

Chapitre Quinze

L'ÉNERGIE GRAVITATIONNELLE

1. Retour à l'approximation linéaire de l'équation du champ, équation de BIANCHI dans ce cadre. - Il existe beaucoup de solutions au problème de la recherche d'un tenseur d'impulsion-énergie du champ de gravitation, dont aucune n'est pleinement satisfaisante. Nous nous placerons dans ce chapitre au voisinage de l'approximation linéaire : c'est à dire dans des situations où, sauf en des régions limitées, cette approximation est valable. Cela correspond à un cas où l'intuition peut encore s'appliquer.

Posons, comme au chapitre 14 :

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \quad (15, 1)$$

Comme dans ce chapitre, les coordonnées seront x^α . Dans le traitement mathématique que nous effectuons, nous ne supposons pas ici $|h^{\alpha\beta}| \ll 1$, sauf lorsque nous supposerons l'approximation linéaire de l'équation du champ vraie. Mais nous supposerons qu'à l'infini $|h^{\alpha\beta}| \rightarrow 0$, l'espace-temps devenant celui de la Relativité restreinte, l'espace-temps plat ; ceci précise le choix des coordonnées x^α .

Nous prendrons comme convention de monter et d'abaisser les indices pour le tenseur $h^{\alpha\beta}$ ainsi que pour le tenseur de courbure et le tenseur de RICCI au premier ordre en $h^{\alpha\beta}$, et les coordonnées x^α , au moyen de $\eta^{\alpha\beta}$. Le point de départ réel sera $h_{\alpha\beta}$ pour les tenseurs et x^α pour les coordonnées, de façon à pouvoir utiliser la formule (11,23) pour l'expression au premier ordre du tenseur de courbure. C'est d'ailleurs pour cette raison que nous avons utilisé les coordonnées covariantes pour écrire l'équation (15,1).

Substituons donc l'expression (15,1) du tenseur métrique dans le calcul du tenseur de RICCI et de la courbure scalaire. Ordonnons les différents monômes suivant les ordres en $h^{\alpha\beta}$. Désignons alors par $R^{(1)\alpha\beta}$ la partie du tenseur de RICCI qui est du premier ordre en $h^{\alpha\beta}$. $R^{(1)}$ désigne de même la partie de la courbure scalaire du premier ordre en $h^{\alpha\beta}$. L'équation linéaire du champ (14,9) s'écrit alors :

$$R^{(1)\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta} R^{(1)} = -\frac{8\pi G}{C^4} T^{\alpha\beta} \quad (15, 2)$$

Notons que l'on peut écrire cette équation avec les indices en haut et avec notre convention pour monter les indices, car lorsque nous l'écrivons, on suppose que $|h^{\alpha\beta}| \ll 1$, et $\eta^{\alpha\beta} \simeq g^{\alpha\beta}$. Il s'agit en effet d'une approximation au premier ordre de l'équation du champ vraie pour $|h^{\alpha\beta}| \ll 1$.

La démonstration des identités de BIANCHI concernant le premier membre, effectuée au § 18 du chapitre 11 peut alors être recopiée en utilisant **ces expressions au premier ordre**. Cependant, cette fois-ci, on ne suppose plus $|h^{\alpha\beta}| \ll 1$ pour les identités de BIANCHI seules ; on peut en effet s'occuper de la valeur du premier membre de (15,2) même quand $|h^{\alpha\beta}|$ n'est pas très petit devant 1. Il faut remplacer partout la dérivation covariante par la dérivation ordinaire. Tout d'abord, nous partons de l'expression (11,23) pour $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$, les indices étant montés grâce à $\eta^{\alpha\beta}$.

On arrive alors à :

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta,\varepsilon} + R_{\alpha\beta\varepsilon\gamma,\delta} + R_{\alpha\beta\delta\varepsilon,\gamma} = 0$$

Nous effectuons ensuite d'une manière répétée la multiplication contractée par $\eta^{\alpha\beta}$, grâce à notre convention pour monter les indices. La propriété utilisée de la nullité de la dérivée covariante du tenseur métrique est ici à remplacer par la propriété de nullité de la dérivée simple de $\eta^{\alpha\beta}$. On arrive alors à l'identité de BIANCHI linéaire :

$$\left(R^{(1)\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta} R^{(1)} \right)_{,\beta} = 0 \quad (15, 3)$$

Lorsque l'équation du champ linéaire (15,2) est supposée vraie, elle donne alors :

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0 \quad (15, 4)$$

2. Interprétation physique de l'équation (15,4). - Comme nous l'avons vu au § 13 du chapitre 13, l'équation (15,4) traduit la conservation du quadri-vecteur impulsion-énergie des particules de matière et des particules virtuelles d'interactions (autres que la gravitation).

Ceci a bien lieu en l'absence de champ gravitationnel. Autrement dit, ce que l'approximation linéaire de l'équation du champ nous donne, c'est l'absence d'action gravitationnelle entre elles des particules correspondant à $T^{\alpha\beta}$ donc à l'origine des actions gravitationnelles considérées. Ainsi, dans le cadre de l'approximation

mation linéaire, la matière à l'origine des actions gravitationnelles est considérée comme sans action gravitationnelle sur elle-même.

Considérons un exemple concret, celui de la Terre créant un champ gravitationnel et d'un satellite considéré comme ponctuel tournant autour d'elle. Une manière de traiter le problème est de calculer le champ gravitationnel créé par la Terre au moyen de l'approximation linéaire de l'équation du champ, puis d'étudier le mouvement du satellite grâce à l'équation des géodésiques.

