

## Chapitre Quatorze

### APPROXIMATION LINÉAIRE DE L'ÉQUATION DU CHAMP

**1. Introduction.** - Lorsque la gravitation est faible, l'action de la gravitation sur elle-même peut être négligée. Ainsi, lorsque le système Terre-Lune agit sur les autres planètes, il est tout à fait légitime de considérer que la masse de l'ensemble est égale à la masse de la Lune plus la masse de la Terre. On est alors dans le cadre de *l'approximation linéaire de l'équation du champ*. Notons que nous sommes tout de même en Relativité générale. Rappelons que celle-ci devient nécessaire lorsque les masses créant la gravitation sont très importantes (trou noir, noyau de galaxie) ou lorsque la vitesse des corps n'est pas négligeable devant celle de la lumière tandis qu'on s'intéresse à leurs actions gravitationnelles. Dans le cadre de l'approximation linéaire, le premier aspect est effectivement éliminé, mais le deuxième aspect reste présent.

Lorsque la gravitation est absente, l'espace-temps est plat et l'on peut prendre un système de coordonnées rectilignes types dans lequel  $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ . Ici, l'espace-temps sera presque plat, et nous pourrons trouver des coordonnées correspondant au référentiel  $\mathcal{R}$  avec lesquelles :

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \quad \text{et} \quad |h_{\alpha\beta}| \ll 1 \quad (14, 1)$$

Ces coordonnées voisines de coordonnées galiléennes types seront encore notées  $x^\alpha$ .

Nous supposons en plus que  $h_{\alpha\beta} = 0$  l'infini.

Reprenons le raisonnement fait au §18 du chapitre 12. Soit un référentiel  $\bar{\mathcal{R}}$  animé de la vitesse  $\mathbf{v}$  par rapport au référentiel précédent. À l'infini, le changement de coordonnées est une transformation de LORENTZ. Nous pouvons prendre des coordonnées liées à  $\bar{\mathcal{R}}$  se déduisant des coordonnées de  $\mathcal{R}$  par une transformation de LORENTZ en tout point. On aura donc :

$$x^\alpha = \Lambda^\alpha_{\bar{\alpha}} x^{\bar{\alpha}} \quad \text{et} \quad x^{\bar{\alpha}} = \Lambda^{\bar{\alpha}}_{\alpha} x^\alpha$$

Nous aurons alors :

$$g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = \Lambda^\alpha_{\bar{\alpha}} \Lambda^\beta_{\bar{\beta}} g_{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha_{\bar{\alpha}} \Lambda^\beta_{\bar{\beta}} (\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta})$$

$$g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = \eta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} + h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \quad \text{et} \quad h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = \Lambda^{\alpha}_{\bar{\alpha}} \Lambda^{\beta}_{\bar{\beta}} h_{\alpha\beta}$$

Nous aurons évidemment encore :  $|h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}| \ll 1$ .

Nous voyons que dans une telle transformation, l'ensemble des composantes  $(h_{\alpha\beta})$  se transforme comme s'il était un tenseur en Relativité restreinte !

Il faut voir que cette propriété n'est vraie que dans le changement de coordonnées précédemment défini. La coupure entre  $\eta_{\alpha\beta}$  et  $h_{\alpha\beta}$  ne garde un sens que dans ce type de transformation.  $(h_{\alpha\beta})$  n'est donc pas un tenseur, qui devrait être défini quel que soit le type de coordonnées choisies. En d'autres termes, la séparation entre  $g_{\alpha\beta}$  et  $h_{\alpha\beta}$  n'est pas covariante mais est liée à un type de coordonnées très particulières. Mais si nous nous cantonnons aux transformations précédentes à partir du système de coordonnées  $x^{\alpha}$  choisi au départ, que nous appellerons *les transformations de Lorentz de l'arrière plan*,  $h_{\alpha\beta}$  se comporte comme un tenseur.

Cette propriété restreinte aux transformations précédentes mène à une agréable approximation : nous pouvons traiter un espace-temps légèrement courbé comme un espace-temps plat avec un tenseur  $h_{\alpha\beta}$  défini dessus. Tous les champs physiques liés à la gravitation comme  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$  par exemple seront définis en fonction de  $h_{\alpha\beta}$  et seront traités comme des champs tensoriels dans un espace-temps plat. Cette approximation permet de traiter la gravitation comme les autres interactions qui sont décrites aux moyens de champs régnant dans l'espace-temps plat de la Relativité restreinte. Il en est ainsi de l'électromagnétisme décrit au moyen du tenseur  $F_{\alpha\beta}$ . Nous travaillerons dans toute la suite de ce chapitre dans le cadre de cette approximation.

**2. Approximation linéaire de l'équation du champ.** - Dans le calcul du tenseur de courbure, prenant l'approximation au premier ordre en  $h_{\alpha\beta}$ , nous pouvons prendre uniquement la partie linéaire dans les symboles de CHRISTOFFEL. On arrive à la formule (11,23), et à l'expression suivante en fonction de  $h_{\alpha\beta}$  :

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2} (-h_{\alpha\delta,\beta\gamma} + h_{\alpha\gamma,\beta\delta} - h_{\beta\gamma,\alpha\delta} + h_{\beta\delta,\alpha\gamma})$$

Étant donné que  $g^{\alpha\beta} \simeq \eta^{\alpha\beta}$ , nous pouvons, au premier ordre en  $h_{\alpha\beta}$  écrire :

$$R_{\beta\delta} = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\gamma} (-h_{\alpha\delta,\beta\gamma} + h_{\alpha\gamma,\beta\delta} - h_{\beta\gamma,\alpha\delta} + h_{\beta\delta,\alpha\gamma})$$

$$R = \frac{1}{2} \eta^{\beta\delta} \eta^{\alpha\gamma} (-h_{\alpha\delta,\beta\gamma} + h_{\alpha\gamma,\beta\delta} - h_{\beta\gamma,\alpha\delta} + h_{\beta\delta,\alpha\gamma})$$

$$\begin{aligned}
G_{ab} = & \frac{1}{2}\eta^{\alpha\gamma} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -h_{\alpha b, a\gamma} & +h_{\alpha\gamma, ab} & -h_{a\gamma, \alpha b} & +h_{ab, \alpha\gamma} \end{pmatrix} \\
& -\frac{1}{4}\eta_{ab}\eta^{\beta_1\delta_1}\eta^{\alpha_1\gamma_1} \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \\ -h_{\alpha_1\delta_1, \beta_1\gamma_1} & +h_{\alpha_1\gamma_1, \beta_1\delta_1} & -h_{\beta_1\gamma_1, \alpha_1\delta_1} & +h_{\beta_1\delta_1, \alpha_1\gamma_1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Pour toute fonction  $f$  nous introduisons la notation :

$$f'^{\beta} = \eta^{\alpha\beta} f_{,\alpha}$$

D'autre part, la trace du tenseur  $h_{\alpha\beta}$  sera notée  $h$ .

$$\begin{aligned}
(1) + \frac{1}{2}(2) &= -\frac{1}{2}h'_{\alpha b, a} + \frac{1}{4}h_{,ab} = -\frac{1}{2}\left(h'_{\alpha b, a} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha b} h'_{,a}\right) \\
(3) + \frac{1}{2}(2) &= -\frac{1}{2}h'_{a\gamma, b} + \frac{1}{4}h_{,ab} = -\frac{1}{2}\left(h'_{a\gamma, b} - \frac{1}{2}\eta_{a\gamma} h'_{,b}\right) \\
(4) + (6) &= +\frac{1}{2}\left(h'_{ab, \gamma} - \frac{1}{2}\eta_{ab} h'_{, \gamma}\right)
\end{aligned}$$

$$(5) + (7) + (8) = \frac{1}{4}\eta_{ab} h'_{\alpha_1\delta_1} + \frac{1}{4}\eta_{ab} h'_{\beta_1\gamma_1} - \frac{1}{4}\eta_{ab} h'_{, \gamma_1} = \frac{1}{2}\left(\eta_{ab} h'^{\alpha\delta} - \frac{1}{2}\eta_{ab}\eta_{\alpha\delta} h'^{\alpha\delta}\right)$$

$$\text{Posons : } \bar{h}^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta} h \quad (14, 2)$$

Nous appelons ce tenseur, *le tenseur à trace opposée*, car nous avons :

$$\bar{h} = \bar{h}^{\alpha}_{\alpha} = -h \quad (14, 3)$$

Il est facile de vérifier que la relation entre les deux tenseurs est symétrique :

$$h^{\alpha\beta} = \bar{h}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta} \bar{h} \quad (14, 4)$$

On obtient alors après quelques changements de lettres pour les indices muets :

$$G_{ab} = \frac{1}{2}\left(\bar{h}'_{ab, \gamma} + \eta_{ab} \bar{h}'_{\gamma\delta} - \bar{h}'_{a\gamma, b} - \bar{h}'_{\gamma b, a}\right) \quad (14, 5)$$

L'équation précédente se simplifie considérablement si :

$$\bar{h}'_{\alpha\beta} = 0$$

En effet, il reste alors uniquement :

$$G_{ab} = \frac{1}{2}\bar{h}'_{ab, \gamma} \quad (14, 6)$$

**3. La jauge de LORENTZ.** - Faisons une analogie avec l'électromagnétisme. Avec cette dernière interaction, c'est la quadrivecteur courant  $j^{\alpha}$  qui crée le champ décrit par le potentiel vecteur  $A^{\alpha}$ . On a alors l'équation (5,92) qui se simplifie considérablement avec la jauge de LORENTZ. Le quadrivecteur courant

est ici remplacé par le tenseur d'impulsion-énergie et le quadripotentiel  $A^\alpha$  est remplacé par le tenseur  $\bar{h}_{\alpha\beta}$ . Nous allons montrer qu'il existe un arbitraire de jauge sur ce dernier tenseur qui correspond à différents choix de coordonnées, et que dans ce que nous appellerons également la *jauge de Lorentz*, nous aurons effectivement :

$$\bar{h}_{\alpha\beta}^{\prime,\beta} = 0 \quad (14, 7)$$

analogue de (5,96) :  $A^{\beta}_{,\beta} = 0$ .

