Chapitre Treize

LOI DE FORCE EN RELATIVITÉ GÉNÉRALE

1. Introduction. - Nous étudions maintenant le deuxième volet de la Relativité générale, c'est à dire la loi de force, ou comment le tenseur d'impulsion-énergie crée la gravitation en déformant l'espace d'une manière intrinsèque. Cette loi consiste en *l'équation du champ* d'EINSTEIN. Nous allons voir que nous l'obtenons nécessairement et sans ambigüité avec le principe d'équivalence au sens fort. À l'issue de ce chapitre, la Relativité générale sera donc complètement établie, et nous n'aurons plus qu'à en développer les différentes conséquences.

Rappelons que nous avons vu au § 14 du chapitre 7 que le tenseur d'impulsion-énergie est la source de l'interaction gravitationnelle.

Nous avons vu d'autre part au § 2 du chapitre 7 puis à la fin du § 3 du chapitre 7 que la présence d'un champ de gravitation créé par des astres doit se traduire par la présence d'une courbure de l'espace-temps. Nous avons reprit cette idée à la fin du § 2 du chapitre 12 avec plus de précision, en affirmant que la description d'un champ de gravité doit se faire avec le tenseur de courbure. Ainsi, la déformation intrinsèque de l'espace liée à un champ de gravitation doit être caractérisée par la présence d'un tenseur de courbure non nul.

Nous concluons déjà de tout cela que l'équation du champ d'EINSTEIN doit relier le tenseur d'impulsion-énergie au tenseur de courbure. Mais voyons ci-dessous d'autres arguments ; tout cela nous amenant peu à peu à la forme exacte de l'équation du champ.

2. Première indication sur la forme des équations. - Nous allons dans un premier temps nous restreindre a l'équation du champ dans une région de l'espace où le tenseur d'impulsion-énergie est nul, ce que nous appellerons un espace vide (vide de matière et d'énergie). Nous savons que dans ce cas, en Mécanique newtonienne, l'équation déterminant la gravitation est :

$$\Delta\phi = \nabla^2\phi = \sum_{i=1,3} \frac{\partial^2\phi}{(\partial x^i)^2} = 0 \qquad (13,1)$$

ϕ est le potentiel gravitationnel précédemment utilisé. Le potentiel ϕ étant défini dans tout l'espace constitue un champ scalaire, l'équation ci-dessus peut donc être appelée *l'équation du champ de* NEWTON. Cette équation de NEWTON est une bonne approximation lorsque les champs sont faibles. Or dans ce cas, nous avons vu que nous devons avoir l'équation (12,38) :

$$g_{00} \simeq 1 + \frac{2\phi}{C^2}$$

L'équation du champ doit donc se réduire à :

$$\sum_{i=1,3} \frac{\partial^2 g_{00}}{(\partial x^i)^2} = 0 \tag{13,2}$$

À cause de la tensorialité des équations du champ, nécessaire car nous voulons que le tenseur d'impulsion-énergie intervienne, nous en déduisons donc que les dérivées secondes de toutes les composantes de $g_{\alpha\beta}$ doivent apparaître. De plus, la sommation sur l'indice i de l'équation (13,2) correspond pour une égalité tensorielle à une contraction. Nous savons que le tenseur de courbure s'exprime justement avec les dérivées secondes du tenseur métrique. Nous sommes donc encore amené à penser que le tenseur de courbure doit intervenir dans l'équation du champ, et plus précisément une forme contractée de ce tenseur. On est donc amené à penser au tenseur de RICCI.

3. Cas limite de l'espace plat de la Relativité restreinte. - Une solution de l'équation du champ lorsque le tenseur d'impulsion-énergie est nul est l'espace plat de la Relativité restreinte. Nous savons que la caractéristique d'un tel espace est :

$$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} \ = \ 0 \tag{13,3}$$

Cependant, près d'un astre et en dehors de cet astre, le tenseur d'impulsion-énergie est nul bien que l'espace soit courbé car déformé par l'astre. L'équation du champ dans l'espace libre doit donc avoir comme solution particulière (13,3), mais doit être plus générale que cette dernière équation, de façon à permettre d'autre solutions que celle de l'espace plat. En bref, nous devons d'une certaine manière affaiblir l'équation (13,3). Cependant, l'intervention de l'équation (13,3) pour l'espace plat solution de l'équation du champ, nous incline encore à penser que le tenseur de courbure doit intervenir d'une certaine manière dans l'équation du champ.

4. L'équation du champ en espace vide. - Résumons nous : l'équation du champ en espace vide doit faire intervenir le tenseur de courbure, doit être une version affaiblie de la nullité de ce tenseur, et doit faire intervenir une contraction.

Heureusement, il n'y a qu'une forme contractée du tenseur de courbure au signe près, c'est le tenseur de RICCI.

Nous postulons donc que l'équation du champ en espace vide est :

$$R_{\alpha\beta} = 0 \qquad (13,4)$$

5. Confirmation de l'équation du champ : utilisation de l'expression du tenseur de courbure. - Nous allons montrer dans ce paragraphe et le suivant, par deux méthodes différentes que le principe de covariance généralisée permet de confirmer la validité de l'équation du champ précédemment trouvée. Il ne permet cependant pas de la démontrer.

Il nous faut tout d'abord resituer ce principe dans le cas de la gravitation. Nous prenons évidemment le principe au sens fort de façon à ce qu'il s'applique à la gravitation elle même. Si nous relisons le § 4 du chapitre 7, nous voyons que le principe de covariance généralisée stipule qu'une équation est vraie si elle est généralement covariante et si elle est vraie dans un référentiel galiléen en l'absence de gravitation. Tel quel, ce principe est inapplicable, car il est impossible de vérifier la validité d'une équation concernant la gravitation en l'absence de gravitation.

Il nous faut remplacer le terme *absence de gravitation, par approximation newtonienne*; c'est à dire : gravitation faible et champs gravitationnels pratiquement constants. Précisons pourquoi nous devons considérer des champs gravitationnels pratiquement constants et ce que cela signifie :

Nous pouvons en effet considérer des champs gravitationnels variables, mais traités avec une bonne approximation avec les équations de la Relativité générale en champs constants. En Mécanique newtonienne, nous ne disposons pas d'équation de propagation du champ. Cela revient à dire qu'on suppose une propagation à vitesse infinie devant les autres vitesses considérées. La loi de la gravitation universelle prend en effet en compte la position des masses à l'instant considéré, quelles que soient leurs distances, et ne tient pas compte de leurs vitesses. Pour que cette approximation soit valable, il faut que les masses créant la gravitation soient animées de vitesses faibles devant celle de la lumière dont nous verrons qu'elle est la vitesse de propagation réelle du champ gravitationnel. Comment fait-on pour calculer le champ ? On fait une "photo" de la répartition des masses à l'instant considéré, et on calcul le champ avec l'équation de NEWTON en considérant que toutes les masses sont immobiles. Ainsi, nous ne voulons pas dire que le champ ne varie pas, nous voulons dire que sa structure spatiale, sa valeur en tous les points de l'espace, est cohérente à chaque instant avec l'équation du champ de Newton et qu'il pourrait rester constant avec ces valeurs, tout étant immobile par ailleurs, sans contredire cette équation. Cela implique qu'en ce qui concerne les équations de la Relativité générale, il faut les considérer à champs constants. Toutes les composantes intervenant uniquement dans les champs non constants étant négligeables.