Si l'on prend comme système la Terre + le satellite + le champ gravitationnel, l'équation du champ nous donne la trajectoire du satellite. Or, si l'on prend l'équation linéaire du champ, cela ne marche pas ! On arrive au fait que le satellite a une trajectoire rectiligne (équation (15,4)) ! D'où vient la contradiction ? D'où vient que les équations linéaires du champ ne peuvent pas s'appliquer ? On peut tout à fait dans ce problème considérer le mouvement de la Terre comme donné. D'autre part, la Terre peut être considérée comme une distribution volumique de matière avec la densité ρ . Autour de la Terre et à l'intérieure de celle-ci, il est donc tout à fait justifié d'utiliser l'équation linéaire du champ (insistons bien sur le fait que le mouvement de la Terre est donné et n'est pas calculé !). En fait, le problème vient du satellite considéré comme ponctuel. Le champ gravitationnel qu'il crée en $\frac{1}{r^2}$ devient infini pour $r \rightarrow 0$. La particule correspond à une singularité du champ gravitationnel, et en ce point, l'approximation linéaire de l'équation du champ ne s'applique plus.

En traitant le problème en calculant le champ créé par la Terre avec l'approximation linéaire, et le mouvement du satellite grâce à l'équation des géodésiques, on utilise bien l'approximation linéaire là où on peut le faire et, pour le satellite, là où c'est interdit, sans le dire, on utilise une formule (l'équation des géodésiques) qui est équivalente à la non linéarité de l'équation du champ.

3. Lien avec l'énergie gravitationnelle. - En mécanique classique, le mouvement du satellite peut s'interpréter en termes énergétiques. Il y a conservation de l'énergie. Lorsqu'il se rapproche de la Terre, son énergie potentielle de gravitation diminue, tandis que son énergie cinétique augmente. Est-il possible de trouver un tenseur $t^{\alpha\beta}$ qui serait le tenseur d'impulsion-énergie du champ de gravitation ? Ce tenseur serait tel que l'on ait :

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial t^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0 \quad (15, 5)$$

En considérant que l'approximation linéaire s'applique partout, on arrive à une erreur : $\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0$ correspondant à une trajectoire rectiligne à vitesse constante pour le satellite. Nous en arrivons à la conclusion que, physiquement, l'existence

d'un tenseur d'impulsion-énergie pour la gravitation est liée à la présence de la singularité du champ au niveau du point matériel. D'une manière générale, elle est liée à la partie non linéaire du tenseur d'EINSTEIN. Une solution est donc d'utiliser la partie non linéaire du tenseur d'EINSTEIN.

4. L'énergie gravitationnelle. - Nous avons vu que dans un ascenseur en chute libre (référentiel galiléen local), on peut annuler totalement la gravitation. Si l'on compare avec l'électromagnétisme décrit par le tenseur $F^{\alpha\beta}$, la situation est radicalement différente. Certes, lorsque l'on change de référentiel, les valeurs de $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ changent, on peut même trouver parfois un référentiel où l'un de ces deux vecteurs est nul. Mais, cela correspond pour le tenseur $F^{\alpha\beta}$ à des variations de ses composantes par changement de base. Le tenseur, en tant qu'entité unique reste invariant. En particulier, il est impossible de trouver un référentiel où ce tenseur s'annule, c'est à dire qu'il est impossible d'annuler simultanément toutes ses composantes. Passant à l'énergie, dans le référentiel galiléen, l'énergie gravitationnelle doit être considérée comme nulle, alors que pour l'énergie électromagnétique, le raisonnement fait avec $F^{\alpha\beta}$ s'applique. Le tenseur $T_{\text{ch}}^{\alpha\beta}$ existe en tant qu'entité et ne peut être annulé dans aucun référentiel.

La notion d'énergie gravitationnelle n'a donc pas d'existence locale. On peut trouver dans le cas général, mathématiquement, un tenseur $t^{\alpha\beta}$ (ayant une transformation des composantes correspondant à un tenseur, uniquement vis à vis des transformations de LORENTZ de l'arrière plan) lié au champ gravitationnel qui obéit à une loi de conservation avec $T^{\alpha\beta}$. Mais il se pose un problème quant à l'écriture de cette loi de conservation ! La question se pose en effet de faire intervenir dans cette loi, multiplicativement $-\mathbf{g}$, ou $\sqrt{-\mathbf{g}}$, $\mathbf{g}$ étant le déterminant du tenseur métrique, à cause de la forme générale de l'élément de volume en coordonnées curvilignes. D'autre part, la loi de conservation étant choisie, la solution mathématique pour $t^{\alpha\beta}$ n'est pas unique. Il en existe même une infinité.

Les seuls cas où nous parlerons ici d'énergie gravitationnelle correspondent à des cas du type de l'exemple du satellite et de la Terre. Dans de telles situations, l'espace-temps a à peu près partout la structure correspondant à la Relativité restreinte, sauf dans quelques régions isolées (qui peuvent être des singularités du champ) dans lesquelles le champ est particulièrement intense. Cela est équivalent mathématiquement à dire qu'à l'infini, l'espace-temps a la structure correspondant à la Relativité restreinte. Nous pourrions alors utiliser la décomposition (15,1) du tenseur métrique, avec $|h^{\alpha\beta}| \ll 1$ à l'infini.

Dans les régions où la Relativité restreinte s'applique approximativement, la situation gravitationnelle est alors bien décrite par le tenseur :

$$R^{(1)\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} R^{(1)}$$

Dans les régions de champ intenses, il faut utiliser :

$$R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R$$

On voit que les régions où le champ est intense sont très petites par rapport aux régions où il est faible (qui s'étendent à l'infini!). Dans cette situation, on peut accorder une réalité physique au champ correspondant à l'approximation au premier ordre du tenseur d'EINSTEIN. On a alors partout deux champs gravitationnels distincts, celui décrit par l'approximation au premier ordre, et le champ décrit par le tenseur exact d'EINSTEIN, cette distinction correspondant à une réalité physique. Cependant, cette réalité correspond à un point de vue particulier, qui correspond à un choix de coordonnées telles que l'élément linéaire soit de MINKOWSKI à l'infini. Cela n'enlève rien à cette réalité, car par exemple, la valeur du vecteur champ électrique $\mathbf{E}$ dépend du référentiel choisi pour l'observer, mais cela n'enlève rien à nos yeux à sa réalité physique.