Considérons en effet la transformation :

$$x^{\alpha'} = x^\alpha + \xi^\alpha$$

Les  $\xi^\alpha$  étant petits :

$$g_{\alpha'\beta'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} g_{\alpha\beta} = \left( \delta^\alpha_{\alpha'} - \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \right) \left( \delta^\beta_{\beta'} - \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^{\beta'}} \right) (\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta})$$

Au premier ordre :

$$\eta_{\alpha'\beta'} + h_{\alpha'\beta'}^{\text{nouveau}} = \eta_{\alpha'\beta'} + h_{\alpha'\beta'}^{\text{ancien}} - \xi_{\beta',\alpha'} - \xi_{\alpha',\beta'}$$

Les  $\xi^\alpha$  étant petits,  $h_{\alpha\beta}^n$  est également petit.

On a donc :

$$\begin{aligned} \bar{h}_{\alpha\beta}^n &= h_{\alpha\beta}^n - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} h^n = h_{\alpha\beta}^a - \xi_{\beta,\alpha} - \xi_{\alpha,\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} h^a + \eta_{\alpha\beta} \xi^{\alpha,\alpha} \\ \bar{h}^{n\alpha\beta} &= \bar{h}^{a\alpha\beta} - \xi^{\alpha,\beta} - \xi^{\beta,\alpha} + \eta^{\alpha\beta} \xi_{\zeta,\gamma} \end{aligned}$$

$$\bar{h}_{,\beta}^{n\alpha\beta} = \bar{h}_{,\beta}^{a\alpha\beta} - \xi_{,\beta}^{\alpha,\beta} - \xi_{,\beta}^{\beta,\alpha} + \eta_{,\beta}^{\alpha\beta} \xi_{\zeta,\gamma} + \eta^{\alpha\beta} \xi_{,\gamma\beta}$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ 0 \\ \downarrow \\ 0 \end{array}$$

$$\bar{h}_{,\beta}^{n\alpha\beta} = \bar{h}_{,\beta}^{a\alpha\beta} - \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{(\partial x^0)^2} + \sum_{i=1,3} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{(\partial x^i)^2}$$

Si nous voulons :

$$\bar{h}_{,\beta}^{n\alpha\beta} = 0$$

Il suffit de prendre :

$$\square \xi^\alpha = \bar{h}_{,\beta}^{a\alpha\beta}$$

Avec des conditions de régularité supposées satisfaites par le second membre, cette équation a des solutions. Notons que la solution  $\xi^\alpha$  n'est pas unique. Toute

solution  $\zeta^\alpha$  qui s'en déduit en ajoutant les fonctions  $f^\alpha$  de d'alembertien nul sont également utilisables :

$$\square f^\alpha = 0 \quad ; \quad \zeta^\alpha = \xi^\alpha + f^\alpha$$

Comme en électromagnétisme, il y a donc toute une classe de jauges de LORENTZ. Avec une telle jauge on a :

$$G^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\square\bar{h}^{\alpha\beta} \quad (14, 8)$$

Et l'équation linéarisée du champ s'écrit :

$$\square\bar{h}^{\alpha\beta} = -\frac{16\pi G}{C^4}T^{\alpha\beta} \quad (14, 9)$$

L'équation précédente est covariante pour les transformations de LORENTZ de l'arrière plan. Lorsqu'on a la solution dans un référentiel donné, on a donc automatiquement la solution dans un référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport au premier, donc pour le tenseur d'impulsion-énergie déduit du précédent par la formule de transformation des composantes d'un tenseur. Il suffit d'effectuer cette transformation des composantes sur  $\bar{h}^{\alpha\beta}$ . L'égalité (14,4) étant également tensorielle, on peut faire cette transformation des composantes directement sur  $h^{\alpha\beta}$  donc sur  $g^{\alpha\beta}$ . Cela est complètement en accord avec l'obtention du tenseur métrique de la barre qui défile au § 18 du chapitre 12 par transformation de LORENTZ à partir de celui de la barre immobile.

Lorsque le tenseur d'impulsion-énergie est nul,  $\bar{h}^{\alpha\beta}$  et donc  $h^{\alpha\beta} = 0$  sont bien solution, et le tenseur de MINKOWSKI est bien solution. On retrouve bien la Relativité restreinte lorsque la gravitation disparaît.

**4. Les ondes gravitationnelles.** - Dans l'espace vide,  $T^{\alpha\beta} = 0$  et l'équation linéaire du champ se réduit à :

$$\square\bar{h}^{\alpha\beta} = 0 \quad (14, 10)$$

Une équation de ce type avec le d'alembertien est l'équation bien connue d'ondes se propageant à la vitesse de la lumière  $C$ . On voit donc qu'il existe des ondes gravitationnelles se propageant à la vitesse de la lumière. Ces ondes sont créées par les masses en mouvement et correspondent au fait que toute modification des masses créant le champ entraîne une modification de celui-ci se propageant à la vitesse finie  $C$ . Elles sont capables d'exercer une force sur toute particule, donc elles transportent de l'impulsion et de l'énergie. Une émission d'onde gravitationnelle doit donc avoir un effet de freinage sur les masses qui la créent.

La preuve expérimentale des ondes gravitationnelles a été fournie par l'étude du pulsar binaire PSR 1913 + 16 découvert en 1974 par Joseph TAYLOR. Le ralentissement de la période orbitale du pulsar appartenant au système double

correspond exactement à la perte d'énergie du système par émission d'ondes gravitationnelles : La période de révolution est de 8 heures et l'excentricité de l'orbite est de 0.60. La diminution de la période est de  $0.07\mu s$  à chaque révolution. Russel A. HULSE et Joseph H. TAYLOR sont les prix Nobel 1993 pour cette découverte.

L'évaluation nécessaire pour le calcul précédent des différents paramètres du système (masses, orbites) est faite en utilisant d'autres résultats de la Relativité générale : décalage vers le rouge, avance du périastre. Une contrainte est encore apportée en prenant en compte le retard du signal émis par le pulsar lorsqu'il effectue un passage rasant près de l'autre astre.

Nous n'étudierons pas plus en détail les ondes gravitationnelles dans cet ouvrage, car c'est un domaine un peu à part de la Relativité générale. Il ne servirait pas dans cet ouvrage aux autres parties théoriques que nous étudierons. Il faudrait en particulier étudier la polarisation de ces ondes.

On peut également essayer de quantifier l'équation des ondes (14,10), ce qui amène à la notion de *graviton*. Le champ  $\bar{h}^{\alpha\beta}$  étant tensoriel d'ordre deux, on peut montrer qu'il en résulte que le graviton doit avoir un moment cinétique égal à  $2\hbar$ . Ceci est une première approche de la quantification de la gravitation dans un cas très particulier. Un autre aspect approché de traitement de la gravitation avec la Mécanique quantique est la quantification des autres interactions dans un espace-temps courbe, traité lui classiquement.

**5. Gravitation newtonienne.** - La limite newtonienne correspond à des masses suffisamment faibles et à des vitesses petites devant celle de la lumière. La première condition est contenue dans l'approximation linéaire. Il nous suffit donc dans cette approximation de faire  $v \simeq 0$  ou  $C \simeq +\infty$ . Cela implique en considérant les équations (8,8), (8,10) et (8,13) :

$$|T^{00}| \gg |T^{0i}| \gg |T^{ij}| \quad (14, 11)$$

À cause de l'équation du champ (14,9), nous aurons également :

$$|\bar{h}^{00}| \gg |\bar{h}^{0i}| \gg |\bar{h}^{ij}| \quad (14, 12)$$

$$D'autre part, C \simeq +\infty \quad \Rightarrow \quad \square \simeq -\nabla^2$$

Dans l'équation du champ, il ne reste plus de non négligeable que :

$$\begin{aligned} -\nabla^2 \bar{h}^{00} &= -\frac{16\pi G}{C^4} T^{00} \quad ; \text{ avec } T^{00} = \rho C^2 \\ \nabla^2 \bar{h}^{00} &= \frac{16\pi G}{C^2} \rho \end{aligned} \quad (14, 13)$$

La gravitation est donc décrite dans ce cadre par un champ scalaire unique  $\bar{h}^{00}$ . L'équation précédente est identique à l'équation du champ de NEWTON :

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho \quad \text{avec} \quad \bar{h}^{00} = \frac{4}{C^2}\phi \quad (14, 14)$$

$$\bar{h} = \bar{h}^0_0 = \frac{4\phi}{C^2} \quad ; \quad h^{\alpha\beta} = \bar{h}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\bar{h}$$

$$h^{00} = h_{00} = \frac{4\phi}{C^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{4\phi}{C^2}\right) = \frac{2\phi}{C^2}$$

$$h^{ii} = h_{ii} = \frac{1}{2}\bar{h} = \frac{2\phi}{C^2}$$

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\phi}{C^2}\right) C^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2\phi}{C^2}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (14, 15)$$

Ceci est bien l'élément linéaire donné au § 16 du chapitre 12. Nous avons vu au § 15 du même chapitre que cette métrique donne la bonne équation du mouvement dans le cas des vitesses faibles devant celle de la lumière et compte tenu de la loi dynamique de la Relativité générale. Le fait que cette métrique provienne de l'équation du champ dans le cadre de l'approximation linéaire achève de prouver que la Relativité générale redonne la Gravitation newtonienne lorsque celle-ci est une bonne approximation.

Les coordonnées  $x, y, z$  correspondent à des longueurs égales sur les trois axes, l'effet de contraction des longueurs étant le même pour ces trois coordonnées.

Ainsi, la Relativité générale, par (14,13), c'est à dire (13,17), puis (14,15), puis (12,36), redonne la loi de la Gravitation newtonienne. En particulier, elle **explique** la décroissance de la force entre deux masses ponctuelles selon l'inverse du carré de la distance. Cette loi, posée sans explication en Mécanique newtonienne, découle ici des propriétés de l'espace-temps.

**6. Le problème des deux barres.** - Nous pouvons manipuler à notre guise la covariance des équations dans les transformations de LORENTZ de l'arrière plan, comme cela a été mentionné à la fin du paragraphe § 3. Ainsi nous allons ci-dessous retrouver avec l'équation du champ linéaire l'élément métrique associé à la barre en mouvement, à partir du tenseur d'impulsion-énergie de celle-ci, vu du référentiel  $\mathcal{R}$ .