Avec cet aménagement, le principe de covariance généralisé appliqué à la gravitation permet-il de prouver l'équation du champ, l'approximation newtonienne étant supposée vraie ? À cause du principe d'équivalence, l'équation du champ doit être généralement covariante, tout système de coordonnées étant valable pour les écrire. Si dans un référentiel où l'approximation newtonienne est valable, elle donne des égalités entre composantes de tenseurs et que ces égalités sont identiques à l'équation de la gravitation newtonienne, alors c'est la seule équation généralement covariante ayant cette propriété. En effet, avec le principe de covariance généralisée, d'une égalité entre composantes de tenseurs dans un référentiel, on en déduit l'égalité complète des tenseurs. Il faut donc admettre que ces équations généralement covariantes sont les équations cherchées . Rappelons que nous sommes amenés à prendre des équations entre tenseurs car nous sommes convaincus que c'est le tenseur d'impulsion-énergie qui est à l'origine de la gravitation.

Cependant, le point faible de la démonstration précédente vient du fait que cette fois nous ne nous plaçons pas dans un référentiel où la gravitation est nulle. Nous nous plaçons dans un référentiel où elle est faible. L'équation que l'on obtient, équation du champ de Newton n'est pas rigoureusement exacte (les seules équations rigoureusement exacte de la gravitation seront justement les équations de la Relativité générale) ; il est alors vain de chercher l'identité avec cette équation approximative. Dans le cadre de l'approximation newtonienne, nous n'aurons donc pas identité entre deux équations. Si notre équation du champ est supposée exacte, elle ne pourra qu'être voisine de l'équation de Newton qui n'est qu'approximative ! Nous aurons donc deux équations donnant à peu près la même chose. Rien ne prouve qu'une autre équation covariante ne serait pas également voisine de l'équation de Newton dans cette approximation. Nous ne serons donc jamais sur d'avoir trouvé la seule équation covariante possible.

Il nous faudra donc ajouter pour être convaincu un argument de simplicité et d'esthétique. Nous prendrons l'équation covariante la plus simple qui marche. Dans le cas d'application du principe de covariance généralisé à autre chose que la gravitation, on annulait totalement la gravitation dans le référentiel galiléen et il s'agissait alors d'une identité entre équations. Ainsi, les équations de Maxwell sont supposées totalement exacte dans un référentiel galiléen (dans le cadre de l'électrodynamique classique). Les équations covariantes correspondantes (12,6) et (12,7) sont alors uniques.

Ce que nous venons de dire est cependant teinté de positivisme ; en effet cela est basé sur des équations qui sont dévalorisées parce qu'elles sont approximatives ; mais toutes les équations ne sont-elles pas approximatives ? Nous plaçant dans la perspective réaliste, nous pouvons faire le raisonnement suivant : l'équation du champ de NEWTON peut être considérée comme décrivant parfaitement la réalité de la gravitation lorsque les effets de la Relativité générale (masse importante ou vitesse voisine de celle de la lumière) tendent vers 0. L'équation covariante la plus simple redonnant dans ces conditions cette équation sera alors la solution.

Venons en au calcul proprement dit : le tenseur de courbure s'exprime avec (11,14) en fonction des dérivées des symboles de CHRISTOFFEL et des produits deux à deux de tels symboles. Si nous sommes en champ faibles, nous sommes très proche d'être dans un référentiel galiléen où les symboles de CHRISTOFFEL sont nuls. Ils doivent donc être très faibles. Nous pouvons donc garder simplement la partie linéaire en ces symboles du tenseur de courbure et prendre l'équation (11,19). On arrive à (11,22) que nous écrivons ici avec d'autres indices muets :

$$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} \simeq \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} \left(-g_{\lambda\delta,\beta\gamma} + g_{\lambda\gamma,\beta\delta} - g_{\beta\gamma,\lambda\delta} + g_{\beta\delta,\lambda\gamma}\right) \tag{13,5}$$

$$R^{i}{}_{0j0} = \frac{1}{2} g^{ii} \left(g_{00,ij}\right) \tag{13,6}$$

En effet, seul g^{ii} est non nul, le champ étant supposé constant. D'autre part, toutes les dérivées du tenseur métrique contenant une dérivation par rapport à x^0 sont nulles. Puis :

$$g_{00} \simeq \left(1 + \frac{2\phi}{C^2}\right)$$

$$R^{i}{}_{0j0} = -\frac{1}{2}\frac{2}{C^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^j \partial x^i}$$

$$R^{i}{}_{0i0} = -\frac{1}{C^2}\sum_{i=1,3}\frac{\partial^2\phi}{(\partial x^i)^2} = 0$$

(11,25) implique $R_{0000} = 0$; puis :

$$0 = R_{0000} = g_{00}\, R^{0}{}_{000} + \underbrace{g_{0i}}_{(=0\text{ , champ constant})}\, R^{i}{}_{000} \quad \Rightarrow \quad R^{0}{}_{000} = 0$$

On trouve donc :

$$R_{00} = R^{\alpha}{}_{0\alpha 0} = -\frac{1}{C^2}\,\nabla^2\phi = 0 \tag{13,7}$$

Notons que $R^{00} \simeq R_{00}$; on peut donc tout aussi bien écrire $R^{00} = 0$. Récapitulons : lorsque l'approximation newtonienne s'applique, l'équation du champ de NEWTON s'écrit $R_{00} = 0$.

Supposons cette équation rigoureusement vraie, et ce n'est qu'une supposition ; les équations $R_{\alpha\beta} = 0$ étant généralement covariante, et donnant l'équation du champ de NEWTON lorsque celle-ci est vraie, sont vraies à cause du principe de covariance généralisé. Nous pouvons bien sûr utiliser les composantes contravariantes et écrire :

$$R^{\alpha\beta} = 0 \tag{13,8}$$

6. Utilisation de l'équation de déviation des géodésiques. - Nous montrons dans ce paragraphe la validité de l'équation du champ en espace vide, en utilisant le principe de covariance généralisé avec l'équation donnant la déviation des géodésiques (11,42) ; ceci dans le cadre de l'approximation newtonienne. La gravité étant supposée faible, les symboles de CHRISTOFFEL voisins de 0 sont négligés (On peut les rendre nuls au point considéré en prenant le référentiel galiléen local en ce point). La dérivée covariante est alors pratiquement égale à la dérivée ordinaire.

$$\frac{d^2(\delta x^{\alpha})}{d\tau^2} = R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}\;\delta x^{\gamma}\,\frac{dx^{\beta}}{d\tau}\frac{dx^{\delta}}{d\tau} \tag{13,9}$$

On considère deux points matériels libres, c'est à dire soumis uniquement à la gravitation, qui suivent deux géodésiques voisines. Ils sont considérés simultanéments au départ et les deux évènements qu'ils constituent alors vérifient $\delta x^0 = 0$. L'équation de déviation des géodésiques donne le suivi de la séparation spatiale et temporelle des deux points matériels pris à des intervalles de temps propre égaux sur chaque géodésique. Le temps ne s'écoulant pas tout à fait à la même vitesse sur les deux géodésiques, ultérieurement, les deux points ne seront plus tout à fait considérés à des instants identiques, et en toute rigueur $\delta x^0 \neq 0$. Mais étant donné que $\delta x^0 = 0$ au départ, on aura toujours $\delta x^0 \simeq 0$.