Ce qui vient d'être dit ci-dessus justifie physiquement le traitement mathématique du paragraphe suivant.

5. Le tenseur d'impulsion-énergie du champ gravitationnel. - Nous prendrons la convention du § 1 pour la montée et la descente des indices, sauf pour le tenseur de courbure réel, le tenseur de RICCI réel, et le tenseur métrique $g^{\alpha\beta}$ pour lesquelles nous monterons et descendrons les indices grâce à ce tenseur métrique. Nous pouvons alors écrire l'équation exacte du champ sous la forme :

$$R_{\alpha\beta}^{(1)} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} R^{(1)} = -\frac{8\pi G}{C^4} (T_{\alpha\beta} + t_{\alpha\beta}) \quad (15, 6)$$

avec :

$$t_{\alpha\beta} = \frac{C^4}{8\pi G} \left(R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R - R_{\alpha\beta}^{(1)} + \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} R^{(1)} \right) \quad (15, 7)$$

L'équation (15,6) correspond bien au traitement que nous voulons faire :

1- Elle est exacte.

2- Elle fait intervenir le champ gravitationnel correspondant au tenseur d'EINSTEIN au premier ordre en $h^{\alpha\beta}$, qui est le champ qui nous intéresse dans la région où la gravitation est faible.

À ce sujet, répétons que nous accordons une réalité physique à ce champ au premier ordre alors qu'il correspond à une approximation qui d'ailleurs n'est plus

valable en champ fort ! Ceci est à comparer avec la méthode des perturbations de FEYNMAN en électrodynamique quantique. L'interaction électromagnétique y est représentée par des diagrammes de FEYNMAN. Ceci résulte d'un développement en termes de plus en plus petits. Nous avons les diagrammes de FEYNMAN au premier ordre, au deuxième ordre etc. Cependant on est amené à accorder une réalité physique aux photons virtuels échangés dans les diagrammes. En physique, dès que les mathématiques font apparaître une structure correspondant à une description juste de l'univers, il nous faut accorder une réalité physique à cette structure dans la philosophie réaliste que nous adoptons.

En ce sens, la décomposition en deux parties du champ gravitationnel dans l'équation (15,6), correspondant d'une part aux tenseurs au premier ordre, d'autre part à $t_{\alpha\beta}$, n'est pas pour nous simplement une astuce mathématique. Nous sommes amené à lui accorder une réalité physique.

3- Nous séparons bien la partie linéaire du champ, et la partie non linéaire.

4- La non linéarité de l'équation du champ est à l'origine du fait que le champ gravitationnel est sa propre source, comme nous l'avons vu au § 11 du chapitre 13. Or nous plaçons bien la partie non linéaire de l'équation du champ sous la forme de $t_{\alpha\beta}$ qui est mis sur le même plan que $T_{\alpha\beta}$, comme terme source. En ce sens, la différence de traitement entre la gravitation d'une part, et la matière et les autres interactions d'autre part, en ce qui concerne la création du champ gravitationnel, est effacée.

6. Valeur moyenne du tenseur d'impulsion-énergie du champ de gravitation. - Comme nous l'avons vu au paragraphe 1, le premier membre de l'équation (15,6) obéit à l'identité de BIANCHI linéarisée. Il en résulte que :

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial t^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0 \quad (15, 8)$$

Nous pouvons donc appeler $t^{\alpha\beta}$ le tenseur d'impulsion-énergie du champ de gravitation d'après ce qui a été dit au § 21 du chapitre 8. Ce tenseur est bien symétrique, comme nous l'indique l'équation (15,7). Le tenseur d'impulsion-énergie total d'un système sera appelé $\tau^{\alpha\beta}$:

$$\tau^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta} + t^{\alpha\beta} \quad (15, 9)$$

L'équation (15,8) peut s'interpréter comme une traduction mathématique possible de la conservation de l'impulsion-énergie totale du système (voir § 7). On peut en déduire en particulier l'équation :

$$\overline{\tau^{i\alpha}} = \overline{T^{i\alpha}} + \overline{t^{i\alpha}} = 0 \quad (15, 10)$$

permettant d'écrire l'équation (8,17) pour $\bar{\tau}$. Ceci justifie ce qui a été dit au § 21 du chapitre 8. D'autre part, on a :

$$\overline{\tau^{00}} = \overline{T^{00}} + \overline{t^{00}} \quad (15, 11)$$

Reprenons l'exemple du § 12 du chapitre 6 des deux masses m qui s'attirent gravitationnellement et qui se rapprochent. Lorsqu'elles se rapprochent, les forces intérieures d'attraction gravitationnelle travaillent, ce qui correspond à une perte d'énergie du système. Cette perte d'énergie correspond à une perte de masse Δm par $\Delta E = \Delta m C^2$ et donc également à une diminution du pouvoir attractif par la gravitation de l'ensemble des deux masses. C'est lorsque les deux masses sont rapprochées que $\overline{t^{00}}$ se manifeste, et on peut écrire :

$$\Delta m C^2 = V \left(\overline{\tau^{00}} - \overline{T^{00}} \right) = V \overline{t^{00}} < 0$$

Ainsi **l'énergie gravitationnelle est négative**, ce qui correspond à une composante de temps P^0 négative pour les gravitons, ceux-ci se manifestant quand les deux masses se rapprochent.