Nous sommes exactement dans le cadre de l'approximation linéaire : gravitation faible, mais vitesse de la barre pouvant être voisine de celle de la lumière. Le passage du tenseur d'impulsion-énergie à la force subie par une particule d'essai se résume ainsi :

$$T^{\alpha\beta} \longrightarrow \bar{h}^{\alpha\beta} \longrightarrow h^{\alpha\beta} \longrightarrow \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} \longrightarrow F^{\alpha}$$

Dans chaque passage, la quantité à droite est une fonction linéaire de la quantité à gauche. En particulier, pour le passage de  $h^{\alpha\beta}$  aux symboles de CHRISTOFFEL, on pourra prendre  $g^{\alpha\beta} \simeq \eta^{\alpha\beta}$  et :

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} \simeq \frac{1}{2}\eta^{\alpha\lambda} (h_{\lambda\gamma,\beta} + h_{\lambda\beta,\gamma} - h_{\beta\gamma,\lambda}) \quad (14, 16)$$

Nous avons une théorie entièrement linéaire. La force est donc une fonction linéaire du tenseur d'impulsion-énergie. Nous allons donc examiner séparément chaque composante du tenseur d'impulsion énergie et voir la valeur de la composante correspondante du tenseur  $h^{\alpha\beta}$  créé.

Considérons d'une manière générale, une barre en mouvement de translation suivant la droite qu'elle définit (axe des  $z$ ) à la vitesse  $\mathbf{v}$ ;  $v = v_z > 0$ . (8,8), (8,10) et (8,13) donnent, en remplaçant  $\rho_0$  par  $\rho$  pour simplifier la notation :

$$T^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \frac{\rho C^2}{1 - \frac{v^2}{C^2}} & 0 & 0 & \frac{\rho v C}{1 - \frac{v^2}{C^2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\rho v C}{1 - \frac{v^2}{C^2}} & 0 & 0 & \frac{\rho v^2}{1 - \frac{v^2}{C^2}} \end{pmatrix} \quad (14, 17)$$

L'équation linéaire du champ (14,9) donne toujours le même facteur de proportionnalité entre  $T^{\alpha\beta}$  et  $\bar{h}^{\alpha\beta}$ . Il y aura donc le même facteur de proportionnalité entre différentes composantes de  $\bar{h}^{\alpha\beta}$  et les composantes correspondantes de  $T^{\alpha\beta}$ . Les valeurs de  $T^{00}$  et  $\bar{h}^{00}$  en Gravitation newtonienne (équations (14,13) et (14,14)) nous donnent ce facteur de proportionnalité qui vaut  $\frac{4\phi}{\rho C^4}$ .

$\bar{h}_e^{00}$  signifie : valeur de  $\bar{h}^{00}$  créée par la partie énergie du tenseur d'impulsion-énergie ; idem pour les autres composantes.

$$\bar{h}_e^{00} = \bar{h}_{e00} = \frac{\frac{4\phi}{C^2}}{1 - \frac{v^2}{C^2}} \quad ; \quad \bar{h}_e = \bar{h}_e^0{}_0 = \bar{h}_e^{00}$$

$$h_{e00} = h_e^{00} = h_{eii} = h_e^{ii} = \frac{\frac{2\phi}{C^2}}{1 - \frac{v^2}{C^2}}$$

$$\bar{h}_p^{zz} = \frac{\frac{4\phi v^2}{C^4}}{1 - \frac{v^2}{C^2}} \quad ; \quad \text{et} \quad \bar{h}_p = \bar{h}_p^z{}_z = -\bar{h}_p^{zz}$$

$$h_{p00} = h_p^{00} = \frac{\frac{2\phi v^2}{C^4}}{1 - \frac{v^2}{C^2}}$$

$$h_{p_{xx}} = h_p^{xx} = h_{p_{yy}} = h_p^{yy} = -\frac{\frac{2\phi v^2}{C^4}}{1 - \frac{v^2}{C^2}}$$

$$h_{p_{zz}} = h_p^{zz} = \frac{\frac{2\phi v^2}{C^4}}{1 - \frac{v^2}{C^2}}$$

$$\bar{h}_f^{0z} = \frac{\frac{4\phi v}{C^3}}{1 - \frac{v^2}{C^2}} \Rightarrow \bar{h}_f = 0$$

$$h_{f_{0z}} = -h_f^{0z} = -\frac{\frac{4\phi v}{C^3}}{1 - \frac{v^2}{C^2}}$$

(**énergie**) en petits caractères dans une parenthèse au dessus d'un terme, veut dire partie due à la composante d'énergie du tenseur d'impulsion-énergie etc. On a alors :

$$(14,18) \quad ds^2 = \left(1 + \frac{\text{(énergie)}}{C^2} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{C^2}} + \frac{\text{(pression)}}{C^2} \frac{\frac{v^2}{C^2}}{1 - \frac{v^2}{C^2}}\right) C^2 dt^2 - \left(1 - \frac{\text{(énergie)}}{C^2} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{C^2}} + \frac{\text{(pression)}}{C^2} \frac{\frac{v^2}{C^2}}{1 - \frac{v^2}{C^2}}\right) (dx^2 + dy^2) - \left(1 - \frac{\text{(énergie)}}{C^2} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{C^2}} - \frac{\text{(pression)}}{C^2} \frac{\frac{v^2}{C^2}}{1 - \frac{v^2}{C^2}}\right) dz^2 - \frac{\text{(flux d'impulsion)}}{C^2} \frac{v}{1 - \frac{v^2}{C^2}} C dt dz$$

donc, on obtient (14,19) :

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\phi}{C^2} \frac{1 + \frac{v^2}{C^2}}{1 - \frac{v^2}{C^2}}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2\phi}{C^2}\right) (dx^2 + dy^2) - \left(1 - \frac{2\phi}{C^2} \frac{1 + \frac{v^2}{C^2}}{1 - \frac{v^2}{C^2}}\right) dz^2 - \frac{8\phi}{C^2} \frac{v}{1 - \frac{v^2}{C^2}} C dt dz$$

On reconnaît bien l'élément linéaire (12,53) du § 18 du chapitre 12, compte tenu des valeurs de  $\cosh \varphi$  et  $\sinh \varphi$  en fonction de  $v$ .

On voit en examinant le terme en  $C^2 dt^2$  que lorsque la particule et la barre sont animées de la vitesse  $v$  l'une par rapport à l'autre, ce qu'on peut décrire avec la particule immobile et la barre défilant, on a un terme d'attraction dû à l'énergie et un dû à la pression ; le terme dû à l'énergie a bien le facteur  $\frac{1}{1 - \frac{v^2}{C^2}}$  dû à la contraction des longueurs et à l'augmentation de l'énergie avec la vitesse. En ce qui concerne les termes magnétiques causés par la vitesse qui permettent d'annuler les effets ci-dessus quand la barre et la particules défilent toutes deux en étant immobiles l'une par rapport à l'autre ; on distingue un terme dû à l'énergie et un autre dû à la pression, lié au terme en  $dz^2$  de l'élément linéaire donc au carré de la vitesse de la particule. Enfin il y a le terme correspondant au flux d'impulsion lié à  $dt \times dz$ , donc proportionnel à la vitesse de la particule. Ce terme est très intéressant. Imaginons une barre animée d'une vitesse proche de celle de la lumière suivant sa longueur ; et une particule avançant à faible vitesse

parallèlement à la barre. Le terme magnétique en  $v^2$  est négligeable. Il reste le terme dû au flux d'impulsion en  $v$ . Ce terme est répulsif ou attractif, suivant que la particule va dans le même sens ou en sens inverse de la barre.

**7. Un problème d'électrostatique.** - Nous allons traiter dans ce paragraphe un problème d'électrostatique dont les résultats mathématiques nous serviront au paragraphe 9. On considère deux boules  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  de même rayon  $R$ , celle de gauche,  $\mathcal{B}_1$ , centrée en  $O_1$ , et celle de droite,  $\mathcal{B}_2$ , centrée en  $O_2$ .  $O_1O_2 = \varepsilon$ ,  $\varepsilon$  étant un nombre infiniment petit. La boule  $\mathcal{B}_1$  est chargée uniformément avec la densité volumique de charge  $-\rho < 0$ ; la boule  $\mathcal{B}_2$  est chargée uniformément avec la densité volumique de charge  $\rho > 0$ .  $O$  est le milieu de  $O_1O_2$ . L'axe des  $x$  sera l'axe porté par la droite  $O_1O_2$  orientée de  $O_1$  vers  $O_2$ . L'électrostatique étant linéaire, on peut considérer qu'on a une charge nulle dans le domaine  $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ . Ainsi, on a pratiquement une boule unique de rayon  $R$  centrée en  $O$  milieu de  $O_1O_2$  et chargée avec la densité surfacique  $\sigma$ . Calculons  $\sigma$  : soit  $D$  une demi-droite orientée vers son côté infini, issue de  $O$  et faisant l'angle  $\theta$  avec l'axe des  $x$ . Elle coupe la boule  $\mathcal{B}_1$  en  $A$  et la boule  $\mathcal{B}_2$  en  $B$  (fig. 14.1).