Intéressons nous alors à leur séparation spatiale δx^i avec $i = 1, 3$. Les points matériels ayant une vitesse faible devant celle de la lumière $\frac{dx^j}{d\tau} = \varepsilon C$ avec $\varepsilon \ll 1$ et $d\tau \simeq dt$.

Les composantes du tenseur de courbure étant toutes supposées du même ordre de grandeur, seul les termes avec $\beta = \delta = 0$ interviennent en liaison avec $\frac{dx^0}{d\tau} = C\frac{dt}{d\tau} \simeq C$. Les autre termes faisant intervenir $\frac{dx^j}{d\tau}$ sont négligeables.

Puisque $\delta x^0 \simeq 0$, le terme avec $\gamma = 0$ est nul. On obtient :

$$\frac{d^2(\delta x^i)}{dt^2} = R^i{}_{0j0}\ \delta x^j\, C^2$$

D'autre part :

$$\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{\mathbf{F}(M)}{m} = \mathbf{g}(M)$$
$$\frac{d^2\overrightarrow{OM'}}{dt^2} = \mathbf{g}(M')$$

$$\frac{d^2(\delta x^i)}{dt^2} = \mathbf{g}^i(M') - \mathbf{g}^i(M) = -\frac{\partial\phi}{\partial x^i}(M') + \frac{\partial\phi}{\partial x^i}(M)$$
$$\frac{d^2(\delta x^i)}{dt^2} = -\frac{\partial^2\phi}{\partial x^j\partial x^i}\,\delta x^j$$

On trouve :

$$R^i{}_{0j0} = -\frac{1}{C^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^j\partial x^i} \qquad (13,10)$$

qu'on a obtenu au § 5.

$$\text{donc} \qquad R_{00} = R^\alpha{}_{0\alpha 0} = R^0{}_{000} + R^i{}_{0i0} = -\frac{1}{C^2}\,\nabla^2\phi = 0$$

7. Calcul de trois composantes du tenseur de courbure à la surface de la Terre. - Soit a le rayon de la Terre. Considérons deux points matériels M et M' immobiles à la surface de celle-ci (à la même altitude) et séparés par la distance horizontale δx correspondant à l'axe $\mathbf{x}$. La hauteur au dessus de la surface terrestre est appelée z et correspond à l'axe $\mathbf{z}$ orienté vers le haut (fig. 13.1) :

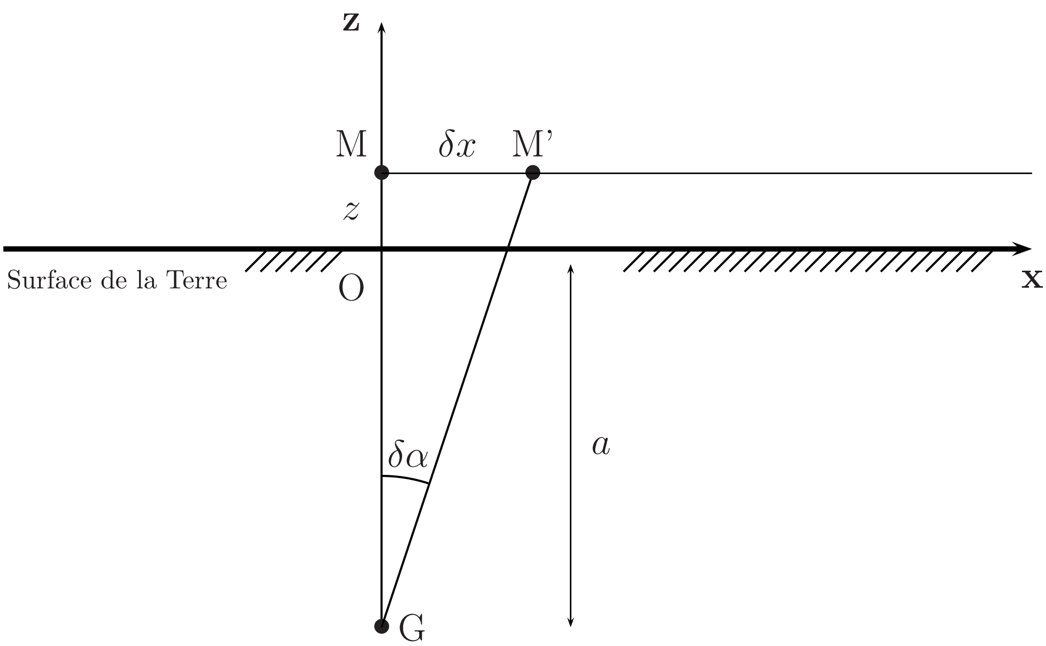


Fig. 13.1

Il correspond à la distance horizontale un angle $\delta\alpha$ des deux rayons GM et GM'.

Les points étant abandonnés en même temps en chute libre, vont se diriger vers le centre de la Terre et donc se mettre à se rapprocher (puisque qu'ils coïncideraient une fois arrivés au centre de la Terre G). Nous gardons ci-dessous, comme cela a déjà été souvent fait précédemment, le symbole 0 pour indiquer une composante temporelle, tandis que nous mettons x pour $i = 1$, y pour $i = 2$ et z pour $i = 3$. On a :

$$z = -\frac{1}{2} g t^2 \qquad ; \qquad \delta x = (a + z)\, \delta\alpha$$

$$\frac{d^2(\delta x)}{dt^2} = \delta\alpha \frac{d^2 z}{dt^2} = -\delta\alpha\, g = -\frac{\delta x}{a} g = R^x{}_{0x0}\, \delta x\, C^2$$

$$R^x{}_{0x0} = -\frac{g}{a\, C^2} \tag{13,11}$$

Effectuons l'application numérique :

$$a = 6400\ 10^3\, m \ ;\ C = 3\ 10^8\, m/s\, ;\ g = 9.81\, m/s^2$$

$$R^x{}_{0x0} = 1.7\ 10^{-23}\, m^{-2}$$

Ce qui est une valeur très faible. Pour avoir une surface où $R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}$ devienne non négligeable, il faut un carré de côté $\sqrt{10^{23}} = 3.16\ 10^{11}\, m$; soit 17.5 minutes lumière.

Considérons maintenant deux points M et M' situés sur la même verticale au voisinage de la surface de la Terre et séparés par la hauteur δz. Le point le plus près de la Terre sera attiré le plus fortement et accélèrera le plus. Cette fois-ci, la distance des deux points augmentera ce qui correspond à une composante positive du tenseur de courbure. G est la constante de la gravitation universelle et M_T la masse de la Terre.

$$\frac{d^2(\delta z)}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(z + \delta z) - \frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{G M_T}{(a + \delta z)^2} + \frac{G M_T}{a^2}$$

$$= \ 2\, \frac{G M_T}{a^3}\, \delta z = 2\, \frac{g}{a}\, \delta z = R^z{}_{0z0}\ \delta z\, C^2$$

$$R^z{}_{0z0} \ = \ 2\, \frac{g}{a\, C^2} \tag{13,12}$$

Prenons l'axe $\mathbf{y}$ horizontal complétant le repère de façon à avoir le trièdre direct $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$. Puisque l'axe $\mathbf{y}$ joue un rôle tout à fait analogue à l'axe $\mathbf{x}$, on a :

$$R^y{}_{0y0} \ = \ -\frac{g}{a\, C^2} \tag{13,13}$$

On vérifie bien que :

$$R^\alpha{}_{0\alpha 0} = R_{00} = 0 \quad ; \qquad \text{en effet :}$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
R^0{}_{000} & + & R^x{}_{0x0} & + & R^y{}_{0y0} & + & R^z{}_{0z0} & = R_{00} & = 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & & \frac{-g}{aC^2} & & \frac{-g}{aC^2} & & \frac{+2g}{aC^2} & &
\end{array}
\qquad (13,14)
$$