7. Quadrivecteur impulsion-énergie total d'un système, y compris la gravitation. - Soit un système isolé, c'est à dire inclus dans un domaine $\mathcal{E}_t$ sur la frontière duquel $\tau^{\alpha\beta} = 0$. Cela est réalisé dès que le champ est suffisamment faible sur cette frontière ($t^{\alpha\beta} \simeq 0$) avec également $T^{\alpha\beta} = 0$ sur la frontière. L'équation (13,19) s'applique alors en remplaçant T par τ et on a l'équation de conservation suivante :

$$P^\alpha = \frac{1}{C} \int_{\mathcal{E}_t} \tau^{\alpha 0} d^3x = Cte \quad (15, 12)$$

Nous pouvons alors interpréter P^α comme le quadrivecteur impulsion-énergie total du système comprenant toutes les formes de matière et d'interaction, y compris la gravitation. Nous allons voir ci-dessous et au paragraphe suivant que P^α a bien toutes les propriétés pour cela.

$t^{\alpha\beta}$ n'est pas un tenseur, c'est à dire que ses composantes ne se transforment pas comme celle d'un tenseur pour des transformations générales des coordonnées. Cependant les transformations de LORENTZ de l'arrière plan sont cohérentes avec la décomposition (15,1) du tenseur métrique en somme du tenseur de MINKOWSKI et de $h^{\alpha\beta}$. Il en résulte que si l'on se restreint à ces transformations, $t^{\alpha\beta}$ se comporte comme un tenseur, chacun des termes le composant se comportant comme un tenseur (voir le chapitre 14 sur l'approximation linéaire).

Une équation du type (15,12) reliant le quadrivecteur P^α à un tenseur quelconque $\tau^{\alpha\beta}$ est covariante pour les transformations de LORENTZ. En effet, elle

est vrai dans tout référentiel galiléen, P^α se transformant comme un quadrivecteur, et $\tau^{\alpha\beta}$ comme un tenseur. Il en résulte, et sans faire aucun calcul, qu'à chaque fois que l'on mettra un tenseur vis à vis des transformation de LORENTZ de l'arrière plan sous le signe d'intégration dans cette formule, la quantité P^α correspondante se transformera comme un quadrivecteur dans de telles transformations. Il en résulte donc, compte tenue de la propriété de transformation de $\tau^{\alpha\beta}$ que P^α défini dans (15,12) est bien un quadrivecteur.

8. L'équation du champ redonne la loi de conservation de l'impulsion de la mécanique de la Relativité restreinte. - Supposons maintenant que la matière dans le domaine $\mathcal{E}_t$ soit divisée en des sous-systèmes $\mathcal{C}_i$; $i = 1, \dots, n$ distants les uns des autres : fig. 15.1.

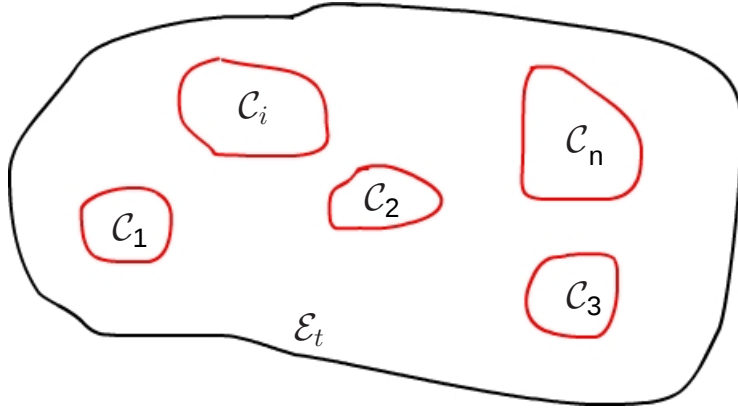


Fig. 15.1

Supposons qu'entre deux sous-systèmes, le champ gravitationnel soit négligeable. Cela revient à supposer que les sous-systèmes sont tellement éloignés les uns des autres qu'en première approximation, ils n'interagissent pas gravitationnellement. Dans l'espace entre les sous-systèmes, la Relativité restreinte s'applique donc, et $h^{\alpha\beta} = 0$. Nous pouvons alors écrire :

$$h^{\alpha\beta} = h_1^{\alpha\beta} + \dots + h_i^{\alpha\beta} + \dots + h_n^{\alpha\beta} \quad (15, 13)$$

$h_i^{\alpha\beta}$ est non nul uniquement dans $\mathcal{C}_i$ etc. Les termes d'interférence entre les différents $h_i^{\alpha\beta}$ créés par les différents sous systèmes dans le calcul de $\tau^{\alpha\beta}$ peuvent être négligés, car dès que l'un des $h_i^{\alpha\beta}$ est important, tous les autres sont négligeables. Ainsi, $\tau^{\alpha\beta}$ est non nul là où un $h_i^{\alpha\beta}$ est non nul et à cet endroit, ne dépend que de ce terme là. On arrive alors à :

$$\begin{aligned} P^\alpha &= \int_{\mathcal{E}_t} \tau^{\alpha 0} d^3x = \sum_i \int_{\mathcal{C}_i} \tau_i^{\alpha 0} d^3x \\ P^\alpha &= \sum_{i=1,n} P_i^\alpha = Cte \end{aligned} \quad (15, 14)$$

L'un ou plusieurs des sous-systèmes peuvent être constitués d'une particule massique ou de masse nulle comme un photon, dont le tenseur d'impulsion-énergie se réduit à $T^{\alpha\beta}$; la quantité correspondante P^α est alors exactement celle de la mécanique de la Relativité restreinte. Ainsi, l'équation du champ nous redonne la loi de conservation de cette quantité. Ceci avait déjà été vu au § 14 du chapitre 13 pour des systèmes contenant toute forme de matière et de champ autre que la gravitation. Ces systèmes étaient d'autre part supposés avoir une interaction gravitationnelle interne négligeable, car ils étaient plongés dans un espace-temps plat. Nous étendons ici cette loi au cas où les champs gravitationnels sont suffisamment intenses pour apporter leur contribution à l'intérieur des sous-systèmes, au cas de minitrous noirs, de singularités du champ par exemple, ou au cas d'étoiles à neutrons. Les systèmes sont encore supposés ne pas interagir gravitationnellement entre eux tant qu'on écrit (15,13) donc (15,14).