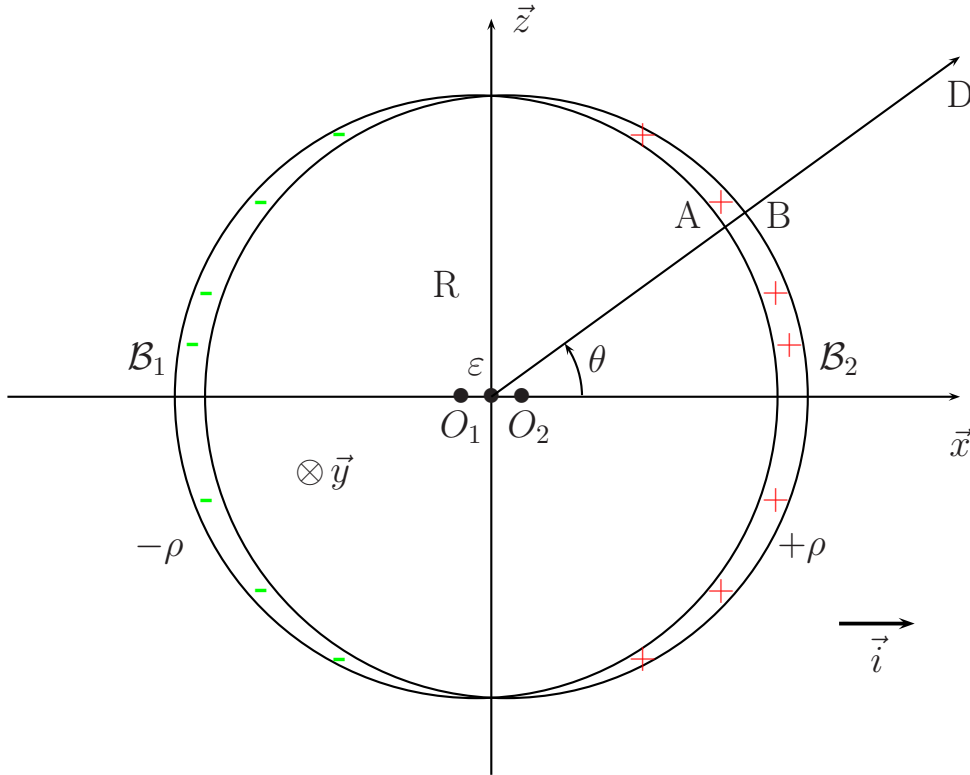


Fig. 14.1

On a :

$$OA \simeq O_1A - \frac{\varepsilon}{2} \cos \theta = R - \frac{\varepsilon}{2} \cos \theta$$

$$OB \simeq O_2B + \frac{\varepsilon}{2} \cos \theta = R + \frac{\varepsilon}{2} \cos \theta$$

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} \simeq \varepsilon \cos \theta$$

Pour une surface  $dS$  autour de  $A$  et  $B$  sur la boule  $\mathcal{B}$ , on a :

$$|dq| = |\sigma| dS = |\rho| dV = |\rho| dS AB$$

$$dq = \rho dS \varepsilon \cos \theta = \sigma dS$$

On a donc :  $\sigma = \rho \varepsilon \cos \theta$ ; on suppose donc que  $\rho$  est infiniment grand, de façon à ce que  $\rho \varepsilon = \sigma_0$  soit une quantité finie. D'autre part,  $M$  étant entre  $A$  et  $B$  :  $x(M) = R \cos \theta$  et :

$$\sigma(M) = \sigma_0 \frac{x(M)}{R} \quad (14, 20)$$

Considérons un point  $P$  intérieur à la boule  $\mathcal{B}$ .

Soit  $\mathbf{E}_1(P)$  le champ créé par la boule  $\mathcal{B}_1$  en  $P$  et  $\mathbf{E}_2(P)$  le champ créé par la boule  $\mathcal{B}_2$  en  $P$ . Seules les charges de  $\mathcal{B}_1$  plus près de  $O_1$  que  $P$  agissent électrostatiquement, de même seules les charges de  $\mathcal{B}_2$  plus près de  $O_2$  que  $P$  agissent.

$$\mathbf{E}_1(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left( -\rho \frac{4}{3} \pi (O_1P)^3 \right) \frac{\overrightarrow{O_1P}}{(O_1P)^3}$$

$$\mathbf{E}_1(P) = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0} \overrightarrow{O_1P}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \left( \overrightarrow{O_2P} - \overrightarrow{O_1P} \right) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \overrightarrow{O_2O_1} \quad (14, 21)$$

La densité surfacique de charge  $\sigma$  crée donc à l'intérieur de la boule  $\mathcal{B}$  un champ électrique uniforme. Le potentiel étant nul à l'infini, et le plan  $yOz$  étant une surface équipotentielle par raison de symétrie, le potentiel est nul en  $O$ . On a donc :

$$\mathbf{E} = -\frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0} \mathbf{i} \quad ; \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{O_1O_2} = \varepsilon \mathbf{i} \quad (14, 22)$$

$$V(M) = \frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0} x(M) \quad (14, 23)$$

**8. Retour au disque tournant.** - Nous allons également avoir besoin dans le paragraphe 9 de connaître l'élément linéaire du disque tournant exprimé en coordonnées cartésiennes, lorsque le disque tourne lentement. Reprenons donc cet élément linéaire, formule (12,12) et exprimons le en coordonnées cartésiennes  $x$  et  $y$ .

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad \begin{cases} dx = dr \cos \theta - r \sin \theta d\theta \\ dy = dr \sin \theta + r \cos \theta d\theta \end{cases}$$

$$x dy - y dx = r^2 d\theta$$

$$\begin{cases} dr &= \cos \theta dx + \sin \theta dy \\ r d\theta &= -\sin \theta dx + \cos \theta dy \end{cases}$$

On a alors :

$$dr^2 + r^2 d\theta^2 = dx^2 + dy^2$$

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 1 - \frac{\omega^2}{C^2}(x^2 + y^2) & \frac{\omega y}{C} & -\frac{\omega x}{C} \\ \frac{\omega y}{C} & -1 & 0 \\ -\frac{\omega x}{C} & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (14, 24)$$

Soit :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\omega^2}{C^2}(x^2 + y^2)\right) C^2 dt^2 + \frac{2\omega y}{C} C dt dx - \frac{2\omega x}{C} C dt dy - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (14, 25)$$

On peut en effet ajouter la dimension  $z$ . Dans la transformation faisant passer des coordonnées dans le référentiel galiléen à celles liées au disque tournant, on a  $z = \bar{z}$ , d'où le terme  $dz^2$  dans l'élément linéaire.

Supposons que le disque tourne lentement. L'élément linéaire est alors voisin de celui de MINKOWSKI. Utilisons donc la formule approchée (14,16) donnant les symboles de CHRISTOFFEL dans le cadre de l'approximation linéaire. Nous en déduirons ensuite les équations en  $x$  et  $y$  des géodésiques.

$$\begin{aligned} \Gamma_{0y}^x &= \frac{1}{2} \eta^{xx} (g_{x0,y} - g_{0y,x}) = -\frac{1}{2} 2 \frac{\omega}{C} \\ \Gamma_{00}^x &= \frac{1}{2} \eta^{xx} (-g_{00,x}) = -\frac{\omega^2}{C^2} x \end{aligned}$$

Et, avec un calcul semblable pour les  $\Gamma_{\alpha\beta}^y$ , il vient :

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} - \omega^2 x - 2\omega \frac{dy}{dt} \simeq 0 \\ \frac{d^2 y}{dt^2} - \omega^2 y + 2\omega \frac{dx}{dt} \simeq 0 \end{cases} \quad (14, 26)$$

On s'aperçoit alors que la force d'inertie d'entraînement  $\mathbf{F}_e$  provient de  $g_{00}$  et la force de CORIOLIS  $\mathbf{F}_C$  de  $g_{0x}$  et  $g_{0y}$ .

Supposons qu'on étudie le mouvement d'une particule dont la vitesse relative  $\mathbf{v}_r$  par rapport au disque est grande devant celle  $\mathbf{v}_e$  du point coïncidant du disque. On a :  $F_C \sim m\omega v_r \gg m\omega v_e = m\omega^2 r = F_e$ . On peut alors négliger la force d'inertie d'entraînement, celle-ci provenant dans le cadre de cette approximation de  $g_{00}$ . On peut alors négliger la correction à 1 de  $g_{00}$  dans l'élément linéaire. Donnons un exemple numérique concret : imaginons un disque qui tourne en 24 h par exemple et un pendule de FOUCAULT situé dessus dont l'amplitude des battements est de un mètre et qui bat la seconde. La vitesse de la boule du pendule est de l'ordre de un mètre par seconde, tandis que la vitesse d'entraînement  $v_e = \omega r = \frac{2\pi l}{24 \times 3600} \approx 10^{-4} m/s$ . Nous sommes tout à fait dans le cadre de cette approximation. Écrivons d'ailleurs l'élément linéaire du disque en  $r$  et  $\theta$  sous la forme suivante :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{C^2}\right) C^2 dt^2 - dr^2 - 2 \frac{\omega r}{C} C dt r d\theta - r^2 d\theta^2 \quad (14, 27)$$

On voit que la correction par rapport à l'élément linéaire de MINKOWSKI est d'ordre  $\frac{v_e^2}{C^2}$  dans  $g_{00}$  et d'ordre  $\frac{v_e}{C}$  dans  $g_{0\theta}$ , les différentielles  $C^2 dt^2$  et  $C dt r d\theta$  ayant bien la même homogénéité.

Pour des vitesses de rotation faibles, on pourra bien tenir compte uniquement des termes du premier ordre en l'infiniment petit  $\frac{v_e}{C}$  dans l'élément linéaire.

Résumons nous : pour un disque tournant faiblement, négligeant les effets d'inertie d'entraînement devant les effets de CORIOLIS, on peut écrire en coordonnées cartésiennes :

$$ds^2 = C^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 + \frac{2\omega y}{C} C dt dx - \frac{2\omega x}{C} C dt dy \quad (14, 28)$$

Notons que la seule force d'inertie apparaissant, la force d'inertie de CORIOLIS, ne dépend pas de la position de l'axe de rotation du disque. D'ailleurs, une translation de l'origine des coordonnées par rapport auquel le disque est supposé tourner dans l'élément linéaire (14,28) modifie cet élément linéaire, mais ne modifie pas les dérivées partielles de  $g_{\alpha\beta}$ , donc les équations des géodésiques.

**9. Étude de l'action gravitationnelle créée à l'intérieur d'une sphère creuse tournant lentement.** - Nous considérons une sphère creuse rigide d'épaisseur négligeable, de rayon  $R$  et de masse  $M$  répartie uniformément sur sa surface. Nous supposons que la sphère tourne lentement à la vitesse angulaire constante  $\Omega$  autour de l'axe des  $z$ . Lentement veut dire ici que les points de la sphère ont une vitesse faible devant celle de la lumière. Ils peuvent donc avoir une vitesse considérable au sens usuel. Nous allons montrer que les référentiels d'inertie à l'intérieur de la sphère tournent à vitesse angulaire constante par

rapport aux référentiels d'inertie loin de la sphère. Nous nous plaçons dans le cadre de l'approximation linéaire de la Relativité générale.