Conclusion : on voit que l'équation de déviation des géodésiques décrit les effets de marées qui sont liés à une valeur non nulle du tenseur de courbure. Ainsi, on peut distinguer un champ gravitationnel réel d'un champ d'inertie par les effets de marée qu'il crée et qui correspondent à la valeur non nulle du tenseur de courbure. Cela nécessite la présence d'au moins deux corps d'épreuve. On voit que plus la distance à l'astre est grande, plus les effets de marée sont petits. Cela justifie intuitivement que pour les champs d'inertie qui sont dus uniquement à l'action gravitationnelle des galaxies lointaines, les effets de marée soient nuls. Le tenseur de courbure est alors nul et l'espace-temps est plat. Cela n'est pas dû au fait que l'action gravitationnelle des galaxies lointaines obéit à une loi différente des autres actions gravitationnelles. Cela est dû, comme nous l'avons déjà remarqué (§ 12 du chapitre 6) à la disposition particulière de ces galaxies : répartition homogène et isotrope, le mouvement des galaxies les unes par rapport aux autres étant faible dans une région limitée de l'espace par rapport aux dimensions de cette région.

Nous verrons avec plus de précision dans le chapitre sur la cosmologie relativiste la structure à grande échelle de l'espace-temps. Si celui-ci n'est pas plat, il peut être considéré comme tel dans une région de la grandeur du système solaire et pour des durées de quelques années par exemple.

8. L'équation du champ en espace non vide. - Nous étudions maintenant l'équation du champ lorsque de la matière et de l'énergie sont présentes, donc lorsque le tenseur d'impulsion-énergie est non nul. Dans le cas de l'approximation newtonienne, l'équation (13,1) est à remplacer par :

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho \qquad (13,15)$$

ρ étant la masse volumique de matière présente. On a toujours :

$$R_{00} = R^{00} = -\frac{\nabla^2\phi}{C^2} \quad ; \quad \text{or} \quad \rho = \frac{T_{00}}{C^2} = \frac{T^{00}}{C^2}$$

Cette équation corespond donc à :

$$R^{00} = -\frac{4\pi G}{C^4}T^{00}$$

Nous sommes donc tentés d'écrire l'équation du champ dans le cas général sous la forme :

$$R^{\alpha\beta} = -\frac{4\pi G}{C^4}T^{\alpha\beta} \qquad (13,16)$$

Malheureusement, $T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$ tandis que $R^{\alpha\beta}{}_{;\beta} \neq 0$. Cette équation ne peut donc convenir. Nous sommes donc amené à rechercher une autre équation. Nous cherchons un tenseur faisant intervenir le tenseur de RICCI et de divergence nulle. Heureusement le tenseur d'EINSTEIN vérifie cette propriété :

$$G^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R \quad ; \quad \text{et} \quad G^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$$

Nous écrirons donc l'équation du champ :

$$R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R \,=\, K\, T^{\alpha\beta}$$

K étant une constante à déterminer en cherchant à retrouver l'équation de NEWTON dans le cas où elle s'applique. Dans ce cas, on trouve :

$$R^{00} - \frac{1}{2} g^{00} R = K T^{00}$$

$$g^{00} \simeq 1 \quad ; \quad R^{00} - \frac{R}{2} = K T^{00}$$

or, dans l'approximation newtonienne : $|T^{ij}| \ll |T^{00}|$.

Ceci est obtenu en considérant les équations (8,8) et (8,13).

$$\text{et} \qquad R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} R = K T^{ij} \simeq 0 \quad \Rightarrow \quad R^{ij} \simeq \frac{1}{2} g^{ij} R$$

$$\text{enfin} \qquad g_{\alpha\beta} \simeq \eta_{\alpha\beta} \qquad \text{et :}$$

$$R \simeq \eta_{\alpha\beta}\, R^{\alpha\beta} = R^{00} - \sum_{i=1,3} R^{ii} \simeq R^{00} + \frac{3}{2} R$$

$$R \simeq -2\, R^{00}$$

$$\text{Il vient :} \qquad R^{00} + R^{00} = 2R^{00} = K\, T^{00}$$

$$-\frac{8\pi G}{C^4} T^{00} \,=\, K\, T^{00}$$

Cela marche donc avec $K = -\frac{8\pi G}{C^4}$. On arrive à :

$$R^{\alpha\beta} \,-\, \frac{1}{2}\, g^{\alpha\beta}\, R \,=\, -\frac{8\pi G}{C^4}\, T^{\alpha\beta} \qquad (13,17)$$

C'est l'équation du champ d'EINSTEIN.

Cependant le tenseur :

$$R^{\alpha\beta} \,-\, \frac{1}{2}\, g^{\alpha\beta}\, R \,+ \Lambda\, g^{\alpha\beta}$$

est également de divergence nulle puisque la divergence du tenseur métrique est nulle.

Nous pourrions donc écrire l'équation du champ en ajoutant ce dernier terme. Λ s'appelle la *constante cosmologique*. Son nom vient du fait que c'est EINSTEIN qui l'introduisit de façon à avoir une solution statique pour l'univers dans les modèles cosmologiques. Les modèles avec $\Lambda = 0$ impliquent en effet l'impossibilité d'un univers stationnaire et amènent donc à la théorie du Big Bang. EINSTEIN aurait donc pu prévoir le Big Bang dès 1916. Mais à cette époque, l'idée d'un univers éternel et immobile était bien ancrée dans les mentalités, et l'idée d'un Big Bang impliquant une création avait un côté religieux assez mal vu.

EINSTEIN appela plus tard l'introduction de cette constante la plus grande erreur de sa vie.

Les théories modernes de physique des particules attribuent au vide des propriétés intrinsèques (création permanente de particules virtuelles) de telle manière qu'il est possible d'attribuer au vide un tenseur d'impulsion-énergie. Dans ce cadre, l'expression $\frac{C^4}{8\pi G}\Lambda g^{\alpha\beta}$ correspond au tenseur d'impulsion-énergie du vide. Avec des coordonnées telles que $g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta}$, on voit que le vide correspond à un fluide parfait avec $\rho C^2 = -p = \frac{\Lambda C^4}{8\pi G}$. L'expression $\rho + \frac{3p}{C^2}$ de l'exercice 13.2 est alors négative et le vide se comporte comme un milieu répulsif du point de vue de la gravitation. D'où les phases *d'inflations* de l'univers lorsque $\Lambda > 0$ (faux vide dans un état métastable d'énergie au moment des brisures de symétrie des interactions). Il semble actuellement que l'expansion de l'Univers s'accélère, ceci étant lié au fait que le vide contient une *énergie noire*, et se comporte comme un milieu répulsif. Cette énergie noire fait que Λ est différente de 0.

