0 \sqrt{g_{00}}$$

$$\gamma_{ij} = -g_{ij} + \frac{g_{0i} g_{0j}}{g_{00}} \quad (12, 28)$$

Les relations (12,26) et (12,28) établissent un lien entre la métrique de l'espace et la métrique de l'espace-temps quadridimensionnel.

Il faut toutefois remarquer que les $g_{\alpha\beta}$ dépendent en général de u^0 . Il n'y a donc pas de sens à intégrer $d\sigma$. Une telle intégrale dépendrait de la simultanéité choisie qui dans la plupart des cas n'existerait même pas globalement. On peut toutefois intégrer $d\sigma$ le long d'une courbe ouverte en prenant en chaque point la simultanéité définie par le fluide, c'est à dire par les coordonnées u^α en ce point (voir paragraphe suivant). Attention cependant, si on revient au point de départ, on n'a pas en général le même temps u^0 à l'arrivée qu'au départ.

Par conséquent, en Relativité générale la notion de distances déterminées entre des corps perd en général tout sens. Elle n'existe que localement.

La distance peut cependant être définie dans des régions finies de l'espace quand les $g_{\alpha\beta}$ ne dépendent pas du temps. Cela entraîne que l'intégrale $\int d\sigma$ sur une courbe spatiale a un sens déterminé. Dans ce cas, il n'est en effet pas nécessaire de définir une simultanéité globale de façon à donner un sens à l'intégrale.

13. La simultanéité. - Passons à présent à l'expression de la simultanéité locale avec les coordonnées u^α . Cette simultanéité est définie dans le référentiel galiléen immobile par rapport au fluide lié aux coordonnées, à l'instant et à l'endroit considéré. Pour deux évènements simultanés, on a :

$$\begin{aligned} ds^2 &= -d\sigma^2 = g_{00}(du^0)^2 + g_{0i}du^0du^i + g_{i0}du^idu^0 + g_{ij}du^idu^j \\ &= g_{ij}du^idu^j - \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}}du^idu^j \quad (\text{grâce à (12,28)}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad g_{00}^2(du^0)^2 + g_{00}g_{0i}du^0du^i + g_{0i}g_{00}du^idu^0 + g_{0i}g_{0j}du^idu^j &= 0 \\ \text{soit : } g_{0\alpha}g_{0\beta} du^\alpha du^\beta &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Ce qui s'écrit : } (g_{0\alpha} du^\alpha) (g_{0\beta} du^\beta) = 0$$

Les indices étant muets, on arrive à la nullité d'un carré et $g_{0\alpha} du^\alpha = 0$ soit :

$$du^0 = -\frac{g_{0i}}{g_{00}}du^i \quad (12, 29)$$

On trouve ainsi la différence des valeurs du temps u^0 pour deux évènements simultanés ayant lieux en deux points infiniment voisins.

La relation précédente permet de synchroniser les horloges dans n'importe quel volume suffisamment petit de l'espace. On peut également synchroniser les horloges, c'est à dire déterminer la simultanéité d'évènements le long d'une ligne arbitraire ouverte, avec $\Delta u^0 = \int du^0$ le long de la ligne. Cela a été utilisé au paragraphe précédent.

En ce qui concerne l'existence d'une simultanéité globale correspondant au référentiel considéré, c'est à dire correspondant à la simultanéité locale, elle est équivalente à l'existence d'une simultanéité, déterminée par la différence des

temps u^0 entre deux points A et B , indépendante de la ligne choisie les reliant. Cela équivaut à $\oint du^0 = 0$ pour toute ligne fermée sur laquelle on procède à la synchronisation des horloge. Cette relation est assurée, dès que les g_{0i} sont nuls.

14. Champs gravitationnels stationnaires, champs gravitationnels constants. - Un champ gravitationnel sera dit *stationnaire* si les composantes du tenseur métrique ne dépendent pas de la coordonnée temporelle u^0 .

Nous verrons que tel est le cas du champ créé par un astre tournant à vitesse angulaire constante par exemple. Notons qu'un tel système n'est pas invariant par changement du sens du temps qui correspond à un changement du sens de rotation de l'astre.

Un champ gravitationnel *constant* est un champ stationnaire invariant par renversement du sens du temps. Nous voyons que cela élimine le cas d'un astre tournant par exemple. En fait, seul un astre isolé ne tournant pas peut créer un champ gravitationnel constant. Les champs gravitationnels constants sont des cas particuliers des champs stationnaires.

D'une manière générale, pour tous ces champs stationnaires, la coordonnée u^0 est appelée *temps d'univers* ou *temps universel*. Dans le cas des champs constants, l'invariance de la physique, donc du ds^2 par changement de sens du temps, donc par $u^0 \rightarrow -u^0$ implique que $g_{0i} = 0$. Il existe alors une simultanéité globale ; elle correspond à la même valeur de la coordonnée u^0 pour un ensemble d'évènements simultanés.

À chaque valeur de u^0 correspond alors **un espace existant à ce moment là**. Par contre, dans un champ stationnaire général, les g_{0i} étant non nuls, il n'y a pas en général de simultanéité globale correspondant au référentiel dans lequel le ds^2 est exprimé.

Pour les champs constants, la formule :

$$\Delta\tau = \frac{1}{C}\sqrt{g_{00}} \Delta u^0 \quad (12, 30)$$

obtenue par intégration de la formule (12,21), g_{00} variant d'un point à un autre, nous montre alors que :

L'intervalle de temps propre entre deux évènements ayant lieu en un même point de l'espace, et l'intervalle de temps propre entre deux évènements simultanés avec les premiers et en un autre point de l'espace, sont en général différents.

On peut dire alors que : **le temps s'écoule plus ou moins vite selon les régions.**

15. Lien entre le tenseur métrique et les forces de gravitation. - Nous allons voir comment l'espace-temps est déformé lorsqu'une force gravitationnelle

est présente. Cette déformation se décrit mathématiquement par la forme du tenseur métrique. Nous obtiendrons ce résultat en nous efforçant de retrouver la loi de la gravitation universelle dans l'approximation newtonienne des vitesses faibles devant celle de la lumière, et d'astres créant une gravitation qui ne soit pas trop intense.

Nous supposons que le champ gravitationnel considéré est constant dans le référentiel choisi appelé \mathcal{R} . En prenant des corps usuels agissant gravitationnellement, comme le Soleil ou la Terre, l'espace-temps est très proche d'être l'espace-temps plat de la Relativité restreinte. Il doit donc exister des coordonnées telles que les composantes du tenseur métrique soient très voisines de celles du tenseur de MINKOWSKI, exprimées dans une base type : $\eta_{\alpha\beta}$. On écrit donc :

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \quad (12, 31)$$

L'hypothèse de champs gravitationnels qui ne sont pas trop intenses se traduit par $|h_{\alpha\beta}| \ll 1$. Nous supposons de plus qu'à l'infini, là où la gravitation créée par les corps considérés devient négligeable, on retrouve la métrique de MINKOWSKI de la Relativité restreinte. Donc $h_{\alpha\beta}$ est considéré comme nul à l'infini.

L'équation des géodésiques est :

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0 \quad (12, 32)$$

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^i \left(\frac{dx^0}{d\tau} \right)^2 + 2\Gamma_{0j}^i \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau} + \Gamma_{kl}^i \frac{dx^k}{d\tau} \frac{dx^l}{d\tau} = 0 \quad (12, 33)$$

Les coordonnées, très voisines des coordonnées types d'un référentiel galiléen (coordonnées rectilignes types sur la variété), sont encore notées avec le symbole x . On pose $x^0 = Ct$. Le temps t , dont chaque valeur correspond à des événements simultanés à travers tout l'espace (puisque $g_{0i} = 0$, le champ gravitationnel étant constant) est le temps propre à l'infini, là où la Relativité restreinte s'applique. Autrement dit, un observateur, quel que soit l'endroit où il est placé, en lisant localement la valeur de la coordonnée t , lit le temps indiqué au même moment à l'infini par une horloge étalon.