Une particule comme l'électron est supposée ponctuelle dans les théories modernes. Il lui correspond donc une singularité du champ ou au moins une région où le champ gravitationnel est très intense. Dans ce cas, il est impossible dans P^α donc dans $\tau^{\alpha\beta}$ de distinguer la partie gravitationnelle pure $t^{\alpha\beta}$ de l'autre partie $T^{\alpha\beta}$. Autrement dit dans la masse de l'électron par exemple, quelle est la partie due au champ électromagnétique? Quelle est la partie due au champ gravitationnel lui-même? L'impossibilité de distinguer entre les deux, vu de l'extérieur, justifie notre traitement de l'énergie gravitationnelle qui met dans l'équation du champ $T^{\alpha\beta}$ et $t^{\alpha\beta}$ exactement sur le même plan. Voir à ce sujet, ce qui a été dit au § 1 du chapitre 7.

On retrouve par la loi précédente qu'un sous-système, quelle que soit sa constitution interne, se déplace en ligne droite et à vitesse constante sauf lorsqu'il s'approche trop près d'un autre sous-système, ces deux sous-systèmes interagissant alors gravitationnellement par exemple. Les sous-systèmes ne doivent pas interagir gravitationnellement pour qu'on puisse les séparer en différents sous-systèmes ayant chacun son quadrivecteur P_i^α . Remarquons qu'il nous faut savoir, pour affirmer cela, que dans tous les cas, P^α est colinéaire à la vitesse. Par raison de symétrie, un corps immobile dans son ensemble a un quadrivecteur impulsion-énergie se réduisant à la composante P^0 . Lorsque le corps est animé d'une certaine vitesse, le quadrivecteur se calcule par transformation de LORENTZ à partir de sa valeur dans son référentiel propre où il est au repos. On est donc assuré, du fait que P^α est un quadrivecteur, que toutes les formules de la mécanique de la Relativité restreinte sont valables, en particulier celles reliant l'impulsion à la vitesse.

On retrouve bien de nouveau, dans le cas ci-dessus, que l'équation du champ redonne la loi dynamique, cette loi étant en accord complet avec la mécanique de la Relativité restreinte telle qu'elle est exprimée par $\Sigma P_i^\alpha = \mathbf{Cte}$.

En conclusion, la Relativité générale contient donc le concept de force de la Mécanique newtonienne, en tant que débit d'impulsion, puisqu'elle contient le concept d'impulsion.

Vérifions maintenant qu'on retrouve le fait qu'un système localisé décrit une géodésique de l'espace-temps : prenons le cas où le système est bien délimité par un domaine $\mathcal{E}_t$ en dehors duquel le champ gravitationnel est dépourvu de toute singularité et varie d'une manière appréciable sur une échelle bien plus grande que $\mathcal{E}_t$. On peut alors prendre un référentiel galiléen englobant $\mathcal{E}_t$. La conservation de P^α pour le système considéré dans le référentiel galiléen assurera le fait que le système, globalement, décrira une géodésique de l'espace-temps (cf § 3, chapitre 12). Nous avons étendu ce qui a été dit au § 14 du chapitre 13 au cas absolument général où la gravitation joue un rôle important dans la constitution interne du système considéré : l'équation du champ, loi de force, donne complètement la loi dynamique, c'est à dire qu'un système isolé décrit une géodésique de l'espace-temps quelle que soit sa constitution, même si c'est un paquet d'énergie gravitationnelle pure par exemple : une onde gravitationnelle.

9. L'équation du champ implique qu'à distance, tout corps est complètement décrit en ce qui concerne son action gravitationnelle passive et son inertie par un scalaire unique, sa masse m . - Comme nous l'avons vu ci-dessus, à un corps globalement immobile correspond un quadrivecteur impulsion-énergie total réduit à P^0 . Pour un tel système, et compte tenu du fait que :

$$\frac{\partial \tau^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0$$

le raisonnement du § 10 du chapitre 8 s'applique. Si le système est dans un état stationnaire ou périodique, et si $P^i = 0$, on a :

$$\overline{\tau^{ij}} = 0 \quad ; \quad \overline{\tau^{i0}} = 0 \quad ; \quad \text{seul } \overline{\tau^{00}} \neq 0$$

Nous voyons que la seule valeur non nulle dans ce cas du quadrivecteur impulsion-énergie est :

$$P^0 = \frac{1}{C} \overline{\tau^{00}} V = m C$$

$$\text{En posant :} \quad \overline{\tau^{00}} = \frac{m C^2}{V} \quad (15, 15)$$

Ainsi la masse inerte du corps, celle qui intervient dans le quadrivercteur impulsion-énergie obéissant à l'équation (15,14), est complètement caractérisée par la seule donnée du nombre :

$$\overline{\tau^{00}}$$

D'autre part, $\tau^{\alpha\beta}$ intervient comme source du champ dans l'équation (15,6) compte tenu de (15,9), et correspond donc à une action gravitationnelle active. Compte tenu de ce qui est dit ci-dessus sur les valeurs moyennes, nous sommes amené à penser que loin d'un corps, l'action gravitationnelle que l'on ressent de la part de celui-ci ne dépend pas des composantes de $\tau^{\alpha\beta}$ dont les valeurs moyennes sont nulles et ne dépend que de la valeur moyenne de τ^{00} . Ainsi, l'action gravitationnelle active d'un corps, loin de celui-ci est caractérisée par un scalaire unique, sa masse gravitationnelle active égale à sa masse inerte. Nous étendons ainsi ce qui a été dit au § 13 du chapitre 13 au cas où la gravitation intervient elle-même comme source de champ et d'inertie.

Certe, un astre tournant comme au § 11 du chapitre 14 a bien un effet autre que celui dû à sa masse, mais cet effet devient rapidement négligeable lorsque la distance augmente, les distances internes au système nécessaire pour créer l'effet devenant négligeables par rapport à la distance du système au point d'observation.