Il faut noter tout de même que l'équation (13,17) redonne l'équation de NEWTON avec une précision extraordinaire, et qu'il faut prendre Λ extrêmement petite de façon à ce que ce terme n'interfère pas avec le succès de la théorie newtonienne. Autrement dit, Λ correspond à un nouvel effet gravitationnel, et si nous supposons que la Théorie newtonienne est parfaite dans son cadre d'approximation, cela implique que $\Lambda = 0$.

L'introduction de Λ amène de plus un paramètre nouveau dont la valeur doit être choisie de manière ad hoc, et n'est pas fournie par la théorie.

Dans la suite, nous prendrons $\Lambda = 0$. Tous les tests expérimentaux de la Relativité générale (autres que l'expansion accélérée de l'Univers) sont en accord avec cette valeur. Cette épisode de la constante cosmologique nous montre bien cependant que le principe d'équivalence à lui seul ne permet pas de prouver la validité des équations du champ, sans arguments de type réaliste par exemple.

9. Analogie avec l'électromagnétisme. - Nous pouvons poursuivre l'analogie avec l'électromagnétisme faite au § 14 du chapitre 7 (fig. 7.8) ; faite également au § 8 du chapitre 11 (équations (11,14) et (5,79)) ; au § 17 du chapitre 11 (équations (11,38) et (11,39)) et au § 19 du chapitre 11 (équation de déviation des géodésiques (11,42) et (11,43)).

À l'interaction électromagnétique correspond une connexion dont le tenseur de courbure est $F^{\alpha\beta}$ le tenseur électromagnétique. L'équation de création du champ par les charges est (12,7) :

$$F^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = -\mu_0\, j^{\alpha}$$

Examinant le tableau de la figure 7.8, nous prenons $T^{\alpha\beta}$ comme source de l'interaction gravitationnelle, la connexion correspondante ayant le tenseur de courbure $R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}$. L'équation d'EINSTEIN (13,17) est l'analogue de (12,7). D'autre part, l'équation traduisant la conservation de la charge s'écrit : $j^{\alpha}{}_{;\alpha} = 0$ et on a bien vu au § 4 du chapitre 12 que : $F^{\alpha\beta}{}_{;\alpha\beta} = 0$. $F^{\alpha\beta}{}_{;\alpha} = \mu_0\, j^{\beta}$ nécessite en effet $F^{\alpha\beta}{}_{;\alpha\beta} = \mu_0\, j^{\beta}{}_{;\beta} = 0$.

Ces équations sont les analogues de $T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$ traduisant la conservation de l'impulsion-énergie ; $G^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$ et $G^{\alpha\beta} = -\frac{8\pi G}{C^4}\,T^{\alpha\beta}$ (voir également le § 5 du chapitre 8).

10. Accord des équations du champ en espace non vide avec les équations du champ en espace vide. - Il nous faut montrer que l'équation du champ (13,17) redonne bien (13,8) en espace vide. En effet quand $T^{\alpha\beta} = 0$:

$$R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R = 0$$

$$g_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}R = 0 \qquad \text{et} \qquad g_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha}{}_{\alpha} = 4$$

$$R - \frac{1}{2}4R = -R = 0 \qquad \text{et : } R^{\alpha\beta} = 0$$

11. Non linéarité de l'équation du champ. - La caractéristique fondamentale de l'équation du champ est en effet cette non linéarité. Elle provient de la non linéarité du tenseur de courbure par rapport au tenseur métrique, et de la non linéarité du deuxième terme, comme produit du tenseur métrique par la courbure scalaire elle même non linéaire !

Nous avons déjà mentionné qu'il devait en être ainsi au § 12 du chapitre 6, le principe de superposition ne jouant pas pour la gravitation. Autrement dit, on n'obtient pas une solution de l'équation du champ en ajoutant membre à membre deux solutions.

Comme nous l'avons dit, cela correspond au fait que la gravitation a une action sur elle-même. Ainsi, un champ gravitationnel agit lui-même comme source du champ. Réciproquement, un champ gravitationnel dans une région de l'espace est soumis à une action de la part d'un autre champ gravitationnel.

Cette interaction mutuelle des différents champs gravitationnels en différentes régions de l'espace et l'évolution globale qui en résulte pour le champ gravitationnel total est prise en compte par cette non linéarité de l'équation du champ. L'interaction du champ gravitationnel avec les autres champs d'interactions et avec la matière est prise en compte elle, par l'intervention du tenseur d'impulsion-énergie des autres interactions et de la matière : $T^{\alpha\beta}$ au deuxième membre de l'équation du champ.

Résumons nous : dans le tenseur d'impulsion-énergie $T^{\alpha\beta}$, on fait intervenir l'impulsion-énergie de la matière et de tous les champs d'interaction autres que la gravitation. L'action de la gravitation comme source du champ gravitationnel est prise en compte elle, d'une manière différente par la non linéarité de l'équation du champ.

Il n'est donc pas question de faire intervenir dans $T^{\alpha\beta}$ l'impulsion-énergie de la gravitation elle-même.

Rappelons ici ce qui a été dit au § 5 du chapitre 1 : en terme de particules virtuelles sources de l'interaction, on peut dire qu'un graviton ayant un quadrivecteur impulsion-énergie est lui même sensible à l'interaction gravitationnelle, et est capable d'agir gravitationnellement. Ainsi, la particule médiatrice du champ est elle même chargée. Un graviton est capable lui-même d'émettre et d'absorber des gravitons et d'agir sur d'autres gravitons. Cette interaction entre-elles des particules médiatrices d'un champ est la cause de la non linéarité.

12. La loi dynamique est contenue dans la loi de force. - Considérons une onde gravitationnelle plane correspondant à la propagation en ligne droite de gravitons et arrivant dans le voisinage d'une étoile à l'origine d'un champ gravitationnel intense (fig. 13.2).

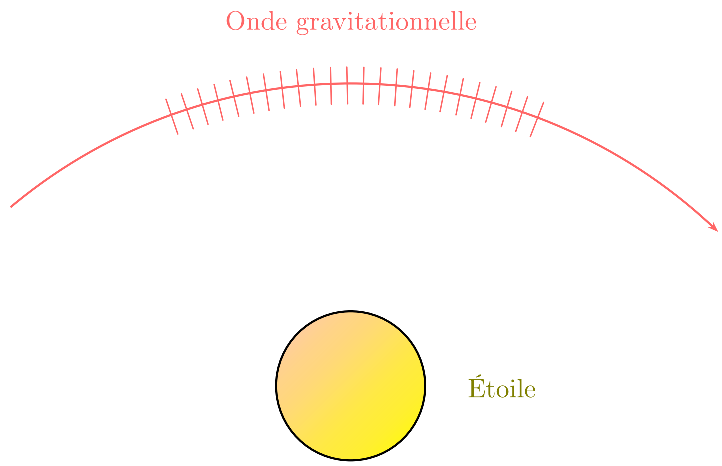


Fig. 13.2

La loi dynamique nous enseigne que le graviton décrit une géodésique de l'espace-temps identique à celle que suivrait un photon placé dans les mêmes conditions, puisque ces deux particules ont une masse nulle, se propagent à la vitesse de la lumière, et doivent tomber de la même manière dans un champ de gravité.

Cela est équivalent à dire qu'une onde gravitationnelle se propage toujours en ligne droite dans un référentiel galiléen, quel que soit son environnement.

Le fait que la gravitation "tombe" comme toutes les autres formes d'énergie suppose, comme nous l'avons vu au § 1 du chapitre 7, le principe d'équivalence au sens fort.