Toutes les composantes non nulles du tenseur métrique doivent avoir le même ordre de grandeur par raison de symétrie. Les symboles de CHRISTOFFEL qui s'en déduisent doivent également tous avoir le même ordre de grandeur. Notons que ce n'est pas le cas dans l'exemple du disque tournant pour lequel on ne mesure pas θ avec la même unité que r . Examinons l'ordre de grandeur des différents termes :

$$\Gamma_{00}^i \left(\frac{dx^0}{d\tau} \right)^2 = \Gamma_{00}^i C^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \simeq \Gamma_{00}^i C^2$$

$\frac{dt}{d\tau}$ est en effet très voisin de 1, car l'effet de modification de l'écoulement du temps dû à la gravitation est supposé faible, ainsi que celui lié à la vitesse qui est supposée faible devant celle de la lumière.

$$\begin{aligned}\frac{dx^j}{d\tau} \ll C &\Leftrightarrow \frac{dx^j}{d\tau} = \varepsilon C \quad \text{avec } \varepsilon \ll 1 \\ \Gamma_{0j}^i \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau} &\simeq \Gamma_{0j}^i C \varepsilon C \simeq \varepsilon \Gamma_{0j}^i C^2 \\ \Gamma_{kl}^i \frac{dx^k}{d\tau} \frac{dx^l}{d\tau} &\simeq \Gamma_{kl}^i \varepsilon C \varepsilon C \simeq \varepsilon^2 \Gamma_{kl}^i C^2\end{aligned}$$

Il résulte de cela, que les deux derniers termes sont négligeables ; ces deux derniers termes qui dépendent de la vitesse correspondent aux effets magnétiques de la gravitation qui sont ici ($v \ll C$) absents. Il vient, en remplaçant dt par $d\tau$, puisque ces deux nombres sont égaux avec une très bonne approximation :

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -C^2 \Gamma_{00}^i \quad (12, 34)$$

Soit F^i la i^{em} composante de la force calculée dans le référentiel lié à la particule (à priori, la force n'est pas invariante et dépend du référentiel choisi pour la calculer) ; on a :

$$F^i = m \frac{d^2 \sigma^i}{d\tau^2} \quad (12, 35)$$

σ^i étant la longueur spatiale mesurée parallèlement à la ligne coordonnée x^i dans le référentiel lié à la particule et τ le temps propre dans ce même référentiel. Mais $\sigma^i \simeq x^i$, le tenseur métrique étant très voisin dans \mathcal{R} du tenseur de MINKOWSKI (effets de contractions des longueurs liés à la gravitation supposés négligeables dans (12,35)), et la particule ayant une vitesse suffisamment faible pour qu'il n'y ait pas d'effet de contraction des longueurs liés à la vitesse. De même nous avons vu ci-dessus que $t \simeq \tau$ pour les mêmes raisons. Ainsi :

$$F^i = m \frac{d^2 x^i}{dt^2} = -m C^2 \Gamma_{00}^i \quad (12, 36)$$

La force est ainsi pratiquement invariante (indépendante du référentiel) comme en Mécanique newtonienne. Identifions donc la formule précédente à la formule analogue de la Mécanique newtonienne :

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g} = -m \mathbf{grad}\phi$$

ϕ étant le potentiel de gravitation, il vient :

$$-C^2 \Gamma_{00}^i = -\frac{\partial \phi}{\partial x^i} \quad (12, 37)$$

$$\Gamma_{00}^i \simeq -\frac{1}{2}g^{ii}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^i} \simeq \frac{1}{2}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^i}$$

Il vient :

$$\frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} = \frac{2}{C^2}\frac{\partial \phi}{\partial x^i}$$

À l'infini, ϕ et h_{00} sont nuls, donc :

$$h_{00} = \frac{2}{C^2}\phi$$

et

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{C^2} \quad (12, 38)$$

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\phi}{C^2}\right) C^2 dt^2 + g_{ij} dx^i dx^j \quad (12, 39)$$

L'expression précédente est nécessaire et suffisante de façon à ce que la Relativité générale redonne bien comme cas limite la Mécanique newtonienne.

Le raisonnement précédent ne permet pas d'atteindre la connaissance des g_{ij} .

Rappelons que le temps t est un temps universel et définit une simultanéité globale. En un point où le potentiel de gravitation est ϕ , le temps τ (parfois noté t_l , comme temps local) qui est le temps réel s'écoulant à l'endroit considéré vérifie (12,30) avec $t = u^0$:

$$\tau = t_l = \sqrt{1 + \frac{2\phi}{C^2}} t \quad (12, 40)$$

ϕ est négatif. On en conclut que **la gravitation ralentit l'écoulement du temps**, c'est à dire que l'intervalle de temps réel entre deux évènements en un point donné A , et l'intervalle de temps réel entre deux évènements simultanés avec les premiers en un point B sont différents avec :

$$\frac{\tau_A}{\tau_B} = \frac{\sqrt{1 + \frac{2\phi_A}{C^2}}}{\sqrt{1 + \frac{2\phi_B}{C^2}}}$$

Le temps s'écoulant le plus lentement là où le potentiel est le plus faible donc le plus près de l'astre. Ainsi, le temps s'écoule plus lentement à la surface de la Terre que dans l'espace. On a retrouvé d'une manière rigoureuse les équations (7,3) et (7,4).

En reprenant en sens inverse le raisonnement du § 5 du chapitre 7, on en déduit le décalage vers le rouge des rayons lumineux dans un champ de gravitation.

Donnons un ordre de grandeur du phénomène en prenant l'exemple de la surface de la Terre.

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ S.I.} \quad ; \quad M = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

$$r = 6400 \cdot 10^3 \text{ m}$$

$$\phi = -\frac{GM}{r} = -6.3 \cdot 10^7 \text{ S.I.} \quad ; \quad \frac{2\phi}{C^2} = -1.4 \cdot 10^{-9}$$

$$\frac{\tau - t}{t} \simeq \frac{\phi}{C^2} = 7 \cdot 10^{-10}$$

Ces résultats numériques justifient les approximations faite : $t = \tau$ dans l'équation des géodésiques, et $|h_{\alpha\beta}| \ll 1$. Au bout d'un milliard d'années, il y a tout de même un décalage d'à peu près un an entre le temps écoulé sur la Terre et le temps écoulé dans l'espace intersidéral.

16. Le problème des deux barres massiques en Relativité générale : étude d'une barre immobile en présence d'une particule animée de la vitesse \mathbf{v} . - Nous allons voir ci-dessous que nous sommes maintenant à même de résoudre complètement le problème des deux barres en Relativité générale. Rappelons qu'il s'agit de vérifier que les différentes valeurs de l'attraction gravitationnelle des deux barres calculées dans des référentiels variés sont cohérentes entre elles.

Notons tout d'abord qu'on peut simplifier le problème en considérant l'attraction d'une barre et d'un point matériel unique, ce qui permet d'utiliser le formalisme des géodésiques développé précédemment. Il suffit de considérer en effet une des deux barres comme l'ensemble des points matériels la constituant, points qui sont en interaction gravitationnelle avec l'autre barre. Si les calculs menés dans différents référentiels sont cohérents entre eux pour ce problème simplifié, il est évident qu'ils seront cohérents pour le problème initial ; voir à ce sujet la remarque du § 4 sur l'action d'un champ gravitationnel sur un corps étendu.

Nous verrons ci-dessous qu'il nous faut l'expression complète de l'élément linéaire en champ faible, et non pas uniquement g_{00} . Cette expression sera calculée au § 5 du chapitre 14, au moyen de l'équation du champ étudiée au chapitre 13. On a :

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\phi}{C^2}\right) C^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2\phi}{C^2}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (12, 41)$$

Avec $\frac{|\phi|}{C^2} \ll 1$, de telle sorte que ϕ n'interviendra ici dans les calculs que sous forme de dérivée partielle. D'autre part $\phi = 0$ à l'infini où l'on retrouve le tenseur métrique de MINKOWSKI, et donc $\phi \leq 0$ partout. Pour être rigoureux, il faut considérer que la barre, bien que très longue, n'est pas infinie.

Pour le cas d'un point immobile attiré par une barre immobile, le calcul du § 15, ne nécessitant que l'expression incomplète de l'élément linéaire, s'applique

avec les approximations correspondantes et (fig. 12.1) :

$$F^x = -m \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (12, 42)$$

Envisageons donc maintenant le cas d'un point animé de la vitesse \mathbf{v} selon l'axe des z et attiré par une barre immobile (fig. 12.1), la vitesse \mathbf{v} pouvant être voisine de celle de la lumière.

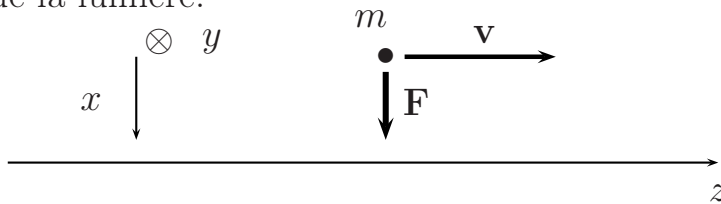


Fig. 12.1

Notons que l'appellation des axes de coordonnées est différente de celle utilisée dans la figure 1.1 .