### A - Étude du tenseur d'impulsion-énergie.

Compte tenu des vitesses faibles devant celle de la lumière, nous avons :

$$|T^{00}| \gg |T^{0i}| \gg |T^{ij}|$$

Au premier ordre, nous négligeons donc les composantes  $T^{ij}$ . Appelons  $\rho_M$  la masse volumique : nous prendrons  $T^{00} = \rho_M C^2$  et  $T^{0i} = \rho_M C v^i$ .

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Omega y \\ \Omega x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (14, 29)$$

$$\text{Ainsi : } \begin{cases} T^{0x} = -\rho_M C \Omega y \\ T^{0y} = \rho_M C \Omega x \\ T^{0z} = 0 \end{cases} \quad (14, 30)$$

### B - Calcul des composantes du tenseur à trace opposée.

Nous sommes en régime stationnaire et  $\square = -\nabla^2$ . Il vient :

$$\nabla^2 \bar{h}^{00} = \frac{16\pi G}{C^4} T^{00} = \frac{16\pi G}{C^2} \rho_M \quad (14, 31)$$

$$\nabla^2 \bar{h}^{0x} = \frac{16\pi G}{C^4} T^{0x} = -\frac{16\pi G}{C^3} \rho_M \Omega y \quad (14, 32)$$

$$\nabla^2 \bar{h}^{0y} = \frac{16\pi G}{C^4} T^{0y} = \frac{16\pi G}{C^3} \rho_M \Omega x \quad (14, 33)$$

$$\nabla^2 \bar{h}^{ij} = 0 \quad (14, 34)$$

Calculons maintenant  $\bar{h}^{00}$  :

Nous avons  $\rho_M = \sigma_M \delta(r - R)$  et  $4\pi R^2 \sigma_M = M$ .

Pour une sphère creuse chargée uniformément, on a :

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} = -\frac{\sigma \delta(r - R)}{\varepsilon_0} ; \quad \text{avec } \sigma = Cte$$

Alors, à l'intérieur de la sphère :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{4\pi R^2 \sigma}{R} = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} = Cte$$

$$\text{Or } \nabla^2 \bar{h}^{00} = \frac{16\pi G}{C^2} \rho_M$$

Identifiant  $-\frac{1}{\varepsilon_0}$  à  $\frac{16\pi G}{C^2}$ , on trouve donc :

$$\bar{h}^{00} = -\sigma_M R \frac{16\pi G}{C^2} = -\frac{4GM}{C^2 R} = \text{Cte}$$

Calculons maintenant  $\bar{h}^{0i}$  ; reprenons l'étude du § 7 ; lorsque :

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} = -\frac{\sigma \delta(r-R)}{\varepsilon_0} = -\frac{\sigma_0 x}{R\varepsilon_0} \delta(r-R)$$

$$\text{alors, } V = \frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0} x$$

$$\text{Ici } \nabla^2 \bar{h}^{0y} = \frac{16\pi G}{C^3} \Omega x \frac{M}{4\pi R^2} \delta(r-R)$$

$$\text{Identifiant } -\frac{\sigma_0}{R\varepsilon_0} \text{ à } \frac{4GM\Omega}{R^2 C^3}$$

$$\text{Il vient donc : } \bar{h}^{0y} = -\frac{4GM\Omega}{3RC^3} x$$

effectuons la substitution  $x \rightarrow -y$  :

$$\bar{h}^{0x} = \frac{4}{3} \frac{G}{C^3} \frac{M\Omega}{R} y$$

$$\text{Enfin, } \bar{h}^{ij} = 0 .$$

### C - Calcul de $h^{\alpha\beta}$ .

$$\bar{h} = \bar{h}_0^0 = -\frac{4GM}{RC^2}$$

$$h_{00} = h^{00} = \bar{h}^{00} - \frac{1}{2} \eta^{00} \bar{h} = -\frac{2GM}{RC^2}$$

$$h_{0x} = -h^{0x} = -\bar{h}^{0x} + \frac{1}{2} \eta^{0x} \bar{h} = -\frac{4}{3} \frac{G}{C^3} \frac{M\Omega}{R} y$$

$$h_{0y} = -h^{0y} = \frac{4}{3} \frac{G}{C^3} \frac{M\Omega}{R} x$$

$$h_{xy} = 0 \quad ; \quad h_{xx} = h_{yy} = h_{zz} = h^{xx} = -\frac{1}{2} \eta^{xx} \bar{h} = -\frac{2GM}{RC^2}$$

## D - Élément linéaire, conclusion.

Finalement :

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & \left(1 - \frac{2GM}{RC^2}\right) C^2 dt^2 - \left(1 + \frac{2GM}{RC^2}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2) \\
 & + \frac{8GM\Omega}{3RC^3} C dt x dy - \frac{8GM\Omega}{3RC^3} C dt y dx \quad (14, 35)
 \end{aligned}$$

$g_{00}, g_{xx}, g_{yy}$ , sont constants. Ils sont de la forme (14,15), avec  $\phi = Cte = -\frac{GM}{R}$ . Ils leur correspond une dilatation des temps et une contraction des longueurs à l'intérieur de la sphère par rapport à l'infini dont la valeur est celle attendue. Ces effets étant constants, on peut redéfinir les longueurs et les temps à l'intérieur de façon à avoir  $g_{00} = 1$  et  $g_{xx} = g_{yy} = -1$ ; cela correspond à prendre comme coordonnées à l'intérieur de la sphère, des coordonnées étalons locales. Ces changements de coordonnées sont des infiniment petits du premier ordre. Cela donne des corrections qui sont des infiniment petits du deuxième ordre pour  $g_{0x}$  et  $g_{0y}$  qui sont eux-même des infiniment petits du premier ordre. Au premier ordre, on peut donc garder les mêmes valeurs pour ces deux composantes du tenseur métrique.

En posant :

$$\omega = -\frac{4}{3} \frac{GM}{RC^2} \Omega \quad (14, 36)$$

Il vient alors :

$$ds^2 = C^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 + \frac{2\omega y}{C} C dt dx - \frac{2\omega x}{C} C dt dy \quad (14, 37)$$

Et l'élément linéaire est totalement identique à celui du disque tournant faiblement (14,28). La physique est donc exactement la même que sur un tel disque. Sur le disque, et par rapport à lui, un pendule de FOUCAULT permettant de repérer les référentiels d'inertie en "non rotation" tourne à la vitesse angulaire  $\omega_i = -\omega$ . Nous en concluons donc qu'à l'intérieur de la sphère, un pendule de FOUCAULT tourne à la vitesse angulaire constante et indépendante du lieu :

$$\omega_i = \frac{4}{3} \frac{GM}{RC^2} \Omega \quad (14, 38)$$

Imaginons maintenant un pendule de FOUCAULT chargé électrostatiquement et battant dans un domaine où règne un champ magnétique uniforme. Il est soumis à une force  $\mathbf{F} = q \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$ , formule tout à fait identique à  $\mathbf{F}_C = m \mathbf{v} \wedge 2\vec{\omega}$ ;  $2\vec{\omega}$  correspondant à  $\mathbf{B}$ .

Suivant cette image, on peut considérer que ce qui fait tourner le pendule de FOUCAULT, c'est bien un effet magnétique de la gravitation que l'on appellera *effet de gravitomagnétisme*. La sphère creuse tournante permet d'annuler totalement les effets électrostatiques de la gravitation, puisque le potentiel gravitationnel constant à l'intérieur n'applique aucune force dans l'approximation newtonienne. Notons à ce sujet que l'on retrouve ce résultat par la Relativité générale  $g_{00}$  et  $g_{ii}$  étant constants dans (14,35). Dans cet exemple, il ne reste plus que les effets magnétiques de la gravitation. En électromagnétisme, la présence de charges positives et négatives, permet beaucoup plus facilement d'éliminer les effets électrostatiques tout en gardant les effets magnétiques; qu'on pense par exemple à un fil parcouru par un courant. Il est intéressant que, malgré l'absence de masses négatives, on puisse tout de même trouver une situation idéalisée dans laquelle les effets électrostatiques de la gravitation sont éliminés et où seuls restent les effets magnétiques.

L'élément linéaire (14,37) est exprimé avec les coordonnées  $x, y, z, t$ , correspondant aux équations (14,29), c'est à dire dans un référentiel ne tournant pas par rapport aux galaxies lointaines. La sphère creuse tourne, elle, en effet, à la vitesse angulaire  $\Omega$  par rapport aux galaxies lointaines. Or ce référentiel n'est pas un référentiel galiléen. Les particules libres n'y ont pas un mouvement de translation rectiligne uniforme. Il nous faut donc modifier ici ce qui a été dit au § 2 du chapitre 7. Un référentiel galiléen sera un référentiel dans lequel on peut trouver des coordonnées étalons telles que l'élément linéaire prenne la forme :

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = C^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Un référentiel galiléen sera un référentiel en chute libre dans lequel l'axe d'un gyroscope ou un pendule de FOUCAULT ne tournent pas; et un tel référentiel peut s'avérer tourner par rapport aux galaxies lointaines, comme c'est le cas ici.

**10. Relativité générale et principe de MACH.** - Nous avons vu qu'à l'intérieur de la sphère, les référentiels d'inertie tournent par rapport aux référentiels d'inertie distants. Ceci porte le nom *d'effet de Lense et Thirring* du nom des deux physiciens ayant fait (en 1918) pour la première fois le calcul aboutissant à (14,36). Le principe de MACH affirme que les propriétés d'inertie de l'espace-temps dépendent de la position et du mouvement de toute la matière présente dans l'univers (ensemble des galaxies de l'univers). *L'effet d'entraînement des référentiels d'inertie* par la sphère en rotation nous montre que la Relativité générale prend bien en compte localement le principe de MACH.

Le potentiel électrostatique à l'intérieur d'une sphère uniformément chargée sur sa surface est constant. Or, le potentiel est fonction de la distance à la

charge par une loi en  $\frac{1}{r}$ . La constance de  $\omega_i$  nous suggère que l'influence de la matière éloignée sur les propriétés d'inertie obéit également à une loi en  $\frac{1}{r}$ . Ainsi, les propriétés d'inertie, ne sont pas principalement déterminées par la matière proche, mais plutôt par toute la matière de l'univers (exemple d'un point intérieur très près de la surface, où  $\omega_i$  est le même qu'au centre de la sphère qui est éloigné de tous les points en mouvements).