Ce que nous disons là n'est donc pas vrai dans la Théorie de Brans Dicke. Dans cette dernière théorie, au contraire, la gravitation ne tombant pas comme les autres formes d'interactions, l'onde gravitationnelle ne va pas forcément en ligne droite dans un référentiel galiléen. Le graviton a une trajectoire différente du photon.

Dans le cas de la Relativité générale, il résulte de ce qui précède que les gravitons (donc l'onde gravitationnelle) sont déviés en passant au voisinage de l'étoile, exactement comme le serait un rayon lumineux. En Relativité, les interactions s'expriment par des équations locales. Il nous faut interpréter physiquement cette déviation comme une action du champ gravitationnel autour de l'astre et créé par celui-ci sur l'onde gravitationnelle qui est un autre champ gravitationnel. Or l'action locale d'un champ gravitationnel sur un autre est prise en compte complètement par la non linéarité de l'équation du champ.

Dans ce cas particulier, nous voyons donc que la loi dynamique, c'est à dire la déviation de l'onde gravitationnelle est contenue dans la loi de force : l'équation du champ.

Si notre équation du champ est bonne, elle doit donc contenir la loi dynamique pour la gravitation elle-même (gravitons). Nous le vérifierons rigoureusement au § 8 du chapitre 15.

Mais nous le vérifierons également au § 4 du chapitre 14 : en effet, que l'équation du champ implique la loi dynamique, nous pouvons nous en convaincre par le raisonnement suivant reprenant l'étude faite ci-dessus. Considérons donc l'arrivée d'une onde gravitationnelle dans un champ de gravitation. L'équation du champ étant covariante, nous pouvons regarder ce qui se passe dans un ascenseur en chute libre où le champ de gravité de l'étoile est annulé. Dans un tel référentiel, l'onde de gravité est décrite par l'équation (14,10) que nous démontrerons. Les solutions en sont des ondes planes se propageant en lignes droites. La propagation en ligne droite dans un référentiel galiléen assure alors que cette onde est déviée exactement comme la lumière dans un champ de gravité.

Nous sommes alors maintenant amenés à nous demander si l'équation du champ ne contient pas complètement cette loi dynamique. Il nous faut pour cela vérifier qu'elle contient la loi dynamique concernant cette fois-ci la matière et les autres formes d'interactions que l'interaction gravitationnelle.

Nous savons que la dérivée covariante du tenseur d'Einstein est nulle. Cela est une conséquence des identités de Bianchi. C'est une propriété géométrique des variétés différentiables. L'équation du champ implique donc : ${T^{\alpha\beta}}_{;\beta} = 0$.

Ainsi, l'équation du champ contient l'information correspondant au fait que la dérivée covariante du tenseur d'impulsion-énergie est nulle. Quelle est la signification de cette relation ? La relation correspondante en Relativité restreinte et en coordonnées galiléennes est : $\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}}$. Nous avons vu au chapitre 8 qu'elle traduit la conservation du quadrivecteur impulsion-énergie qui correspond pour une particule libre à la propagation en ligne droite et à vitesse constante. En fait, nous avons démontré de deux manières différentes, au § 5 et au § 22 du chapitre 8, que la conservation de ce quadrivecteur impulsion-énergie impliquait cette relation pour le tenseur d'impulsion-énergie.

Pour montrer l'équivalence totale du point de vue contenu d'information physique de ces deux relations, il nous faut démontrer la réciproque, ce sera fait au paragraphe suivant.

Les interactions en Relativité restreinte s'interprètent comme des chocs entre particules virtuelles d'interactions et particules de matière, chocs conservant l'impulsion-énergie. Entre deux chocs, la loi de conservation de cette impulsion-énergie qui correspond à la loi de l'inertie joue. Supposant l'équivalence avec $\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta}$ démontrée, cette dernière équation peut donc s'interpréter comme la loi dynamique en Relativité restreinte. Il est alors clair que la loi correspondante en Relativité générale : ${T^{\alpha\beta}}_{;\beta} = 0$ est la loi dynamique en Relativité énérale pour les particules de matière et les particules d'interactions autres que la gravitation. Le remplacement de la dérivée ordinaire par la dérivée covariante traduit justement l'action d'un champ de gravitation faisant dévier les particules. Nous en arrivons à la conclusion que l'équation du champ qui est la loi de force contient la loi dynamique. Ainsi : toute la Relativité générale se réduit finalement à une seule équation !

Cette équation contient à la fois l'information nous indiquant comment la gravitation est créée et comment cette gravitation agit en retour sur ce qui l'a créé.

On doit donc retrouver, à partir de l'équation du champ, l'égalité entre la masse inerte, la masse active créant la gravitation, et la masse subissant passivement la gravitation. Cela sera fait au § 14 du chapitre 15 et au § 6 du chapitre 16 ; voir également le paragraphe suivant. On voit là la richesse et la beauté de la Relativité générale en tant que Théorie de l'interaction gravitationnelle. Elle atteint un degré d'achèvement supérieur à l'électromagnétisme tel que nous l'avons décrit, où loi de force (comment les charges créent le champ) et loi dynamique (comment les champs appliquent des forces sur la matière) sont deux lois disjointes. Notons que ces deux lois s'unissent en une seule équation dans le formalisme lagrangien de l'électromagnétisme, le Lagrangien total étant somme du Lagrangien du champ, de celui des particules, et du Lagrangien d'interaction entres particules et champs.

Pour nous convaincre totalement que l'équation du champ contient la loi dynamique, nous allons montrer maintenant mathématiquement qu'en impliquant : ${T^{\alpha\beta}}_{;\beta} = 0$, elle impose qu'une particule localisée de matière ou de champ autre que la gravitation a pour trajectoire dans l'espace-temps une géodésique. Pour réaliser ce programme, nous allons démontrer rigoureusement que $\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0$ implique la conservation de l'impulsion-énergie pour une particule localisée !

Cette conservation assurera alors la propagation en ligne droite dans un référentiel galiléen et donc assurera le fait que la trajectoire soit une géodésique (§ 3 du chapitre 12) donc donnera la loi dynamique.

13. Lien entre tenseur d'impulsion-énergie et quadrivecteur impulsion-énergie. - Nous avons vu aux § 5 et § 22 du chapitre 8 que la conservation du quadrivecteur impulsion-énergie impliquait la nullité de la divergence du tenseur d'impulsion-énergie. Nous démontrons ici la réciproque. Nous nous plaçons donc dans l'espace-temps de la Relativité restreinte et utilisons des coordonnées galiléennes types. Nous supposons que le tenseur d'impulsion-énergie vérifie :

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}} = 0$$

Supposons que le tenseur $T^{\alpha\beta}$ soit différent de zéro uniquement dans une région finie de l'espace à chaque instant. Le support de $T^{\alpha\beta}$, c'est à dire la région de l'espace-temps où ce tenseur est non nul peut être enclose dans un cylindre à quatre dimensions $\mathcal{C}$ sur le bord duquel $T^{\alpha\beta} = 0$. Considérons la partie $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$ qui est délimitée par les hypersurfaces (espace à trois dimensions) $\mathcal{E}_i$ à $t = t_i$ et $\mathcal{E}_f$ à $t = t_f$. Le bord de $\mathcal{D}$: $\partial\mathcal{D}$ est constitué d'une part par la partie du bord de $\mathcal{C}$: $\partial\mathcal{C}$ comprise entre $\mathcal{E}_i$ et $\mathcal{E}_f$ sur laquelle $T^{\alpha\beta} = 0$ et par ces deux régions d'espace à trois dimensions : $\mathcal{E}_i$ à l'instant initial t_i et $\mathcal{E}_f$ à l'instant final t_f, sur lesquelles le tenseur est non nul (fig. 13.3). On note $\mathcal{E}_t$ l'hypersurface correspondant à la valeur t comprise entre t_i et t_f. On a : $\mathcal{E}_{t_i} = \mathcal{E}_i$ et $\mathcal{E}_{t_f} = \mathcal{E}_f$.