Rappelons que la force n'est pas invariante en Relativité générale ; nous devons donc préciser dans quel référentiel nous la calculons. Considérons donc la force subie par la particule vue dans le référentiel où la particule est immobile.

$$F^x = m \frac{d^2 \sigma^x}{d\tau^2}$$

τ est le temps propre de la particule ; et σ^x est la longueur spatiale mesurée parallèlement à la ligne coordonnée x dans le référentiel lié à la particule. $\sigma^x \simeq x$ en effet, d'une part il n'y a pas d'effet de contraction des longueurs liés à la vitesse de la particule (qui peut cette fois être voisine de celle de la lumière) car la longueur est mesurée perpendiculairement à la vitesse ; **d'autre part on suppose toujours que la gravitation est suffisamment faible pour qu'il n'y ait pas de contraction des longueurs qui lui soit associée d'une manière appréciable dans la formule examinée (texte en bleu juste en dessous de l'équation (12,41)).**

Donc :

$$F^x = m \frac{d^2 x}{d\tau^2} \quad (12, 43)$$

$$F^x = -m \Gamma_{00}^x \left(\frac{C dt}{d\tau} \right)^2 - 2m \Gamma_{0z}^x \frac{C dt}{d\tau} \frac{dz}{d\tau} - m \Gamma_{zz}^x \left(\frac{dz}{d\tau} \right)^2 \quad (12, 44)$$

par (12.4) avec $u^\alpha = x$ $\alpha = x$ (identité de ces deux indices) et $\phi^\alpha = 0$ ou d'une manière équivalente par (12,32).

$$\begin{cases} \Gamma_{00}^x = \frac{1}{2} g^{xx} \left(-\frac{\partial g_{00}}{\partial x} \right) \simeq \frac{1}{C^2} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \Gamma_{0z}^x = \frac{1}{2} g^{xx} \times 0 = 0 \\ \Gamma_{zz}^x = \frac{1}{2} g^{xx} \left(-\frac{\partial g_{zz}}{\partial x} \right) \simeq \frac{1}{C^2} \frac{\partial \phi}{\partial x} \end{cases} \quad (12, 45)$$

$$F^x = -m \frac{1}{C^2} \frac{\partial \phi}{\partial x} \left(\left(\frac{C dt}{d\tau} \right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau} \right)^2 \right) \quad (12, 46)$$

$$F^x = -m \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{1}{C^2} \frac{C^2 dt^2 + dz^2}{d\tau^2} \quad (12, 47)$$

or $ds^2 = C^2 d\tau^2 \simeq C^2 dt^2 - dz^2$; et $\frac{dz}{dt} = v$

$$\frac{C^2 dt^2 + dz^2}{C^2 d\tau^2} = \frac{C^2 dt^2 + dz^2}{C^2 dt^2 - dz^2} = \frac{1 + \frac{v^2}{C^2}}{1 - \frac{v^2}{C^2}}$$

$$F^x = -m \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{1 + \frac{v^2}{C^2}}{1 - \frac{v^2}{C^2}} \quad (12, 48)$$

Interprétons cette formule : on peut considérer que le point est immobile et que c'est la barre qui défile. D'autre part :

$$-m \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{1 + \frac{v^2}{C^2}}{1 - \frac{v^2}{C^2}} = -m \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{C^2}} - m \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\frac{v^2}{C^2}}{1 - \frac{v^2}{C^2}} \quad (12, 49)$$

Au premier terme correspond bien à priori l'attraction due à la composante T^{00} du tenseur d'impulsion énergie (formules (12,42) avec (8,8)); on a bien alors la multiplication par le facteur $\frac{1}{1 - \frac{v^2}{C^2}}$ venant de l'effet simultané de la contraction des longueurs et de l'augmentation de l'énergie avec la vitesse.

Mais il y a en plus le deuxième terme. On voit intuitivement qu'il correspond à T^{zz} avec le même coefficient de proportionalité que celui reliant le premier terme à T^{00} .

Nous verrons (chapitre 14) que nous sommes dans le cas de *l'approximation linéaire de la gravitation*, les différents effets s'ajoutent alors les uns aux autres. Ainsi on a deux effets attractifs, l'un lié à l'énergie, l'autre à la pression (à la barre qui défile correspond en effet une pression comme nous l'avons vu au § 7 du chapitre 8), avec la même intensité (même coefficient de proportionalité; formules (8,8) et (8,13)). Nous reverrons tout cela rigoureusement au chapitre 14 en connaissant exactement comment le tenseur d'impulsion-énergie crée la gravitation (équations du champ, chapitre treize)

17. Effet de contraction des longueurs dans un champ de gravitation. - Considérons la formule (12,41). À l'infini $\phi = 0$ et les coordonnées x, y, z, t deviennent galiléennes types. D'un autre côté, elles sont définies partout, même dans les régions où le champ gravitationnel est présent. Elles vont

donc jouer le rôle du **substrat invariable** défini partout, par rapport auquel on pourra évaluer un effet de “contraction des longueurs” dû à la gravité. Précisons cela :

Considérons par exemple la déviation de la lumière au passage dans un champ de gravitation, qui sera étudiée au § 21 (fig. 12.2).

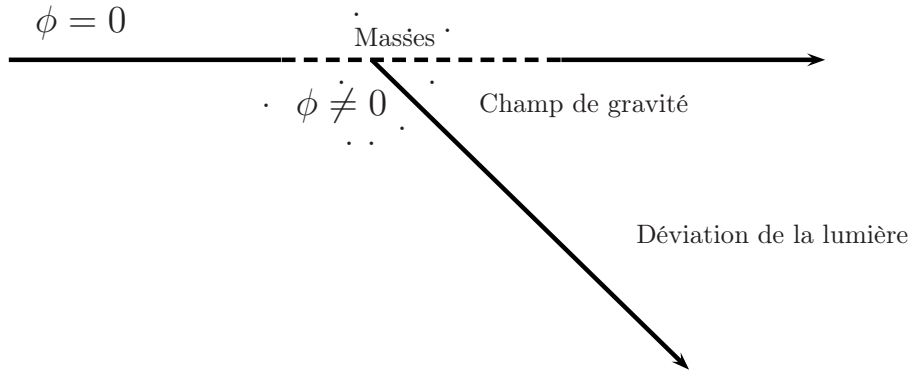


Fig. 12.2

Les points de départ et d’arrivée du rayon lumineux se situent dans des régions où $\phi = 0$ et où l’espace-temps est plat. Les coordonnées x, y, z, t sont alors galiléennes types. On mesure la déviation du rayon lumineux entre le départ et l’arrivée où ces coordonnées x, y, z, t sont des *coordonnées étalons*, c’est à dire correspondent à des longueurs et des temps mesurés avec des règles étalons et des horloges étalons. Cette déviation est mesurée par rapport à la trajectoire que l’on aurait si ϕ était nul partout.

Mais le fait que les coordonnées x, y, z, t soient définies partout nous permet de suivre l’évolution du rayon lumineux par rapport à ces coordonnées tout le long de sa progression, et de voir où il est dévié, par rapport au cas de non déviation que l’on aurait si ϕ était nul partout (fig. 12.2) ; cas où les coordonnées x, y, z, t sont galiléennes types partout. Dévié, cela veut dire qu’il n’a plus une trajectoire rectiligne par rapport aux coordonnées x, y, z ; c’est à dire que ses coordonnées d’espace ne sont plus des fonctions linéaires affines du temps t , ce qui est le cas partout quand $\phi = 0$.

Dans un référentiel galiléen local, la lumière se propage bien sûr toujours en ligne droite à la vitesse C . Nous verrons d’autre part au chapitre 14 que ces coordonnées utilisées ici, ne sont pas quelconques et s’introduisent naturellement en champ faible. Elles donnent à l’équation du champ la forme très simple (14,9). Elles correspondent au cas où la gravité est suffisamment faible pour être décrite approximativement par un champ tensoriel d’ordre 2 dans un espace-temps plat (voir § 1 du chapitre 14) ; de telle manière que ces coordonnées ont un caractère canonique renforçant l’interprétation que nous donnons ici. Mais nous avons vu au § 13 du chapitre 7 que ce n’est tout de même qu’une image possible parmi

d'autres du caractère non euclidien de l'espace.

Ainsi en conclusion, les coordonnées x, y, z, t nous permettent de donner une signification rigoureuse à ce substrat invariable hypothétique imaginé au §9 du chapitre 7, et par rapport auquel les effets de contraction des longueurs ou d'autres effets, comme la déviation de la lumière, sont mesurés. De la même manière, le temps t , temps étalon à l'infini, permettait d'évaluer partout l'écoulement du temps local τ et de voir s'il y avait un effet de "ralentissement" du temps (formule 12,30)).

Rappelons qu'il n'est pas possible d'obtenir un système de coordonnées types globalement, et par rapport auquel on puisse par exemple repérer la déviation de la lumière. Les coordonnées x, y, z, t présentées ici représentent donc la meilleur solution pour étudier des effets globaux comme la déviation de la lumière, en suivant ces effets de proche en proche localement.