On a bien dans l'exemple du § 12 du chapitre 14 $t_+ - t_- = Cte$, mais comme la période augmente en fonction de la distance du satellite, lorsque celui-ci est suffisamment loin, et pour un intervalle de temps donné, la différence de comportement pour la rotation dans un sens ou dans l'autre est négligeable.

Souvenons nous maintenant que le fait que l'équation du champ nous donne pour trajectoire des particules des géodésiques de l'espace-temps, correspond au principe d'équivalence, et assure l'identité entre masse inerte et masse gravitationnelle passive. Nous appelons masse passive, celle qui caractérise comment un corps est sensible à un champ gravitationnel. Ainsi, nous arrivons au fait que l'équation du champ, donc la Relativité générale, implique l'identité de ces trois masses, ce qui restait un mystère en gravitation newtonienne. Nous démontrons rigoureusement l'identité de la masse gravitationnelle active et de la masse inerte, donc l'identité de ces trois masses au § 14 de ce chapitre, et au § 6 du chapitre 16.

Notons que dans le cadre de la gravitation newtonienne, l'identité entre les masses gravitationnelles actives et passives correspond à la conservation de l'impulsion totale pour les deux masses en interaction, donc au principe de l'action et de la réaction. L'équation du champ nous donne cette conservation de l'impulsion, il est naturel qu'elle nous donne également cette identité.

10. Partage entre l'énergie gravitationnelle et les autres formes d'énergie. - Le partage de l'énergie $P^0 = \frac{1}{C} \int \tau^{00} d^3x$ en une énergie gravitationnelle $\frac{1}{C} \int t^{00} d^3x$ et une énergie de matière et des autres champs $\frac{1}{C} \int T^{00} d^3x$ n'est pas canonique et dépend du choix des coordonnées. Une modification des coordonnées d'espace x^i sans modification de la coordonnée temporelle ne modifie pas T^{00} ; en effet $T^{\bar{0}\bar{0}} = \Lambda^{\bar{0}}_0 \Lambda^{\bar{0}}_0 T^{00} = T^{00}$.

Cependant, dans la mesure où les coordonnées redonnent la métrique de MINKOWSKI à l'infini, à l'intérieur d'un astre par exemple, on peut prendre de nouvelles coordonnées y^i dilatées ou contractées avec $y^i = \lambda x^i$ avec $\lambda \rightarrow 0$ à l'infini.

$$d^3y = \lambda^3 d^3x \quad \text{et} \quad \frac{1}{C} \int T^{00} d^3y = \lambda^3 \frac{1}{C} \int T^{00} d^3x$$

Par contre, $\int T^{00}$ ne dépend pas du choix des coordonnées utilisées pour le calculer ! On peut en effet (§ 13) montrer que l'on peut calculer cette intégrale par une intégrale de surface loin du corps. Or, à l'infini, on doit retrouver la métrique de MINKOWSKI.

11. Localisation de l'énergie gravitationnelle. - Sur la formule (15,6) donnant $t_{\alpha\beta}$, on voit qu'en espace vide, c'est à dire lorsque $T_{\alpha\beta} = 0$, le tenseur d'impulsion-énergie du champ de gravitation se réduit aux termes du premier ordre en $h_{\alpha\beta}$ pour le tenseur de courbure. Si l'on fait un calcul dans le cadre de l'approximation linéaire, c'est à dire en considérant que la gravitation newtonienne est valable par exemple, ce tenseur est également considéré comme nul. On voit donc que dans l'espace vide en dehors des masses créant le champ, $t_{\alpha\beta} = 0$. Par contre, là où $T_{\alpha\beta} \neq 0$ et lorsque ce tenseur est important, le tenseur d'EINSTEIN est non nul et peut être important, et $t_{\alpha\beta} \neq 0$.

Si l'on considère une situation où un ensemble de masses placées dans le vide interagissent, il faut bien voir que notre traitement de l'énergie gravitationnelle localise cette énergie là où il y a des masses. Dans l'espace vide, l'énergie gravitationnelle est pratiquement nulle. Notre traitement est donc complètement différent de celui que l'on fait en électrostatique par exemple. Dans ce dernier cas, on sait que l'on considère que l'énergie est localisée dans l'espace entre les charges avec la densité $\frac{\epsilon_0 \mathbf{E}^2}{2}$. Essayons de justifier physiquement cela : nous avons vu que le fait que deux masses s'attirent est lié à la non linéarité de l'équation du champ là où se situent les masses. L'énergie gravitationnelle qui est un moyen de décrire cette attraction est donc naturellement localisée là où sont les masses ; là où il y a une singularité du champ.

Considérons en électrostatique une charge ponctuelle. Le champ électrique que cette charge crée devient infini au voisinage de la charge, quand $r \rightarrow 0$. Il

correspond donc également une densité d'énergie très forte (infinie) sur la charge. Cependant, nous évacuons cela en renormalisant la masse. On dit que compte tenu de la relativité, à cette énergie infinie au voisinage de la charge, correspond une masse infinie. On affirme alors qu'il doit exister une énergie négative d'un autre type également très grande où infinie qui compense exactement la masse infinie d'origine électrostatique, pour donner une masse totale finie. Nous évacuons donc l'intégrale de $\frac{\epsilon_0 \mathbf{E}^2}{2}$, $\mathbf{E}$ étant le champ créé par la charge, pour le calcul de l'énergie de la particule, donc de sa masse. La masse est une donnée faisant référence à toutes les énergies liées à la particule.