Cependant il est clair que si la Relativité générale est en accord localement avec le principe de MACH, cette théorie n'est pas complètement machienne. Dans le problème considéré, la métrique de MINKOWSKI à l'infini n'est pas obtenue en tenant compte par des formules de l'effet de la matière lointaine de l'univers. Elle est obtenue comme une condition aux limites plaquée artificiellement. Cela est caractéristique d'une théorie partielle qui est obligée d'intégrer les résultats d'une théorie plus profonde avec les valeurs de paramètres fixés artificiellement, ou avec des conditions aux limites fixées de manière ad hoc. Les référentiels galiléens en Mécanique newtonienne correspondent déjà à une telle condition au limite idéalisée.

La Relativité générale n'est donc pas "relative" au sens de MACH. Cette théorie n'est pas construite uniquement à partir des différentes positions de la matière. La propriété de directions fixes (dans lesquelles la métrique est de MINKOWSKI) est affectée à l'espace vide en l'absence complète de matière (solution des équations du champ avec  $T^{\alpha\beta} = 0$  partout) et le mouvement est repéré par rapport à cette géométrie absolue.

GÖDEL en 1949 obtint une solution cosmologique de l'équation du champ d'EINSTEIN correspondant à une densité constante de matière, pour laquelle l'élément linéaire contient un terme croisé en  $dx^0 dx^i$ . Cette solution correspond à un univers en rotation intrinsèque par rapport à toute la matière qu'il contient ! Un moyen de le voir est d'étudier la trajectoire d'une particule libre. Elle est déviée par rapport à la matière, c'est à dire qu'elle n'a pas pour trajectoire une ligne droite de l'espace lié à cette matière. Cependant la construction de l'univers de GÖDEL nécessite de prendre l'équation du champ d'EINSTEIN avec une constante cosmologique non nulle ; cette constante cosmologique correspond à un état du vide jouant un rôle équivalent à celui de la matière pour la structuration de l'espace-temps. C'est donc le vide qui tourne dans ce modèle, et fait tourner l'espace-temps !

La Relativité générale n'est donc pas encore suffisamment générale. Elle garde des traces d'un absolu arbitraire dans le formalisme. Cela correspond au fait que l'équation du champ d'EINSTEIN n'est pas suffisante à elle seule. Des équations différentielles ne déterminent pas une solution. Il faut leur ajouter des conditions aux limites adéquates.

Dans ce cadre, on peut dire que le principe de MACH fourni les conditions aux limites permettant de distinguer parmi toutes les solutions mathématiques de l'équation du champ celle qui correspond à la situation physique envisagée (voir chapitre 18, cosmologie).

On peut reconnaître à la Relativité générale deux succès. Tout d'abord elle inclu les forces de gravitation usuelles et les forces d'inerties dans un même formalisme alors que ce n'est pas le cas en Mécanique newtonienne (§ 4 du chapitre 12). En effet, la force de CORIOLIS ne dérive pas d'un potentiel et n'entre pas dans le formalisme général des forces de gravitation en Mécanique newtonienne. Ensuite la Relativité générale est localement machienne comme le montre l'effet de LENSE et THIRRING. Cependant, compte tenu de ce qui a été dit, elle n'est pas le fin mot de l'histoire. La Théorie de BRANS-DICKE (voir § 2, chapitre 19) représente une tentative de prise en compte du principe de MACH. Les masses de l'univers interviennent dans le calcul du champ scalaire  $\phi$ . Cependant cette théorie est maintenant abandonnée car non confirmée par l'expérience.

Le rôle joué par l'ensemble des masses de l'univers dans le principe de MACH fait penser à un effet non local du même type que ceux rencontrés en Mécanique quantique. Une théorie complètement machienne et relativiste sortira peut-être de l'union de la Mécanique quantique et de la Relativité générale.

### 11. Étude du champ gravitationnel créé par un astre tournant. -

Nous prenons le modèle simplifié d'une étoile de masse volumique constante  $\rho_M$  (ce qui peut être une bonne approximation pour une étoile à neutron) tournant à la vitesse angulaire constante  $\Omega$  autour de l'axe des  $z$ . On suppose que les points de l'étoile sont animés d'une vitesse faible devant celle de la lumière, de telle sorte que nous prendrons  $T^{ij} \simeq 0$ . Enfin, nous travaillons dans le cadre de l'approximation linéaire de la Relativité générale. La masse totale de l'étoile est  $M$ , son rayon  $R_e$ . Nous nous plaçons à la distance  $r$  de l'étoile à l'extérieur de celle-ci. Le potentiel newtonien est  $\phi = -\frac{GM}{r}$ , ce qui nous donne directement par un calcul analogue à celui fait pour l'intérieur de la sphère creuse au § 9 :

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{C^2} = 1 - \frac{2GM}{rC^2}$$

$$g_{xx} = g_{yy} = g_{zz} = - \left( 1 + \frac{2GM}{rC^2} \right)$$

Il nous reste donc seulement à calculer  $g_{0x}$  et  $g_{0y}$ .

Considérons dans un premier temps une sphère de masse  $dM$  d'épaisseur  $dR$  et de rayon  $R$ . On a :

$$4\pi R^2 dR \rho_M = dM \quad \text{donc :} \quad \rho_M = \frac{dM \delta(r - R)}{4\pi R^2} \quad (14, 39)$$

Dans le problème d'électrostatique du § 7, vu de l'extérieur de la boule  $\mathcal{B}$ , on peut considérer que toute la charge de la boule  $\mathcal{B}_1$ ,  $-q$ , est placée en son centre  $O_1$ , et que toute la charge de la boule  $\mathcal{B}_2$ ,  $q$ , est placée en son centre  $O_2$ . On a alors le champ et le potentiel d'un dipôle électrostatique de moment :

$$q \varepsilon = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho \varepsilon = \frac{4}{3} \pi R^3 \sigma_0$$

Le potentiel d'un tel dipôle est :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q \varepsilon}{r^2} \cos \theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q \varepsilon}{r^3} x$$

Par conséquent (voir (14,20)) l'équation :

$$\nabla^2 V = -\frac{\sigma_0}{R\varepsilon_0} x \delta(r - R) \quad (14, 40)$$

a pour solution :

$$V = \frac{R^3 \sigma_0 x}{3\varepsilon_0 r^3} \quad (14, 41)$$

Identifiant  $-\frac{\sigma_0}{R\varepsilon_0}$  à  $\frac{4G\Omega dM}{C^3 R^2}$

L'équation :  $\nabla^2 \bar{h}^{0y} = \frac{4G\Omega dM x}{C^3 R^2} \delta(r - R)$

obtenue avec (14,33) compte tenu de (14,39) a donc pour solution :

$$\bar{h}^{0y} = -\frac{4}{3} \frac{G dM \Omega R^2 x}{C^3 r^2} \quad (14, 42)$$

or  $dM = 4\pi R^2 dR \rho_M$  ; donc pour toute l'étoile :

$$\begin{aligned} \bar{h}^{0y} &= \int_0^{R_e} -\frac{4}{3} \frac{G\Omega R^2}{C^3 r^3} x 4\pi R^2 \rho_M dR \\ \bar{h}^{0y} &= -\frac{16\pi}{15} \frac{G\Omega \rho_M x}{C^3 r^3} R_e^5 \end{aligned} \quad (14, 43)$$

Remplaçant  $x$  par  $-y$  :

$$\bar{h}^{0x} = +\frac{16\pi}{15} \frac{G\Omega \rho_M y}{C^3 r^3} R_e^5 \quad (14, 44)$$

Soit  $J$  le moment cinétique de l'étoile.

$$\begin{aligned} J &= \frac{2}{5} M R_e^2 \Omega \quad ; \quad M = \frac{4}{3} \pi R_e^3 \rho_M \\ J &= \frac{8}{15} \pi R_e^5 \Omega \rho_M \end{aligned} \quad (14, 45)$$

$$\bar{h}^{0y} = -\frac{2JGx}{C^3r^3} \quad ; \quad \bar{h}^{0x} = \frac{2JGy}{C^3r^3}$$

$$h_{0y} = -h^{0y} = -\bar{h}^{0y} + \frac{1}{2}\eta^{0y}\bar{h} = -\bar{h}^{0y} = \frac{2JGx}{C^3r^3}$$

Idem pour  $h_{0x}$  ; finalement :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{C^2r}\right) C^2 dt^2 - \left(1 + \frac{2GM}{C^2r}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2) - \frac{4JGy}{C^3r^3} C dt dx + \frac{4JGx}{C^3r^3} C dt dy \quad (14, 46)$$

En coordonnées polaires de l'espace,  $x dy - y dx = r^2 \cos^2 \alpha d\theta$  et :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{C^2r}\right) C^2 dt^2 - \left(1 + \frac{2GM}{C^2r}\right) (dr^2 + r^2 d\alpha^2 + r^2 \cos^2 \alpha d\theta^2) + \frac{4JG}{C^3r} \cos^2 \alpha C dt d\theta \quad (14, 47)$$

**12. Recherche d'une orbite circulaire parcourue à vitesse angulaire constante dans le plan équatorial.** - Nous avons donc  $r = Cte$  soit  $\frac{d^2r}{dt^2} = 0$ .