Les formules (12,26) avec (12,28) et (12,41) donnent :

$$d\sigma^2 = \left(1 - \frac{2\phi}{c^2}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (12, 50)$$

soit ($d\sigma$ sera noté aussi dl) :

$$d\sigma = dl = \sqrt{1 - \frac{2\phi}{C^2}} dX \quad (12, 51)$$

dX étant la distance mesurée avec le substrat invariable correspondant aux coordonnées x, y, z . ϕ étant négatif, il y a bien un effet de contraction des longueurs étalons par rapport à ce substrat invariable, qui fait que localement dans le champ de gravitation, les règles étalons sont plus "petites", et la mesure $d\sigma$ faite avec ces règles étalons est plus grande que la valeur donnée par le substrat invariable : $d\sigma > dX$. Où, pour des règles étalons toutes identiques, placées en différents endroits, soit pour $d\sigma = Cte$, dX est de plus en plus petit au fur et à mesure que l'on s'enfonce dans un champ de gravitation, ϕ devenant de plus en plus petit ($|\phi|$ croît et $\phi < 0$). Les règles étalons rapetissent donc quand elles s'enfoncent dans un champ de gravitation.

18. Étude d'une barre défilant à la vitesse v en présence d'une particule immobile. - Développons maintenant le calcul correspondant au point de vue développé à la fin du § 16.

Nous devons trouver la même force, dans le référentiel lié à la particule, que dans ce paragraphe 16 ; ceci bien que le calcul soit mené d'une manière différente.

Il nous faut ici calculer l'élément linéaire créé par une barre animée de la vitesse v . À l'infini, le passage du référentiel $\bar{\mathcal{R}}$ lié à la barre au référentiel \mathcal{R} lié à la particule s'exprime par une transformation de LORENTZ.

Nous pouvons définir globalement dans tout l'espace-temps des coordonnées t, x, y, z à partir des coordonnées $\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ par cette transformation de LORENTZ :

$$\begin{cases} x = \bar{x} \\ y = \bar{y} \\ z = \cosh \varphi \bar{z} + \sinh \varphi C\bar{t} \\ Ct = \sinh \varphi \bar{z} + \cosh \varphi C\bar{t} \end{cases} \quad (12, 52)$$

Pour un point immobile par rapport à la barre, on a $d\bar{z} = 0$ et cela donne bien $\frac{dz}{dt} = \frac{\sinh \varphi C}{\cosh \varphi} = v$. Dans le référentiel correspondant aux coordonnées ainsi définies, la barre est donc bien animée de la vitesse \mathbf{v} . La coordonnée z correspond bien en effet à la mesure de longueur étalons, et le temps t à un temps étalon et $\frac{dz}{dt}$ donne bien la vitesse réelle de la barre. Rappelons qu'on a bien des coordonnées étalon car avec ces coordonnées l'élément linéaire est très voisin de son expression de la Relativité restreinte, $\frac{\phi}{C^2}$ étant très petit.

D'ailleurs à l'infini, là où la gravitation disparaît, on retrouve l'élément linéaire de la Relativité restreinte avec les coordonnées t, x, y, z ; et ce sont les seules coordonnées associée au référentiel dans lequel la particule est immobile vérifiant cela.

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\phi}{C^2}\right) C^2 d\bar{t}^2 - \left(1 - \frac{2\phi}{C^2}\right) (d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2)$$

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\phi}{C^2}\right) (-\sinh \varphi dz + \cosh \varphi Cdt)^2 - \left(1 - \frac{2\phi}{C^2}\right) (dx^2 + dy^2 + (\cosh \varphi dz - \sinh \varphi Cdt)^2)$$

$$ds^2 = C^2 dt^2 + \frac{2\phi}{C^2} (\cosh^2 \varphi + \sinh^2 \varphi) C^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2\phi}{C^2}\right) (dx^2 + dy^2) - dz^2 - 8 \frac{\phi}{C^2} \sinh \varphi \cosh \varphi Cdt dz + \frac{2\phi}{C^2} (\cosh^2 \varphi + \sinh^2 \varphi) dz^2 \quad (12, 53)$$

Toujours avec la même approximation, absence d'effet de contraction des longueurs lié à la gravitation qui est faible, et absence d'effet de contraction des longueurs perpendiculairement à la vitesse; idem pour les temps, ici $t \simeq \tau$ (particule immobile, pas d'effet lié à la gravitation); on a :

$$F^x = -m\Gamma_{00}^x \left(\frac{Cdt}{d\tau}\right)^2 \simeq -m\Gamma_{00}^x C^2$$

$$\Gamma_{00}^x = \frac{1}{2}g^{xx} \left(-\frac{\partial g_{00}}{\partial x}\right) = (\cosh^2 \varphi + \sinh^2 \varphi) \frac{1}{C^2} \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$\cosh^2 \varphi + \sinh^2 \varphi = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{C^2}} + \frac{\frac{v^2}{C^2}}{1 - \frac{v^2}{C^2}}$$

$$F^x = -m \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{1 + \frac{v^2}{C^2}}{1 - \frac{v^2}{C^2}}$$

On retrouve bien par un calcul différent mené dans un référentiel différent, l'expression (12,48) du paragraphe 16.

19. Étude d'une barre et d'une particule immobiles l'une par rapport à l'autre et animées de la vitesse v colinéaire à la barre. - L'élément linéaire est le même qu'au paragraphe précédent :

$$\begin{aligned} ds^2 = & \left(1 + \frac{2\phi}{C^2} (\cosh^2 \varphi + \sinh^2 \varphi)\right) C^2 dt^2 \\ & - \left(1 - \frac{2\phi}{C^2}\right) (dx^2 + dy^2) - \left(1 - \frac{2\phi}{C^2} (\cosh^2 \varphi + \sinh^2 \varphi)\right) dz^2 \\ & - 8 \frac{\phi}{C^2} \sinh \varphi \cosh \varphi C dt dz \end{aligned} \quad (12,54)$$

Toujours en l'absence de contraction des longueurs, on a :

$$\begin{aligned} F^x &= -m \Gamma_{00}^x \left(\frac{C dt}{d\tau}\right)^2 - 2m \Gamma_{0z}^x \frac{C dt}{d\tau} \frac{dz}{d\tau} - m \Gamma_{zz}^x \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 \\ \Gamma_{00}^x &= \frac{1}{2} g^{xx} \left(-\frac{\partial g_{00}}{\partial x}\right) = \frac{1}{C^2} \frac{\partial \phi}{\partial x} (\cosh^2 \varphi + \sinh^2 \varphi) \\ \Gamma_{zz}^x &= \frac{1}{2} g^{xx} \left(-\frac{\partial g_{zz}}{\partial x}\right) = \frac{1}{C^2} \frac{\partial \phi}{\partial x} (\cosh^2 \varphi + \sinh^2 \varphi) \\ \Gamma_{0z}^x &= \frac{1}{2} g^{xx} \left(-\frac{\partial g_{0z}}{\partial x}\right) = -\frac{2}{C^2} \frac{\partial \phi}{\partial x} \sinh \varphi \cosh \varphi \\ & \quad \left(g_{0z} = -\frac{4\phi}{C^2} \sinh \varphi \cosh \varphi\right) \end{aligned}$$

Pour deux évènements voisins correspondant à deux positions voisines de la particule, on a :

$$ds^2 = C^2 d\tau^2 \simeq C^2 dt^2 - dz^2 \quad ; \quad \text{et} \quad \frac{dz}{dt} = v$$

$$F^x = -m \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{(\cosh^2 \phi + \sinh^2 \phi) (C^2 dt^2 + dz^2) - 4 \sinh \varphi \cosh \phi C dt dz}{C^2 dt^2 - dz^2}$$

$$F^x = -m \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\frac{1+\frac{v^2}{C^2}}{1-\frac{v^2}{C^2}} \left(1 + \frac{v^2}{C^2}\right) - 4 \frac{\frac{v}{C}}{1-\frac{v^2}{C^2}} \frac{v}{C}}{1 - \frac{v^2}{C^2}}$$

On voit facilement que la fraction vaut 1 et :

$$F^x = -m \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

On retrouve bien (12,42).

La force subie par la particule, vue dans son référentiel, calculée de la manière ci-dessus avec particule et barre en mouvement, est donc bien la même que celle calculée en considérant la barre et la particule immobiles. Le problème des deux barres est donc complètement résolu. La gravitation est maintenant compatible avec la Relativité restreinte. On a une Théorie relativiste de la gravitation, c'est la Relativité générale.

En comparant au résultat du § 18, on voit qu'il faut ajouter, à cause du mouvement de la particule deux termes correspondant aux symboles de CHRISTOFFEL Γ_{0z}^x et Γ_{zz}^x .

On peut donc dire qu'on a une force multipliée par $\frac{1+\frac{v^2}{C^2}}{1-\frac{v^2}{C^2}}$ à cause de l'effet de contraction des longueurs, d'augmentation de l'énergie avec la vitesse et de l'effet d'attraction de la pression. Mais on a une répulsion qui correspond à l'effet magnétique de la gravitation et qui compense exactement l'augmentation d'attraction due aux effets précédents. Cette répulsion est due à l'action de la barre en mouvement de translation rectiligne uniforme sur la particule en mouvement de translation rectiligne uniforme dans le même sens.