Lorsque nous envisageons l'énergie d'interaction de deux particules chargées, on évalue alors la variation de l'énergie correspondant au terme d'interférence entre les champs électriques créés par les deux particules. Les termes correspondant à chaque particule seule qui ne varient pas suivant la séparation des particules sont évacués en considérant qu'ils sont pris en compte lorsque l'on considère les masses des particules :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_{\text{interaction}} + \mathcal{E}_2$$

$$\mathcal{E} = \underbrace{\int_{\infty} \epsilon_0 \frac{\mathbf{E}_1^2}{2} dv}_{\infty} + \int \epsilon_0 \mathbf{E}_1 \bullet \mathbf{E}_2 dv + \underbrace{\int_{\infty} \epsilon_0 \frac{\mathbf{E}_2^2}{2} dv}_{\infty}$$

Ainsi, on élimine des infinis en les incorporant dans les masses des particules, et on garde le terme fini. Il s'agit déjà, dans le cadre de l'électromagnétisme classique, d'un procédé de renormalisation qu'on retrouve en électrodynamique quantique. Notons à ce propos qu'il se pose un problème de localisation de cette énergie renormalisée, suivant qu'elle est affectée sur la particule où dans l'espace vide là où règne le champ électrique. La gravitation créée ainsi par l'équation du champ est elle la même ? D'autre part, si la particule se met à bouger, il doit en être de même instantanément pour son champ électrostatique correspondant à sa masse ! Cette propagation instantanée à distance a-t-elle un lien avec cette non localité que l'on voit apparaître si souvent en physique ? Comme pour l'effet MÖSSBAUER qui est rendu possible grâce au principe d'incertitude.

Revenons maintenant à notre problème de localisation de l'énergie. En Relativité générale, nous ne pouvons pas évacuer l'énergie très grande localisée sur la particule, car elle correspond à la très forte non linéarité de l'équation du champ sur la particule qui est la clé de la bonne description des phénomènes. La Relativité générale permet en effet de retrouver dans son cadre la notion

de particule en tant que singularité du champ, ce que ne permet pas du tout l'électromagnétisme ! La Relativité générale permet donc d'une certaine manière d'aller sonder à l'intérieur des particules où elle reste valable.

On peut dire d'ailleurs qu'on voit là une possibilité de solution au problème de la renormalisation de la masse en électromagnétisme, car cette très grande énergie gravitationnelle localisée sur la particule doit être négative comme nous l'avons vu au § 6.

En conclusion : en électrostatique, l'énergie est localisée dans le vide, en gravitation, à l'intérieur des particules. Il nous faut accepter cela, car la localisation de l'énergie d'une charge hors de cette charge en électrostatique, pose, comme nous l'avons vu ci-dessus certains problèmes.

De toute façon, il est clair qu'en Relativité générale, on ne peut pas traiter l'énergie comme en électrostatique. En électrostatique, si nous avons deux charges q_1 et q_2 , le champ est :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$$

Il en résulte que l'énergie d'interaction fait intervenir $\mathbf{E}_1 \bullet \mathbf{E}_2$. En gravitation, l'énergie d'interaction des deux masses est liée au fait que les deux masses rapprochées attirent moins que la somme de l'attraction de chaque masse prise isolément. On a donc :

$$\mathbf{g} \neq \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2$$

Il n'y a plus de sens à faire intervenir un terme d'interférence $\mathbf{g}_1 \bullet \mathbf{g}_2$.

12. Nouvelle expression pour le tenseur d'EINSTEIN au premier ordre. - Nous introduisons le tenseur d'ordre trois Q :

$$Q^{\lambda\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h^{\mu}_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} \eta^{\lambda\beta} - \frac{\partial h^{\mu}_{\mu}}{\partial x_{\lambda}} \eta^{\alpha\beta} - \frac{\partial h^{\mu\alpha}}{\partial x^{\mu}} \eta^{\lambda\beta} + \frac{\partial h^{\mu\lambda}}{\partial x^{\mu}} \eta^{\alpha\beta} + \frac{\partial h^{\alpha\beta}}{\partial x_{\lambda}} - \frac{\partial h^{\lambda\beta}}{\partial x_{\alpha}} \right)$$

$$Q_{,\lambda}^{\lambda\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(h_{\mu,\lambda}^{\mu,\alpha} \eta^{\lambda\beta} - h_{\mu,\lambda}^{\mu,\lambda} \eta^{\alpha\beta} - h_{,\mu\lambda}^{\mu\alpha} \eta^{\lambda\beta} + h_{,\mu\lambda}^{\mu\lambda} \eta^{\alpha\beta} + h_{,\lambda}^{\alpha\beta,\lambda} - h_{,\lambda}^{\lambda\beta,\alpha} \right)$$

$$Q_{,\lambda}^{\lambda\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\underset{(1)}{h_{\mu}^{\mu,\alpha\beta}} - \underset{(2)}{h_{\mu,\lambda}^{\mu,\lambda} \eta^{\alpha\beta}} - \underset{(3)}{h_{,\mu}^{\mu\alpha,\beta}} + \underset{(4)}{h_{,\mu\lambda}^{\mu\lambda} \eta^{\alpha\beta}} + \underset{(5)}{h_{,\lambda}^{\alpha\beta,\lambda}} - \underset{(6)}{h_{,\lambda}^{\lambda\beta,\alpha}} \right) \quad (15, 16)$$

D'autre part, l'équation (14,5) s'écrit :

$$G_{ab} = \frac{1}{2} \left(\bar{h}_{ab,\gamma}^{\gamma} + \eta_{ab} \bar{h}_{\gamma\delta}^{\gamma\delta} - \bar{h}_{a\gamma,b}^{\gamma} - \bar{h}_{\gamma b,a}^{\gamma} \right)$$

$$G^{(1)\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\underset{(5)}{h_{,\gamma}^{\alpha\beta,\gamma}} - \underset{\frac{1}{2}(2)}{\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta} h_{,\gamma}^{\gamma}} + \underset{(4)}{\eta^{\alpha\beta} h_{,\gamma\delta}^{\gamma\delta}} - \underset{\frac{1}{2}(2)}{\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta} \eta^{\gamma\delta} h_{,\gamma\delta}} - \underset{(3)}{h_{,\gamma}^{\alpha\gamma,\beta}} + \underset{\frac{1}{2}(1)}{\frac{1}{2}\eta^{\alpha\gamma} h_{,\gamma}^{\beta}} - h_{,\gamma}^{\gamma\beta,\alpha} + \underset{(6)}{\frac{1}{2}\eta^{\gamma\beta} h_{,\gamma}^{\alpha}} \right) \underset{\frac{1}{2}(1)}{\quad}$$