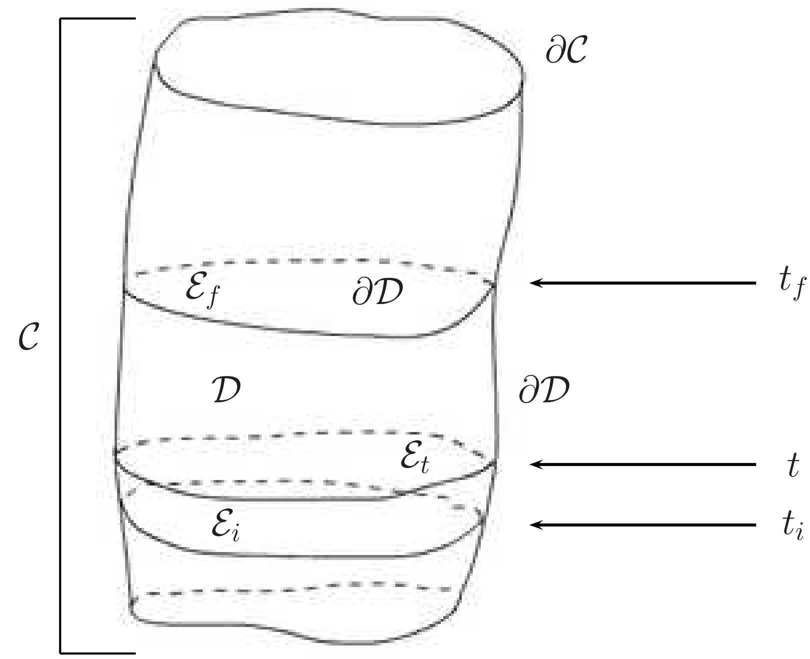


Fig. 13.3

Appliquons le théorème de STOKES dans $\mathcal{D}$ au vecteur $\mathbf{V}^\alpha$ de composantes $(\mathbf{V}^\alpha)^\beta = T^{\alpha\beta}$:

$$\int_{\mathcal{D}} T^{\alpha\beta}{}_{,\beta}\, d^4x \;=\; \sum_{\gamma=0,3} \int_{\partial\mathcal{D}} T^{\alpha\gamma}\, dx^0...dx^\gamma...dx^3$$
$$= \int_{\mathcal{E}_i \bigcup \mathcal{E}_f} T^{\alpha 0}\, d^3x = \int_{\mathcal{E}_f} T^{\alpha 0}\, d^3x - \int_{\mathcal{E}_i} T^{\alpha 0}\, d^3x = 0$$

Sur les domaines $\mathcal{E}_i$ et $\mathcal{E}_f$, seule l'intégrale correspondant à $\gamma = 0$ est en effet non nulle, car $dx^0 = 0$ sur ces domaines. Pour les autres valeurs de γ, il intervient $dx^0 = 0$. Sur le bord $\partial\mathcal{C}$, le tenseur est nul et il ne vient donc aucune contribution de cette région.

Ainsi, le quadrivecteur P^α défini par :

$$P^\alpha = \frac{1}{C} \int_{\mathcal{E}_t} T^{\alpha 0}\, d^3x \qquad (13,18)$$

reste constant si l'on intègre dans un domaine $\mathcal{E}_t$ de l'espace à trois dimensions qui peut changer avec le temps, mais qui est choisi de telle manière que $T^{\alpha\beta}$ soit nul sur sa frontière.

La formule ci-dessus correspond bien à la définition du quadrivecteur impulsion-énergie total à partir de la masse inerte dans le domaine considéré ; en effet, on sait que T^{00} est la densité d'énergie et T^{i0} est égal à C fois la densité d'impulsion (§ 6 du chapitre 8).

Le tenseur d'impulsion-énergie construit avec le paramètre m est source de l'interaction gravitationnelle par l'équation du champ. On voit donc que m intervient comme la masse gravitationnelle active. D'autre part ce paramètre m apparait dans le quadrivecteur impulsion-énergie construit à partir de (13,18) donc correspond à la masse inerte. Nous voyons donc apparaitre déjà l'identité entre masse inerte et masse gravitationnelle active. Cette identité est imposée par notre formulation de l'équation du champ d'une manière assez ad hoc. Nous en reparlerons cependant dans les chapitres suivants, et nous verrons que cette identité correspond à une cohérence profonde de cette équation du champ.

Le système physique inclu dans le domaine est bien isolé mécaniquement de l'extérieur, puisque $T^{\alpha\beta} = 0$ à la frontière, ce qui signifie qu'aucun champ ni aucune particule de matière ne traverse cette frontière. Nous arrivons bien ainsi à la conservation du quadrivecteur impulsion-énergie total du domaine considéré. Il est clair que la propriété précédente est vraie pour tout tenseur de divergence nulle, et amène à la conservation du quadrivecteur correspondant.

14. L'équation du champ contient le fait que les particules décrivent des géodésiques. - Considérons une particule matérielle libre de toute interaction autre que la gravitation (ou une particule de champ autre que le graviton également libre). L'espace-temps est supposé être une variété riemanienne. Il est alors possible de trouver, localement dans l'espace et le temps autour de la particule, un système de coordonnées rectilignes types avec lesquelles les symboles de CHRISTOFFEL sont tous nuls.

L'équation$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$ imposée par l'équation du champ s'écrit avec ce système de coordonnées :

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0$$

La particule considérée est exactement un système physique auquel on peut appliquer les hypothèses du § 13. Du fait qu'elle est libre, on peut en effet l'envelopper dans un domaine sur la frontière duquel $T^{\alpha\beta} = 0$. On arrive alors à :

$$P^\alpha = \frac{1}{C} \int_{\mathcal{E}_t} T^{\alpha 0}\, d^3x \ = Cte \qquad (13,19)$$

La particule est seule dans son domaine. Le quadrivecteur P^α est donc le quadrivecteur impulsion-énergie de la particule. Si il y a plusieurs particules dans le domaine P^α est le quadrivecteur impulsion-énergie total. Si il y a par exemple deux particules dans le domaine considéré subissant un choc, la conservation séparée des deux quadrivecteurs des deux particules avant le choc et du quadrivecteur total pendant le choc assure bien que la masse inerte joue son rôle de mesure de l'inertie lors d'interactions autres que la gravitation.

L'équation (13,19) vraie dans tout référentiel galiléen est en accord avec le fait que $T^{\alpha\beta}$ est un tenseur et P^α un quadrivecteur. Une telle formule avec $T^{\alpha\beta}$ tenseur pour la transformation de LORENTZ implique donc que la quantité P^α ainsi définie soit un quadrivecteur !