De la même manière qu'en électromagnétisme, un effet magnétique vient de l'action d'une charge en mouvement sur une autre charge en mouvement, en Relativité générale des effets magnétiques apparaissent, même avec des mouvements non accélérés. Nous verrons au chapitre 14, que ce sont les termes du tenseur d'impulsion-énergie correspondant à la densité d'impulsion, donc également au flux d'énergie qui sont la cause de l'effet répulsif sur la particule en mouvement.

20. Déviation de la lumière dans un champ de gravitation. - Les résultats des paragraphes 16 et 17 nous permettent de connaître la déviation de la lumière dans un champ de gravitation. Reprenons les formules (12,43) et (12,47) :

$$\frac{F^x}{m} = \frac{d^2x}{d\tau^2} = -\frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{1}{C^2} \left(\frac{C^2 dt^2 + dz^2}{d\tau^2} \right) \quad (12, 55)$$

Dans le cas d'un objet animé d'une vitesse faible devant celle de la lumière parallèlement à l'axe des z , $\frac{dz}{dt} \ll C$, $dt \simeq d\tau$ et (12,55) donne alors la formule newtonienne :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\partial\phi}{\partial x} \quad (12, 56)$$

Considérons maintenant un rayon lumineux se propageant parallèlement à l'axe des z . Il vient :

$$0 = ds^2 = C^2 d\tau^2 \simeq C^2 dt^2 - dz^2$$

$dz^2 = C^2 dt^2$ c'est à dire $\frac{dz}{dt} = C$, ce qui est évident. Cela traduit la propagation à la vitesse C de la lumière le long de l'axe des z , les effets de contraction des longueurs dus à la gravitation appliquée par la barre étant négligeables. (12,55) multipliée par $\frac{d\tau^2}{dt^2}$ donne (faire cette manipulation suppose dt proportionnel à $d\tau$, ce qui est le cas pour une particule se dirigeant presque à la vitesse de la lumière, horizontalement et donc, à vitesse pratiquement constante) :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{1}{C^2} \left(C^2 + \frac{dz^2}{dt^2} \right) \quad (12, 57)$$

(1) (2)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2 \frac{\partial\phi}{\partial x} \quad (12, 58)$$

Dans le référentiel \mathcal{R} lié à la barre, on a une accélération vers le bas de la lumière double de celle d'un objet newtonien (animé d'une vitesse faible devant C).

Extrapolant la Mécanique newtonienne à un caillou animé de la vitesse C horizontalement, on aurait pris (12,56) au lieu de (12,58) et on aurait trouvé **tout le long du chemin** une déviation moitié de la déviation réelle, mesurée avec les coordonnées x, y, z, t ; donc également à l'infini là où la déviation est rigoureusement mesurée avec ces coordonnées qui deviennent étalons à l'infini.

La formule (12,57) nous montre qu'il y a deux termes (1) et (2) apportant chacun une déviation égale à la déviation newtonienne. Voyons quelle est l'origine de ces deux termes en examinant (12,45) :

À (1), donc C^2 correspond Γ_{00}^x venant de $\frac{\partial g_{00}}{\partial x}$. Cet effet est lié au ralentissement du temps dans un champ de gravitation (formule (12,21)); ralentissement parfaitement vu directement grâce au principe d'équivalence au § 5 du chapitre 7. Donc, au bout du compte, cette contribution à la déviation de la lumière avait été parfaitement évaluée directement grâce au principe d'équivalence dans ce § 5 du chapitre 7.

L'autre contribution, (2) avec $\frac{dz^2}{dt^2}$ vient de Γ_{zz}^x , donc de $\frac{\partial g_{zz}}{\partial x}$. Ce terme est lié à l'effet de contraction des longueurs dans un champ de gravitation par la formule (12,51). Cet effet a été mentionné au § 5 du chapitre 7, sans à l'époque l'évaluer numériquement.

21. Influence de la contraction des longueurs dans la déviation de la lumière. - Au § 17 a été donnée l'interprétation des coordonnées x, y, z , en

terme de substrat invariable par rapport auquel on peut à la fois mesurer l'effet de contraction des longueurs et suivre pas à pas la déviation de la lumière.

En utilisant la nature ondulatoire de la lumière, nous allons grâce à cela pouvoir recalculer rigoureusement l'influence conjointe des effets de ralentissement du temps et de contraction des longueurs dans la déviation de la lumière, par un calcul direct et sans utiliser le formalisme mathématique des variétés différentiables. Cette interprétation nous permettra de saisir directement, en l'évaluant quantitativement, l'influence de l'effet de contraction des longueurs sur la déviation de la lumière mentionné au § 5 du chapitre 7. Voir également l'exercice 7.3 à ce sujet.

Soit un plan d'onde de phase déterminée (plan où le champ électrique est maximal par exemple) parallèle au plan xOy (fig. 12.3). Ce plan d'onde avance parallèlement à l'axe des z . À cause de la contraction des longueurs et de la dilatation des temps, et **compte tenu de l'invariance locale de la vitesse de la lumière** mesurée avec les coordonnées étalons (§ 3 du chapitre 7), à un niveau inférieur le plan d'onde avance moins vite (en terme du temps universel t et des coordonnées x, y, z).

Il en résulte une rotation progressive de ce plan d'onde au fur et à mesure qu'il avance, correspondant à la déviation du rayon lumineux associé. Nous avons un effet de réfraction de la lumière.

Pendant la durée du temps d'univers t , le plan d'onde a avancé de z_2 à l'altitude x_2 et de z_1 à l'altitude x_1 , et, en longueur étalon locale, respectivement de l_2 et l_1 ; Elles seront les longueurs d'onde de la lumière, vues localement, si t correspond à la période de la vibration. Il s'est alors écoulé le temps étalon t_{l_2} à l'altitude x_2 et t_{l_1} à l'altitude x_1 .

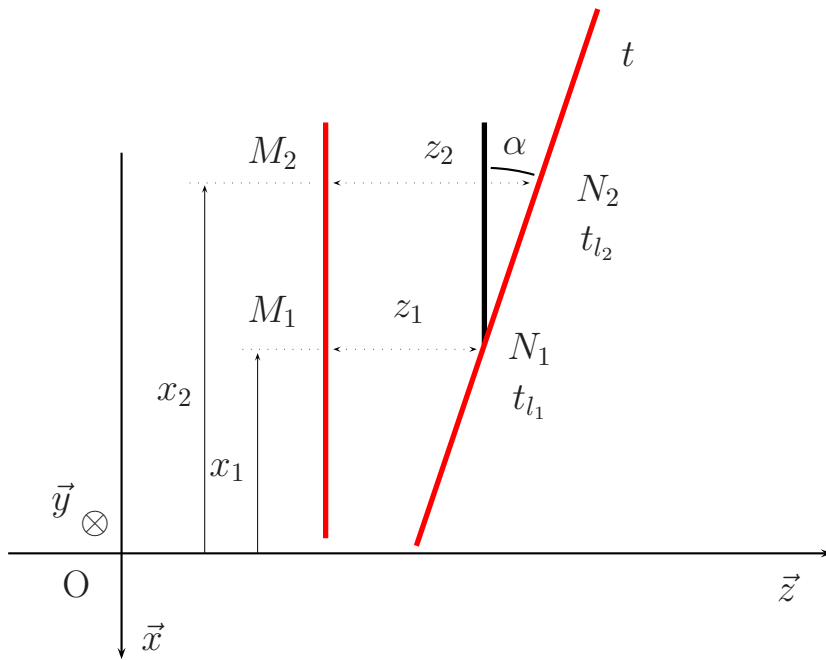


Fig. 12.3

L'invariance de C donne :

$$C = \frac{l_2}{t_{l_2}} = \frac{l_1}{t_{l_1}}$$

l est la longueur étalon à l'altitude x , tandis que t_l est le temps propre local d'une horloge étalon immobile à l'altitude x . (12,51) donne :

$$l = \sqrt{1 - \frac{2\phi(x)}{C^2}} z$$

Il y a contraction des longueurs pour des x croissants, donc lorsque ϕ décroît. Ainsi, à la même valeur de la longueur d'un chemin mesuré en terme de la coordonnée z , correspond un plus grand nombre de règles étalons mises bout à bout quand x est plus grand, c'est à dire quand on est plus enfoncé dans le champ de gravitation. Il correspond donc alors une plus grande valeur de l (fig. 12.4).

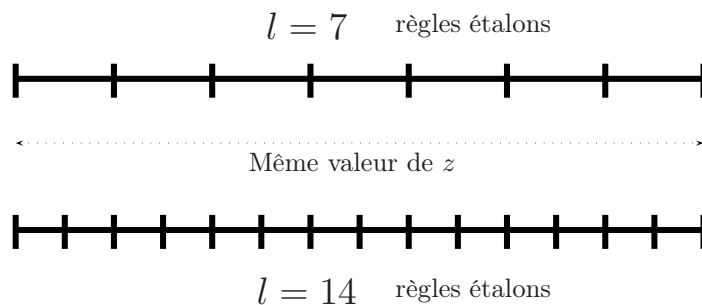


Fig. 12.4

$$t_l = \sqrt{1 + \frac{2\phi}{C^2}} t \quad (12, 59)$$

À une même valeur du temps d'univers t correspond un plus court lapse de temps local réel t_l lorsque x est plus grand, donc lorsque ϕ est plus petit.