L'équation en  $r$  de la géodésique est :

$$\Gamma_{\theta\theta}^r \left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 + \Gamma_{tt}^r \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + 2\Gamma_{t\theta}^r \frac{dt}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} = 0$$

Appelons  $(\eta_{\alpha\beta}^{cp})$  l'expression que prend le tenseur de MINKOWSKI en coordonnées polaires de l'espace. Les composantes contravariantes seront notées  $\eta_{cp}^{\alpha\beta}$ . On l'obtient à partir du  $ds^2$  en supposant  $\phi$  et  $J$  négligeables :

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta}^{cp} du^\alpha du^\beta = C^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\alpha^2 - r^2 \cos^2 \alpha d\theta^2$$

$$\text{Ainsi,} \quad \eta_{cp}^{rr} = \frac{1}{\eta_{rr}^{cp}} = -1$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r \simeq \frac{1}{2}\eta_{cp}^{rr} (g_{r\theta,\theta} + g_{r\theta,\theta} - g_{\theta\theta,r}) = -r$$

$$\Gamma_{tt}^r \simeq \frac{1}{2}\eta_{cp}^{rr} (g_{rt,t} + g_{rt,t} - g_{tt,r}) = \frac{GM}{r^2}$$

$$\Gamma_{t\theta}^r \simeq \frac{1}{2}\eta_{cp}^{rr} (g_{rt,\theta} + g_{r\theta,t} - g_{t\theta,r}) = -\frac{JG}{C^2r^2}$$

$$r \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + 2 \frac{JG}{C^2r^2} \frac{d\theta}{dt} - \frac{GM}{r^2} = 0$$

Posons  $X = \frac{dt}{d\theta}$ , on obtient :

$$X^2 - \frac{2J}{C^2M} X - \frac{r^3}{GM} = 0$$

$X_1$  et  $X_2$  étant les deux racines de cette équation :

$$X_1 + X_2 = \frac{t_+}{2\pi} + \frac{t_-}{-2\pi} = \frac{t_+ - t_-}{2\pi} = \frac{2J}{C^2M}$$

$$t_+ - t_- = \frac{4\pi J}{C^2M} \quad (14, 48)$$

Ce décalage des périodes dans le sens direct et rétrograde est indépendant de la distance  $r$ .

La période est plus grande lorsque le satellite tourne dans le même sens que l'astre. On peut donner une explication intuitive de ce phénomène. Lorsque le satellite tourne dans le même sens que l'astre, il se déplace dans le même sens que le sol au dessous de lui et est donc soumis de la part de celui-ci à une force répulsive qui le soutient. La force centrifuge nécessaire pour le soutenir est donc moins grande et il tourne moins vite à l'équilibre.

Le phénomène précédent correspond encore, comme dans le cas de la sphère creuse à un effet d'entraînement de l'espace et des référentiels d'inerties. Nous allons le voir plus en détail dans le paragraphe suivant.

**13. Effet d'entraînement des référentiels d'inerties à l'extérieur d'un astre tournant.** - Examinons tout d'abord la trajectoire d'une particule venant de l'infini et se dirigeant droit sur le centre de l'astre. Cela correspond à un paramètre d'impact nul. Prenons l'équation de la géodésique en  $\theta$ .

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + 2\Gamma_{rt}^\theta \frac{dr}{d\tau} \frac{dt}{d\tau} = 0$$

$$\Gamma_{rt}^\theta = \frac{1}{2}\eta_{cp}^{\theta\theta} (g_{\theta r,t} + g_{\theta t,r} - g_{rt,\theta}) = \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{r^2} \right) \left( -\frac{2JG}{C^2r^2} \right) = \frac{JG}{C^2r^4}$$

$$t \simeq \tau \quad \text{et :} \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2JG}{C^2r^4} \frac{dr}{dt} = 0 \quad (14, 49)$$

Orientons  $\theta$  de façon à ce que  $J$  soit positif. On voit que lorsque  $\frac{dr}{dt} < 0$   $\frac{d^2\theta}{dt^2} > 0$ . Il se développe une force de type force de CORIOLIS déviant la particule vers les  $\theta$  positifs (fig. 14.2).

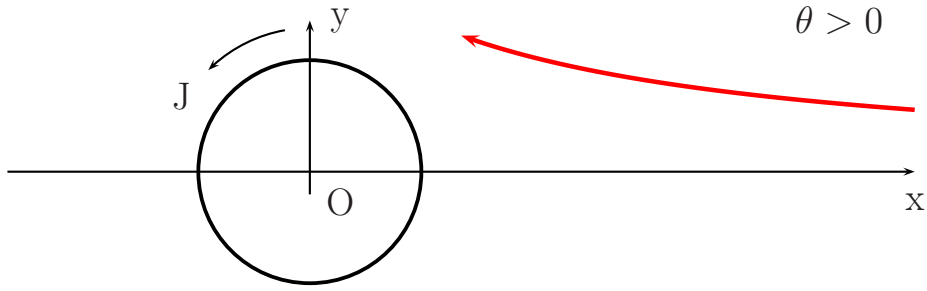


Fig. 14.2

Considérons maintenant un pendule de FOUCAULT battant parallèlement à l'axe des  $x$  (fig. 14.3).

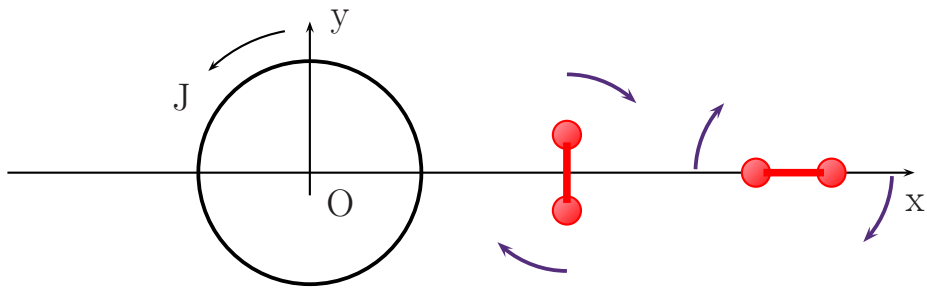


Fig. 14.3

Lorsqu'il se rapproche de l'astre, il est dévié vers les  $y > 0$ , lorsqu'il s'éloigne, il est dévié vers les  $y < 0$ . Cela correspond à une lente rotation dans le sens négatif du pendule. Considérons maintenant un pendule battant parallèlement à l'axe des  $y$ . Lorsqu'il va vers les  $y > 0$  il est soumis à une force répulsive par le sol au dessous de lui ; tandis que lorsqu'il va vers les  $y < 0$  il est soumis à une force attractive. Cela correspond encore à une lente rotation dans le sens négatif.

On voit donc qu'en dehors de l'astre, l'effet d'entraînement en rotation, par rapport aux étoiles lointaines, des référentiels d'inertie se fait dans le sens contraire de la rotation de l'astre, contrairement au cas de l'intérieur de la sphère creuse.

Il est facile de voir pourquoi. Ce qui compte, lorsque l'on raisonne dans le plan équatorial ( $\alpha = 0$ ), c'est le terme  $g_{t\theta,r}$ , or dans le cas de la sphère creuse :

$$g_{t\theta} = -\omega r^2 = \frac{4 GM}{3 RC^2} \Omega r^2 \quad g_{t\theta,r} = \frac{8 GM}{3 RC^2} \Omega r > 0$$

$$\text{Ici :} \quad g_{t\theta} = \frac{2JG}{C^2 r} \quad g_{t\theta,r} = -\frac{2JG}{C^2 r^2} < 0$$

Intuitivement, on voit que l'effet d'entraînement des référentiels d'inertie correspond aux tourbillons qui seraient créés dans un fluide visqueux entraîné par les corps en mouvements (fig. 14.4). La vitesse angulaire par rapport aux étoiles lointaines des référentiels d'inertie correspond au rotationnel de la vitesse de ce fluide dans le régime stationnaire (voir exercice 14.8).

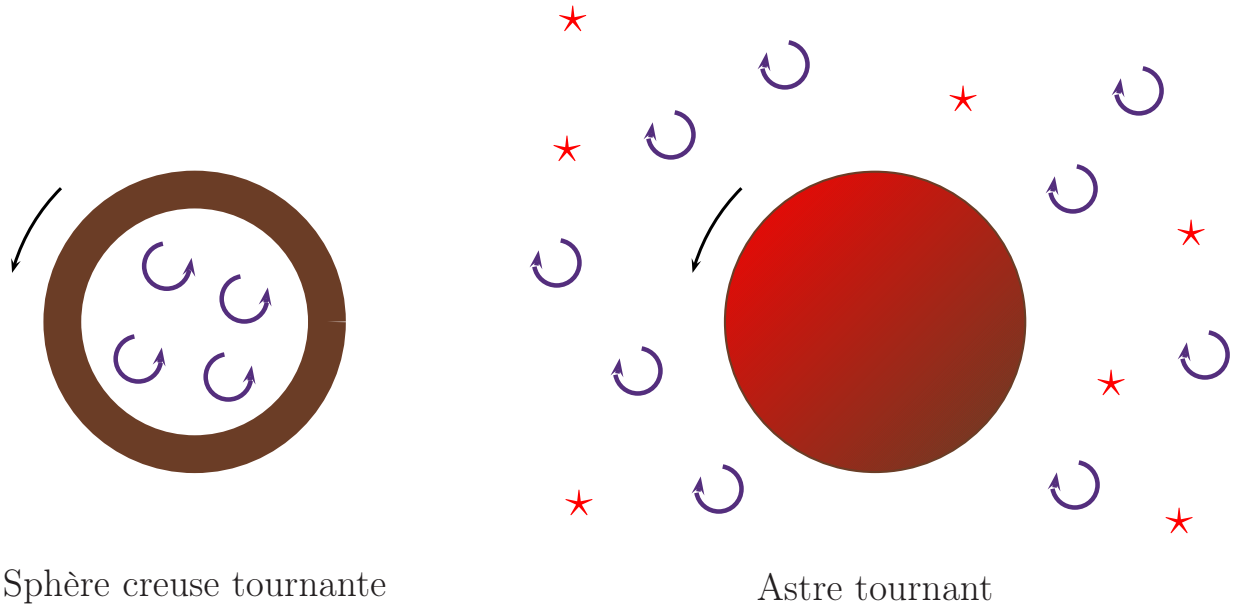


Fig. 14.4

On peut maintenant trouver une autre explication intuitive de la différence des périodes de rotation dans le sens direct et dans le sens rétrograde. Dans le référentiel fixe par rapport aux étoiles lointaines, dans le problème considéré, le pendule tourne comme dans un disque tournant dans le sens positif. On peut donc remplacer le problème considéré par le problème suivant : un astre ne tournant pas, mais vu depuis un disque tournant dans le sens positif. Dans un tel disque, le pendule de FOUCAULT tourne bien dans le sens négatif. La vitesse absolue du satellite est la même dans un sens ou dans l'autre. Cependant sa vitesse relative par rapport au disque est plus faible dans le sens direct que dans le sens rétrograde. D'où la différence des périodes considérées. Cela est schématisé sur la figure 14.5 .