Localement autour de la particule, la variété a la structure d'espace affine. L'équation $P^\alpha = Cte$ assure que la trajectoire de la particule est une droite. Reprenant le raisonnement fait au § 3 du chapitre 12, il en résulte que la particule décrit une géodésique de la variété.

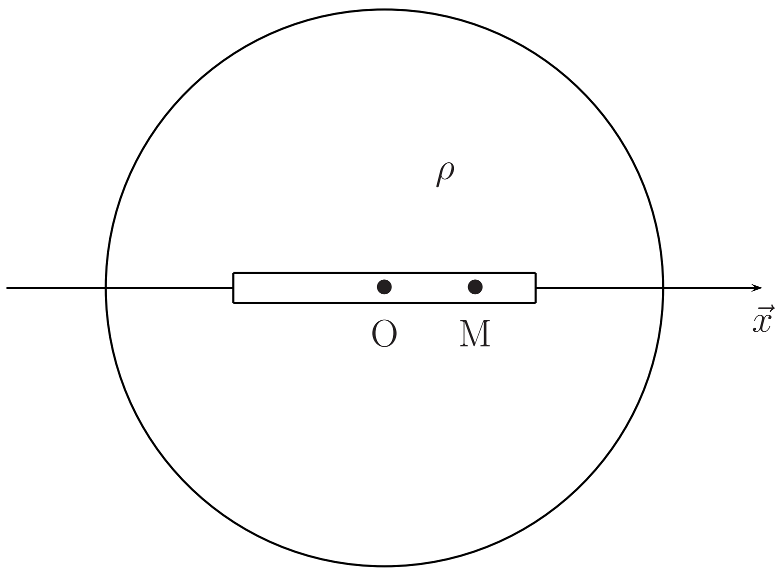
Il faut bien préciser les conditions d'application de (13,19). Sous l'intégrale, il ne doit y avoir que de la matière et des champs autres que la gravitation. Par conséquent, la formule n'est pas applicable par exemple au cas d'une particule constituée par un mini trou noir, ni toute singularité du champ gravitationnel. Dans ces cas, l'énergie gravitationnelle est prépondérante. De plus, pour déduire de (13,19) le fait que la particule décrit une géodésique, il faut être de nouveau dans une région de l'espace-temps où il n'y a pas de singularité du champ gravitationnel. Ceci de façon à pouvoir prendre un référentiel galiléen dans lequel la Relativité restreinte s'applique, et où on peut déduire de (13,19) le fait que la particule décrit une ligne droite.

En particulier, le champ gravitationnel créé par la ou les particules dans le domaine considéré doit être négligeable, ce qui exclut le cas d'une étoile à neutron par exemple. Ainsi, on ne peut pas déduire de cette étude le fait qu'une étoile à neutron décrit une géodésique de l'espace-temps. Tout ce que nous disons ici correspond au fait que, bien que nous sachions que le principe d'équivalence au sens fort à l'origine de l'équation du champ assure que la gravité se comporte comme les autres interactions, nous ne l'avons pas démontré mathématiquement en partant de l'équation du champ. Ceci sera fait au § 8 du chapitre 15. Là, nous verrons que ce qui vient d'être démontré peut être étendu au cas de l'énergie gravitationnelle elle-même, l'information correspondante étant contenue dans la non linéarité de l'équation du champ.

EXERCICES

13.1

On considère un astre sphérique homogène de masse volumique ρ. Au voisinage du centre O et passant par ce dernier, est creusé un petit tunnel rectiligne vide (voir figure). Un point matériel M oscille autour du point O dans ce tunnel, en étant soumis à la seule force de gravité due à l'astre.



1. En étudiant directement le mouvement de ce point, et avec l'équation de déviation des géodésiques, montrez que l'on retrouve la valeur $R^{x}{}_{0x0}$ du tenseur de courbure en O.

2. Montrez que cette valeur est cohérente avec l'équation du champ d'EINSTEIN.

13.2

(non corrigé). On considère l'équation du § 6 :

$$\frac{d^2(\delta x^i)}{dt^2} = R^{i}{}_{0j0}\;\delta x^j\, C^2$$

1. $\mathbf{g}$ étant le vecteur accélération de la gravitation d'un point matériel, en déduire :

$$\nabla \bullet \mathbf{g} \;=\; R^{i}{}_{0i0}\, C^2$$

2. Au § 5, on a montré que $R^{0}{}_{000} = 0$ dans un champ constant. Avec (11,29), montrez que $\nabla \bullet \mathbf{g} \;=\; R_{00}\, C^2$

3. En utilisant l'équation du champ mise sous la forme (17,2), en déduire que lorsque $g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta}$ et pour un fluide parfait au repos :

$$\nabla \bullet \mathbf{g} \;=\; -4\pi G \left(\rho + \frac{3p}{C^2}\right)$$

Dans le cas des faibles pressions : $p \ll \rho C^2$, on a bien : $\nabla \bullet \mathbf{g} \;=\; -4\pi G\rho$.

Il n'y a aucune contradiction à concevoir un matériau tendu (pression négative) et tel que $\rho < 3\frac{|p|}{C^2}$. Dans ce cas, on voit que l'objet a un effet gravitationnel répulsif correspondant à une masse gravitationnelle effective négative.

D'une manière générale, on peut écrire, pour l'effet de marée suivant trois directions perpendiculaires :

$$\frac{1}{\delta x}\frac{d^2(\delta x)}{dt^2} + \frac{1}{\delta y}\frac{d^2(\delta y)}{dt^2} + \frac{1}{\delta z}\frac{d^2(\delta z)}{dt^2} \;=\; R^{i}{}_{0i0}\, C^2 = -\frac{4\pi G}{C^2}\left(\rho C^2 + 3p\right)$$

et on peut vérifier cette formule, par exemple, au dessus de la surface de la Terre, ou au centre de la Terre.

13.3

(non corrigé). On considère un fluide parfait homogène tel qu'une transformation adiabatique réversible obéisse à l'équation $\rho \;=\; Cte$: le travail de la pression crée la masse-énergie juste nécessaire pour combler le vide apparaissant lors d'une expansion par exemple ; ce processus simulant une création continue.

Montrez, en écrivant que le travail des forces de pression est égal à la variation de la masse-énergie dans le domaine considéré, que l'équation d'état est la même que celle du vide avec une constante cosmologique proportionnelle (avec un coefficient de proportionalité positif) à $\rho C^2 = -p$.

Notons que dans le cas de l'expansion de l'univers, le résultat est donné directement par l'équation (18,23). Nous voyons, avec l'exercice 13.2, que ce fluide se comporte d'une manière répulsive du point de vue gravitationnel.

Ce fluide pourrait correspondre à une phase d'inflation donnant naissance à notre Univers. Cette inflation résulte de l'instabilité du vide quantique.

L'Univers s'étend en créant ses particules de matière au fur et à mesure. La matière produite par l'expansion engendre elle-même cette expansion. L'expansion est assurée par le caractère répulsif de l'interaction gravitationnelle.

L'énergie des particules créées est donnée par l'expansion de l'espace, l'énergie totale étant constante. On a un mécanisme cosmologique autosuffisant (bootstrap). L'absence de singularité au départ du Big Bang est alors liée à cette possibilité à cette époque de l'existence d'un fluide quantique de pression négative (R. Brout, F. Englert et E. Gunzig).