L'invariance de la vitesse de la lumière donne :

$$\frac{\sqrt{1 - \frac{2\phi}{C^2}}}{\sqrt{1 + \frac{2\phi}{C^2}}} z = Cte$$

En effet, le plan d'onde vibre en phase sur toute sa longueur, donc simultanément en tous ses points au sens du temps d'univers t . Le plan d'onde atteint donc au même instant M_1 et M_2 et également au même instant N_1 et N_2 .

La durée mesurée en temps d'univers qui s'écoule entre les arrivées en M_1 M_2 et N_1 N_2 est notée t (formule (12,59)). t est ainsi le même aux deux altitudes.

Par contre, z et ϕ ne sont pas les même en M_1 et en M_2 . Ils valent : $z_1, z_2, \phi(z_1), \phi(z_2)$.

$$\frac{1 - \frac{2\phi}{C^2}}{1 + \frac{2\phi}{C^2}} z^2 = Cte$$

Dérivons par rapport à z : $\frac{d\phi}{dz} = \frac{d\phi}{dx} \frac{dx}{dz} = \phi' \frac{dx}{dz}$

$$2z \frac{1 - \frac{2\phi}{C^2}}{1 + \frac{2\phi}{C^2}} + z^2 \left(\frac{dx}{dz} \right) \frac{-\frac{2\phi'}{C^2} \left(1 + \frac{2\phi}{C^2} \right) - \left(1 - \frac{2\phi}{C^2} \right) \frac{2\phi'}{C^2}}{\left(1 + \frac{2\phi}{C^2} \right)^2} = 0$$

Multiplions le tout par $\left(1 + \frac{2\phi}{C^2} \right)^2$, divisons par $2z$.

Remarquons que : $\left(1 - \frac{2\phi}{C^2} \right) \left(1 + \frac{2\phi}{C^2} \right) \simeq 1$

$$1 - z \frac{dx}{dz} \frac{2\phi'}{C^2} = 0 \quad \phi' = -g$$

$$\alpha = -\frac{z_2 - z_1}{x_2 - x_1} = -\frac{dz}{dx} \quad 1 = z \frac{1}{\alpha} \frac{2g}{C^2}$$

Pour une avancée du plan d'onde de z , il y a donc rotation vers le bas de :

$$\alpha = \frac{2gz}{C^2} \quad (12, 60)$$

On voit que le coefficient 2 vient de l'effet de ralentissement du temps ajouté à l'effet de contraction des longueurs. Si nous prenons un seul effet en compte, nous avons le coefficient 1. Nous laissons le lecteur vérifier cela.

Vérifions que l'effet est double de celui que l'on calcule pour une particule matérielle qui suivrait la Mécanique newtonienne tout en allant à la vitesse C . Considérons, pour faire un calcul simple, un mouvement circulaire uniforme sur un cercle de rayon R , dans lequel la force centrifuge annule la force de gravité. À un instant donné, la trajectoire est bien perpendiculaire au champ de gravité. Si l'on se restreint à une région suffisamment petite, on a une légère déviation causée par un champ pratiquement uniforme.

$$mg = \frac{mC^2}{R} \quad z = R\alpha \quad g = C^2 \frac{\alpha}{z} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{gz}{C^2}$$

résultat moitié de (12,60).

22. Déformation apparente d'un référentiel galiléen vu avec les coordonnées x, y, z . - Il nous reste à comprendre avec une totale clarté pourquoi dans l'exemple du § 5 du chapitre 7 la déviation de la lumière vue de la fusée est moitié de celle ayant lieu dans un champ de gravitation, bien que pour l'astronaute de la fusée, tout se passe comme si un champ de gravitation régnait.

Nous pouvons donner une formulation un peu différente de ce paradoxe :

Ainsi, une particule animée de la vitesse C horizontalement accélère deux fois plus vers le bas (dans un champ de gravitation vertical) qu'une particule animée d'une vitesse faible devant celle de la lumière. Ceci n'est-il pas en contradiction avec le principe d'équivalence? Celui-ci semble affirmer en effet que tous les corps ont la même accélération quelle que soit leur vitesse dans un champ de gravitation; puisqu'il affirme (§ 2 et § 3 du chapitre 7) que tous les corps libres, quelle que soit leur vitesse ont un mouvement rectiligne uniforme dans un référentiel galiléen (en chute libre).

La solution de ce paradoxe réside dans le choix, différent dans les deux cas, du référentiel, c'est à dire dans le choix du système de coordonnées par rapport auquel on mesure la déviation de la lumière ou l'accélération.

Considérons le système de coordonnées x, y, z, t ; l'élément métrique vaut :

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\phi}{C^2}\right) C^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2\phi}{C^2}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

Soit \mathcal{R} le référentiel correspondant à ces coordonnées. ϕ est le potentiel de gravitation. Dans un champ uniforme, $\phi = -gx + Cte$. Pour que l'élément métrique prenne la forme précédente, il faut que ϕ soit partout faible et prenne la valeur 0 à l'infini. On retrouve bien alors à l'infini la métrique de l'espace-temps de MINKOWSKI avec des coordonnées galiléennes. C'est bien par rapport à de telles coordonnées qu'on mesure la déviation de la lumière.

On suppose en effet que la lumière est déviée par son passage dans un champ de gravitation localisé ; la déviation étant mesurée à l'infini. Ce système de coordonnées d'espace-temps est différent de celui d'un référentiel galiléen local, et il y a un effet de contraction des longueurs par rapport à un tel référentiel.

Considérons un tel référentiel galiléen \mathcal{R}_g construit avec des règles étalons parfaitement rigides. Plus précisément, ce référentiel est constitué d'un rectangle parfaitement rigide de côtés de longueurs h verticalement et l horizontalement, avec $h \ll l$. Ce référentiel est en chute libre. Il y a un instant où il est parfaitement immobile dans le champ de pesanteur (fig. 12.5).

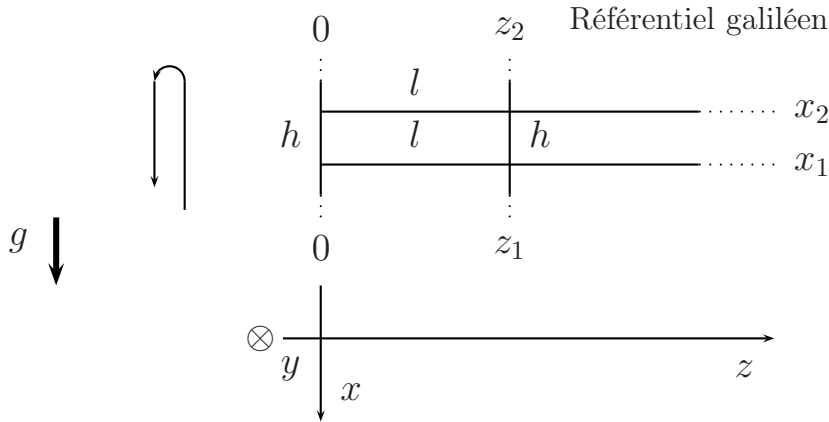


Fig. 12.5

Le haut du référentiel correspond à la valeur x_2 de la coordonnée x ; le bas à la valeur x_1 ; $x_1 - x_2 \simeq h$. De même, la partie gauche correspond à la valeur 0 de z ; la partie droite correspond à la valeur z_2 en haut et z_1 en bas. z_2 est différent de z_1 à cause de la contraction des longueurs dans un champ de gravitation !

(12,51) donne en effet :

$$l = \sqrt{1 - \frac{2\phi(x_1)}{C^2}} z_1 \simeq \left(1 - \frac{\phi(x_1)}{C^2}\right) z_1$$

$$l = \sqrt{1 - \frac{2\phi(x_2)}{C^2}} z_2 \simeq \left(1 - \frac{\phi(x_2)}{C^2}\right) z_2$$

$$\phi(x_2) > \phi(x_1) \Rightarrow z_2 > z_1$$

Le référentiel galiléen est vu déformé dans le référentiel \mathcal{R} (fig. 12.6) :

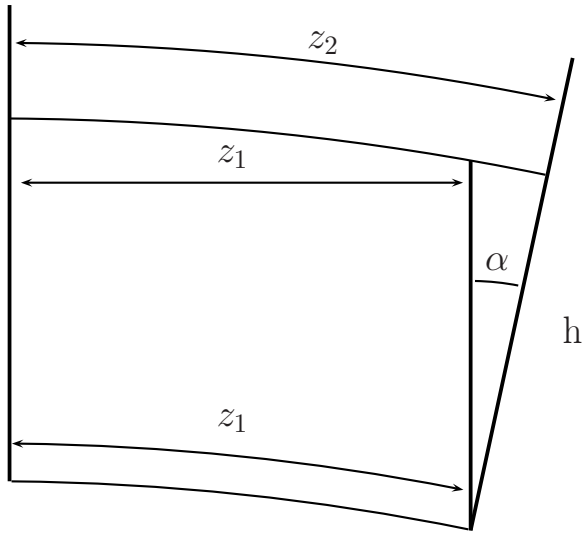


Fig. 12.6

Le bas du référentiel plongé plus profondément dans le champ de gravitation semble plus petit. De la lumière émise à l'instant 0 de la source, suit les géodésiques du référentiel galiléen, donc subit de ce fait un effet de rotation vu du référentiel \mathcal{R} .