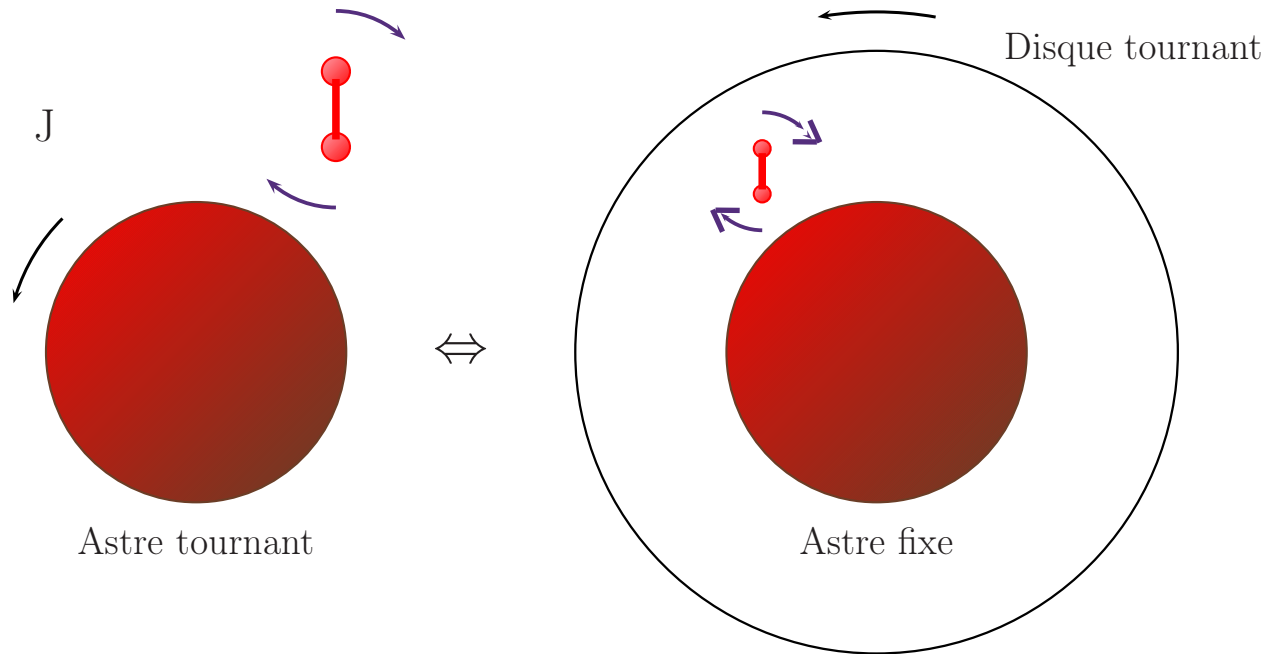


Fig. 14.5

## EXERCICES

### 14.1

En faisant une analogie avec le calcul de l'effet de LENSE et THIRRING dans le cas de la sphère creuse, et en utilisant  $g_{t\theta,r}$ , calculez la vitesse angulaire de précession des repères inertiels dans le plan équatorial d'un astre tournant.

### 14.2

Les équations de la magnétostatique s'écrivent :

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} \quad ; \quad \nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}$$

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad ; \quad \mathbf{F} = q \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$$

Montrez que l'on peut définir un vecteur  $\mathbf{T}^0 = (T^{0i})$ ; un vecteur  $\mathbf{h}^0 = (h^{0i})$ ; et un vecteur  $\mathbf{B}_G$ ; tels que les équations de la *gravitomagnétostatique* s'écrivent :

$$\mathbf{T}^0 = \rho_M C \mathbf{v} \quad ; \quad \nabla^2 \mathbf{h}^0 = \frac{16\pi G}{C^4} \mathbf{T}^0$$

$$\mathbf{B}_G = \text{rot } \mathbf{h}^0 \quad ; \quad \mathbf{F} = m C \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}_G \quad (v \ll C)$$

### 14.3

1. Pour une charge  $q$  de masse  $m$  animée d'un mouvement circulaire uniforme autour d'un point fixe  $O$ , calculez le rapport gyromagnétique  $\gamma_g$  que :  $\mathcal{M} = \gamma_g J$ .  $\mathcal{M}$  est le moment magnétique et  $J$  le moment cinétique.

2. À l'aide de la question 1 et des résultats de l'exercice 14.2 , retrouvez l'équation (14,49).

### 14.4

Utilisez le formalisme de la gravitomagnétostatique et les résultats de l'exercice 14.3 pour calculer le temps  $t_+ - t_-$  de la formule (14,48).

### 14.5

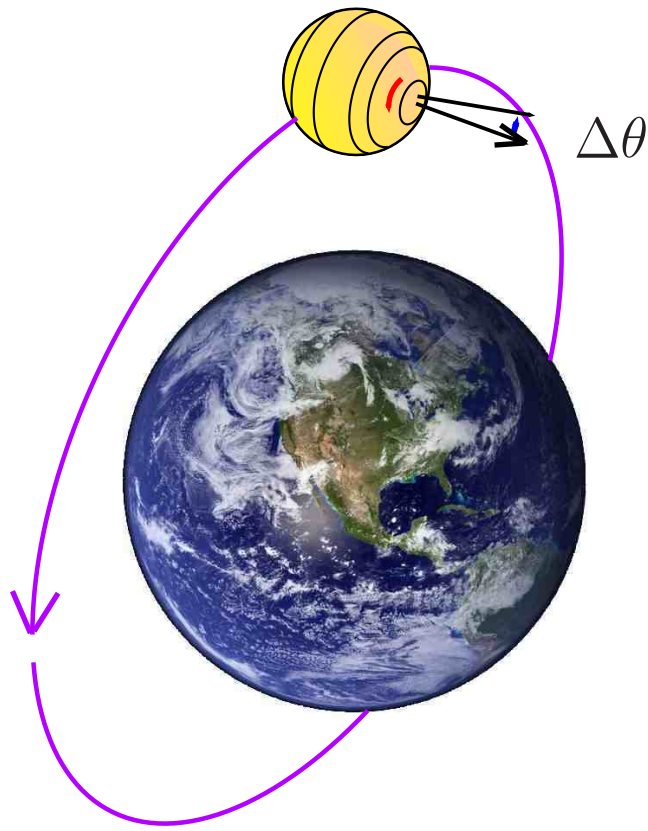
Utilisez le champ gravitomagnétique  $\mathbf{B}_G$  pour retrouver la formule (14,38). On rappelle que le champ magnétique à l'intérieur d'une sphère creuse de rayon  $R$  chargée avec la densité surfacique  $\sigma$  tournant à la vitesse angulaire  $\vec{\Omega}$  est uniforme et vaut  $\mathbf{B} = \frac{2\mu_0}{3} \sigma R \vec{\Omega}$ .

### 14.6

Il existe deux autres effets que celui de LENSE et THIRRING, à l'origine de la précession de l'axe d'un gyroscope satellisé autour de la Terre. Il y a la précession de THOMAS qui est un effet de pure Relativité restreinte pour un corps animé d'un mouvement circulaire uniforme. Il y a d'autre part la précession de FOKKER qui correspond au déplacement du gyroscope dans le champ de gravitation de la Terre.

Par raison de symétrie, ces deux effets font tourner l'axe du gyroscope autour d'une droite perpendiculaire au plan de rotation du satellite.

Considérons donc, sur la figure ci-dessous, un satellite en orbite polaire, l'axe d'un gyroscope placé dans ce satellite étant parallèle au plan équatorial terrestre et perpendiculaire au plan de rotation du satellite. Les deux effets précédents sont alors annulés.



On demande alors, en utilisant le formalisme de la gravitomagnétostatique, de calculer la précession de l'axe du gyroscope, placé dans un tel satellite, en secondes d'arc par an ; précession due à l'effet de LENSE et THIRRING seul.

On considérera pour cela un satellite en orbite circulaire basse, dont le rayon est de l'ordre du rayon de la Terre, soit  $6400 \text{ km}$ . On rappelle que la masse de la Terre vaut environ  $6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ .

**2.** Quelle est le sens de la précession pour un gyroscope immobile au dessus du pôle ? Au dessus de l'équateur ? Conclusion ?

### 14.7

(non corrigé). On considère un fluide parfait, mais la pression est telle que  $\frac{p}{C^2}$  n'est pas négligeable devant  $\rho$ . En utilisant la même démarche qu'au § 5, montrez que  $\mathbf{g}$  étant le vecteur accélération de la pesanteur :

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G \left( \rho + \frac{3p}{C^2} \right)$$

### 14.8

(non corrigé).

**1.** En comparant le  $ds^2$  de (12,12) et de (14,47), montrez qu'un observateur en rotation à la vitesse angulaire  $\omega_e = \frac{2JG}{C^2 r^3}$  ( $e$  pour espace) autour de l'astre n'a pas de terme en  $g_{t\theta}$  dans son  $ds^2$ .

La simultanéité définie par  $t$  correspond alors bien à la simultanéité définie par cet observateur. On peut alors avoir une image intuitive dans laquelle tout point de l'espace vide, c'est à dire l'espace lui-même est entraîné en rotation à cette vitesse angulaire autour de l'astre. L'espace joue le rôle du fluide du § 13.

**2.** On rappelle que pour un corps solide en rotation à la vitesse angulaire  $\vec{\Omega}$  le champ des vecteurs vitesse vérifie  $\mathbf{rot} \mathbf{v} = 2\vec{\Omega}$ . Calculez le rotationnel du champ des vecteurs vitesse des points de l'espace entraîné de la question 1, et retrouvez que localement, l'espace est animé d'une rotation sur lui-même et par rapport aux étoiles lointaines à la vitesse angulaire  $\omega_l = -\frac{JG}{C^2 r^3}$  (1 pour local) comme trouvé à la question 2 de l'exercice 14.6 . L'image du fluide visqueux du § 13 est ainsi pleinement justifiée. C'est l'espace vide lui-même qui est ce fluide.