Il correspond une rotation : $\alpha = \frac{z_2 - z_1}{h}$

$$\alpha = \frac{\phi(x_2) - \phi(x_1)}{C^2 h} l = \frac{lg}{C^2}$$

Le rayon de courbure du cercle parcouru vaut :

$$R = \frac{l}{\alpha} = \frac{C^2}{g} \quad (12, 61)$$

Il lui correspond pour la lumière, vue dans \mathcal{R} , une accélération vers le centre qui vaut :

$$\frac{v^2}{R} = \frac{C^2}{R} = C^2 \frac{g}{C^2} = g$$

D'autre part, pendant que la lumière parcourt cette distance l horizontalement dans le référentiel galiléen, elle accompagne ce dernier dans sa chute libre avec l'accélération \mathbf{g} . On obtient donc en tout l'accélération $2\mathbf{g}$ qui est bien le double de celle d'un corps peu rapide.

Il faut bien voir que tout objet lancé horizontalement subira l'accélération vers le bas correspondant à la courbure de l'espace et à l'angle $\alpha = \frac{lg}{C^2}$. Mais, pour un corps animé d'une vitesse faible devant celle de la lumière, l'accélération correspondant à cette courbure sera négligeable devant l'accélération \mathbf{g} que le

corps prend en accompagnant le référentiel galiléen dans sa chute libre. Calculons précisément cette accélération due à la courbure de l'espace :

$$\gamma = \frac{v^2}{R} = \frac{v^2 g}{C^2} = \frac{g}{C^2} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 = -\frac{1}{C^2} \frac{\partial \phi}{\partial x} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} < 0 \right)$$

On a donc bien retrouvé avec ce raisonnement direct le deuxième terme de la formule (12,57). Ce deuxième terme correspond bien à la courbure de l'espace.

On voit que l'effet de déviation de la lumière dû à la contraction des longueurs se calcule exactement de la même manière en étudiant la déviation qui en résulte pour un plan d'onde, ou la déformation apparente qui en résulte pour un référentiel galiléen.

En conclusion, dans la fusée qui coïncide à l'instant considéré avec le référentiel galiléen étudié, l'accélération vers le bas est bien la même pour tous les corps et la déviation de la lumière moitié de celle calculée avec les coordonnées x, y, z .

Mais il n'y a pas de contradiction. Simplement, les coordonnées utilisées ne sont pas les mêmes. Vu d'un référentiel terrestre, et avec les coordonnées x, y, z , la fusée bien que parfaitement rigide, paraît déformée (fig. 12.7). Un chemin qui se produit dans un référentiel en ligne droite à vitesse constante, est vu dans un autre référentiel comme un mouvement circulaire uniforme, donc avec une accélération !

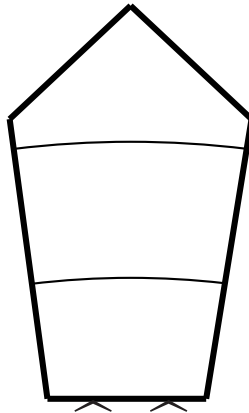


Fig. 12.7

Et d'ailleurs, avec les coordonnées x, y, z , la gravitation est nulle à l'infini. Par contre, en utilisant le principe d'équivalence, dans la fusée qui accélère, la gravitation (apparente) n'est pas nulle à l'infini. Il est donc normal de ne pas retrouver la même déviation de la lumière à l'infini dans les deux cas.

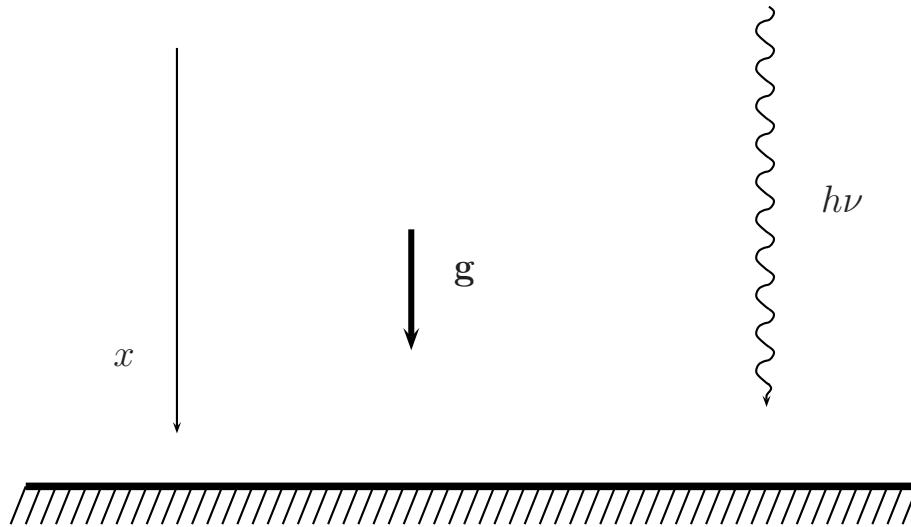
EXERCICES

12.1

On considère un champ gravitationnel uniforme \mathbf{g} dirigé vers le bas (voir figure), les effets de Relativité générale étant faibles. L'élément linéaire est donc donné par (12,41) qui peut s'écrire, $\frac{2\phi}{C^2}$ étant très faible :

$$ds^2 = AC^2 dt^2 - \frac{1}{A} (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

avec $A = 1 + \frac{2\phi}{C^2}$.



L'axe des x est vertical et dirigé vers le bas. On considère un rayon lumineux se propageant verticalement dans ce champ de gravité.

1. p étant un paramètre décrivant la trajectoire, écrire les équations des géodésiques, en t et en x , en utilisant A et $A' = \frac{dA}{dx}$.

2. Intégrez l'équation des géodésiques en t et montrez que l'on peut écrire la relation : $\frac{dt}{dp} = \frac{1}{AC}$.

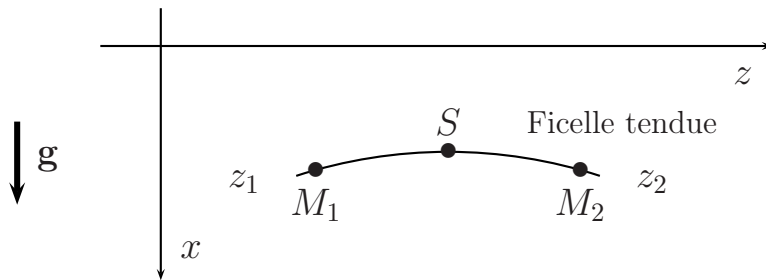
3. En déduire le lien entre x et p .

4. En déduire que la vitesse de la lumière est bien constante et égale à C lorsqu'elle est mesurée localement avec des règles étalons et des horloges étalons, tandis que, vue de l'extérieur, la lumière a une progression plus lente, ceci étant dû d'une part au ralentissement du temps, d'autre part à la contraction des longueurs.

12.2

1. L'équation (12,50) à deux dimensions s'écrit (voir figure ci-dessous) :

$$dl^2 = \left(1 - \frac{2\phi}{C^2}\right) (dx^2 + dz^2)$$



En utilisant les équations de LAGRANGE (10,7), retrouvez la courbure d'une ficelle tendue horizontalement dans un champ de gravitation uniforme vertical, courbure repérée par rapport aux lignes coordonnées $x = Cte$, et calculée au § 22 (figure 12.6 et équation (12,61)).

2. Montrez que la courbure de la trajectoire parcourue par de la lumière se propageant horizontalement a le double de cette valeur. Que conclure ?

3. Calculez numériquement la flèche de la ficelle tendue dans le champ de gravité de la Terre, si celle-ci a 10 km de long.

12.3

Montrez que l'on retrouve l'équation (12,57) pour un objet massique animé à l'instant considéré d'une vitesse horizontale, en considérant les ondes de matière de de BROGLIE. Pour cela, on fera un raisonnement analogue à celui du § 21, en utilisant les résultats de l'exercice 4.1 sur le traitement relativiste de la relation $\lambda = \frac{h}{p}$.

12.4

On considère une barre infinie massique animée de la vitesse \mathbf{V} ($V \ll C$) parallèle au support de cette dernière, l'axe des z . Un point M est animé de la vitesse \mathbf{v} ($v \ll C$) perpendiculaire à \mathbf{V} et située dans le plan défini par M et la barre. \mathbf{v} est portée par l'axe des x orienté vers la barre.

1. Calculez $\frac{d^2z}{dt^2}$.

2. Montrez que l'on peut interpréter l'accélération de M comme étant due à la force $\mathbf{F} = mC \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}_G$. \mathbf{B}_G est le champ de l'effet magnétique de la gravitation (voir exercice 14.2).

Calculez $\|\mathbf{B}_G\|$, précisez la disposition du vecteur \mathbf{B}_G et comparez avec le magnétisme.

3. Pour la densité volumique de masse ρ_M animée de la vitesse \mathbf{V} , on pose : $\mathbf{j}_G = \rho_M C \mathbf{V}$. Donnez la formule analogue de $\mathbf{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ de la magnétostatique.

12.5

On veut dans cet exercice vérifier dans un cas particulier les formules (12,21), (12,28) et (12,29). Pour cela, on considère les référentiels \mathcal{R} et $\bar{\mathcal{R}}$ du paragraphe 18, mais le temps de $\bar{\mathcal{R}}$ est mesuré par t , le temps de \mathcal{R} ; ainsi : $u^0 = t$; $u^1 = \bar{x}$; $u^2 = \bar{y}$; $u^3 = \bar{z}$.

1. Exprimez le ds^2 avec les coordonnées u^α .
2. Vérifiez les formules (12,21), (12,28) et (12,29).

12.6

Dans cet exercice, on veut réaliser complètement le programme du § 12 du chapitre 11 sur un exemple concret de Relativité générale. Les notations sont les mêmes que dans l'exercice 12.2

1. Montrez que l'on peut prendre $\phi = 0$ dans l'expression du ds^2 à l'altitude considérée dans le champ de gravité uniforme; ce qu'on fera dans toute la suite.
2. Calculez tous les symboles de CHRISTOFFEL non nuls (on ne fait pas intervenir la variable y).

3. On considère les coordonnées $u^\alpha = t, x, z$ ($\alpha = 0, 1, 2$); et au point O à l'instant $t = 0$; c'est à dire en l'évènement :

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{(u^\alpha)}$$

la base :

$$\begin{aligned} \vec{e}_{\bar{t}}(\mathcal{O}) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{(u^\alpha)} = \vec{e}_t(\mathcal{O}) \\ \vec{e}_{\bar{x}}(\mathcal{O}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{(u^\alpha)} = \vec{e}_x(\mathcal{O}) \\ \vec{e}_{\bar{z}}(\mathcal{O}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{(u^\alpha)} = \vec{e}_z(\mathcal{O}) \end{aligned}$$

Cette base est transportée **parallèlement à elle-même**. Calculez les composantes, avec les coordonnées u^α , des trois vecteurs de base au point :

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} t \\ x \\ z \end{pmatrix}_{(u^\alpha)}$$

Interprétez physiquement les résultats obtenus.

4. Déterminez maintenant les vecteurs de la base duale par leur transport parallèle depuis l'origine ; et vérifiez que $e^{*\beta}(\vec{e}_\alpha) = \delta^\beta_\alpha$.

Interprétez physiquement les résultats obtenus.

5. Écrivez les équations (11,15) correspondantes. Vérifiez que le système est compatible, et calculez les coordonnées rectilignes $\bar{t}, \bar{x}, \bar{z}$.

Interprétation physique des résultats.

12.7

Montrez que l'égalité :

$$F_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\beta}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial u^\beta}$$

est covariante sans avoir à utiliser les symboles de CHRISTOFFEL. $F_{\alpha\beta}$ est la *différentielle extérieure* du champ de formes linéaires A_α .

12.8

On considère la métrique (12,41).

1. Montrez que l'on peut introduire un nouveau vecteur champ électrique $\mathbf{E}' = \frac{\mathbf{E}}{U^0}$ (\mathbf{E} est le champ électrique habituel) et un vecteur excitation électrique \mathbf{D} :

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \frac{\mathbf{E}'}{\sqrt{1 + \frac{2\phi}{C^2}}} = \varepsilon \mathbf{E}'$$

tels que les équations de l'électrostatique s'écrivent :

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \mathbf{E}' &= \mathbf{0} \\ \mathbf{div} \mathbf{D} &= \rho \end{aligned}$$

On utilisera les équations (12,6) et (12,7) ainsi que le résultat de l'exercice 12.7. Conclusion ?

2. On considère une charge ponctuelle $+q$ placée dans le vide où règne la métrique (12,41). Dans cette question et dans toute la suite, on suppose d'autre part que règne un champ de gravitation uniforme. On reprend le repère des

exercices 12.2 et 12.6 complétés avec l'axe des y et on a donc $\phi = -gx$. Donnez l'allure des lignes de champ du champ électrique.

3. On considère deux charges identiques $+q$ placées sur une même horizontale et séparées par la distance d . Montrez qu'il résulte de la question 2 que chaque charge est soumise à une force électrostatique dirigée vers le bas que l'on calculera après l'avoir interprétée physiquement.

4. On désire maintenant calculer le champ $\mathbf{E}(x, y, z)$. Pour cela, on utilise le principe d'équivalence. On rappelle la formule :

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - \frac{v^2}{C^2}}{\left(r - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}}{C}\right)^3} \left(\mathbf{r} - r\frac{\mathbf{v}}{C}\right) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 C^2} \frac{1}{\left(r - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}}{C}\right)^3} \mathbf{r} \wedge \left\{ \left(\mathbf{r} - r\frac{\mathbf{v}}{C}\right) \wedge \dot{\mathbf{v}} \right\}$$

pour le champ créé par une charge dont la vitesse est \mathbf{v} . $\dot{\mathbf{v}}$ est la dérivée de cette vitesse. \mathbf{r} est le rayon vecteur mené de la charge au point où on évalue le champ électrique. Les quantités à droite sont prises à l'instant $t' < t$ tel que $C = \frac{\|\mathbf{r}\|}{t-t'}$, pour le calcul du champ $\mathbf{E}(t)$.

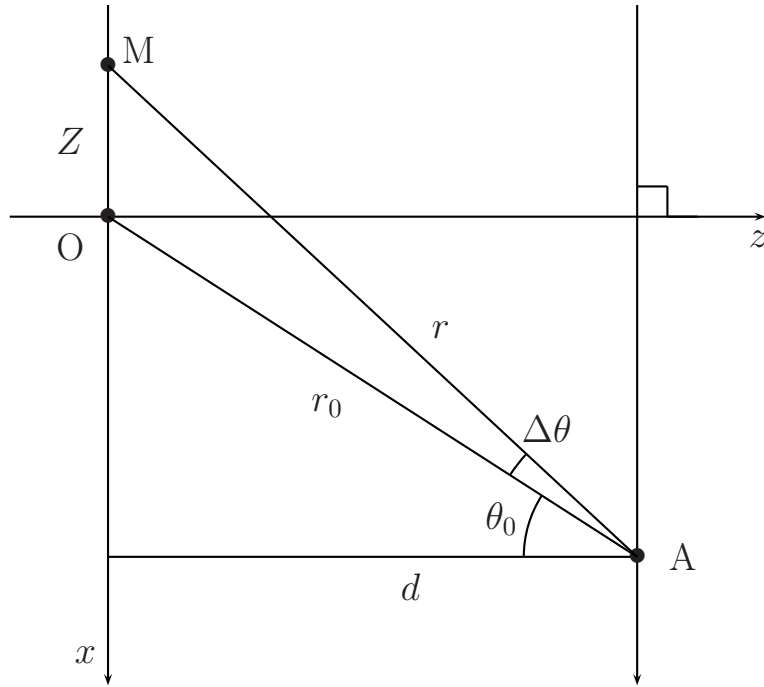
On pourra procéder comme suit :

Dans le référentiel précédent, on considère maintenant que la gravitation est nulle. On considère alors une charge q en M , accélérée, de coordonnées :

$$\begin{cases} x &= -\frac{1}{2}gt^2 = Z \\ y &= 0 \\ z &= 0 \end{cases}$$

et on évalue le champ électrique au point : A $\begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}$. à l'instant $t = 0$. La

figure ci-dessous est faite pour $y = 0$.



5. Montrez que le calcul de la question précédente permet de retrouver la relation $\mathcal{E} = mC^2$ de la relativité restreinte.

6. Vérifiez que le champ électrique calculé est bien solution des équations de l'électrostatique dans le champ de gravitation.

7. Interprétez physiquement le terme :

$$\frac{qgx^2}{8\pi\epsilon_0 C^2 (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

de la composante en x du champ électrique trouvée à la question 4, en prenant l'exemple de deux charges situées sur une même verticale.

8. On demande le même type d'interprétation des composantes de \mathbf{E} , mais dans le cas où les deux charges ne sont pas situées sur une même verticale.