On voit donc que :

$$G^{(1)\alpha\beta} = R^{(1)\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta} R^{(1)} = \frac{\partial}{\partial x^\lambda} Q^{\lambda\alpha\beta} \quad (15, 17)$$

On voit sur l'expression de $Q^{\lambda\alpha\beta}$ que ce tenseur est antisymétrique par rapport aux deux premiers indices. Il en résulte les identités de BIANCHI linéarisées que nous avons déjà vues :

$$\frac{\partial G^{(1)\alpha\beta}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial Q^{\lambda\alpha\beta}}{\partial x^\alpha \partial x^\lambda} = -\frac{\partial Q^{\alpha\lambda\beta}}{\partial x^\lambda \partial x^\alpha} = -\frac{\partial Q^{\lambda\alpha\beta}}{\partial x^\alpha \partial x^\lambda} = 0$$

Nous avons utilisé l'antisymétrie de $Q^{\lambda\alpha\beta}$, le fait que l'on peut intervertir l'ordre des dérivées, et le fait que α et λ sont des indices muets dont on peut permuter les appellations.

On retrouve alors le fait que :

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(R^{(1)\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta} R^{(1)} \right) = 0$$

13. Le quadrivecteur impulsion-énergie, comme une intégrale sur une surface englobant le système. - Il résulte de la propriété précédente, que nous pouvons trouver une formule donnant le quadrivecteur impulsion-énergie avec une intégrale sur la surface d'un domaine quelconque englobant le système étudié. Cette surface peut être prise suffisamment éloignée du système pour que le tenseur $h^{\alpha\beta}$ soit faible. Elle sera donc pratique pour calculer numériquement ce quadrivecteur. Nous avons :

$$R^{(1)\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta} R^{(1)} = -\frac{8\pi G}{C^4} \tau^{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial x^\lambda} Q^{\lambda\alpha\beta} \quad (15, 18)$$

$$P^\alpha = \frac{1}{C} \int_V \tau^{\alpha 0} d^3x = -\frac{C^3}{8\pi G} \int_V \frac{\partial}{\partial x^\lambda} Q^{\lambda\alpha 0} d^3x$$

$$P^\alpha = -\frac{C^3}{8\pi G} \sum_{i=1,3} \int_S Q^{i\alpha 0} dS^i \quad (15, 19)$$

$\lambda = 0$ donne un terme nul ; en effet sur (15,16), on voit que $Q_{,\lambda}^{\lambda\alpha 0} = Q_{,\lambda}^{\lambda 0\alpha}$. Il vient : $Q_{,0}^{0\alpha 0} = Q_{,0}^{00\alpha}$ à cause de l'antisymétrie de Q par rapport à ses deux premiers indices.

Nous avons ensuite transformé l'intégrale de volume en intégrale de surface par le théorème de STOKES dans l'espace à trois dimensions.

Appliquons cette formule au calcul de l'énergie P^0 :

$$Q^{i00} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial h}{\partial x_i} \eta^{00} + \frac{\partial h^{\mu i}}{\partial x^\mu} \eta^{00} + \frac{\partial h^{00}}{\partial x_i} \right) \quad (15, 20)$$

En effet, en supposant la source du champ stationnaire : $\frac{\partial h^{0i}}{\partial x^0} = 0$, et :

$$Q^{i00} = \frac{1}{2} \sum_{j=1,3} \left(-\frac{\partial h^{jj}}{\partial x^i} + \frac{\partial h^{ij}}{\partial x^j} \right) \quad (15, 21)$$

$$P^0 = \frac{C^3}{16\pi G} \sum_{\substack{i=1,3 \\ j=1,3}} \int \left(+\frac{\partial h^{jj}}{\partial x^i} - \frac{\partial h^{ij}}{\partial x^j} \right) dS^i \quad (15, 22)$$

Nous allons utiliser cette formule dans le paragraphe suivant en calculant l'énergie d'un astre suffisamment petit pour que l'approximation linéaire soit valable partout.

14. Calcul effectif d'une énergie. - Rappelons les valeurs des termes du tenseur $h^{\alpha\beta}$ en fonction du potentiel newtonien ϕ .

$$h^{ii} = h_{ii} = h^{00} = h_{00} = \frac{2\phi}{C^2}$$

D'autre part, nous prendrons comme surface d'intégration, la surface d'une sphère de rayon r .

Pour évaluer l'élément à intégrer en un point M de la surface, choisissons localement l'axe des x parallèle et de même sens que le rayon OM . On a alors $x = r$ et, Ω étant l'angle solide $dS = r^2 d\Omega$.

$$\sum_{\substack{i \\ j}} \left(+\frac{\partial h^{jj}}{\partial x^i} - \frac{\partial h^{ij}}{\partial x^j} \right) dS^i = \sum_j \left(+\frac{\partial h^{jj}}{\partial x} - \frac{\partial h^{xj}}{\partial x^j} \right) dS \quad (15, 23)$$

On a également localement :

$$\sum_j \frac{\partial h^{jj}}{\partial x} = \frac{6}{C^2} \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

$$\sum_j \frac{\partial h^{xj}}{\partial x^j} = \frac{\partial h^{xx}}{\partial x} = \frac{2}{C^2} \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

$$P^0 = \frac{C^3}{16\pi G} \int_S \frac{4}{C^2} \frac{\partial \phi}{\partial r} r^2 d\Omega$$

$$P^0 = \frac{C}{G} \frac{\partial \phi}{\partial r} r^2 = \frac{C}{G} \frac{GM}{r^2} r^2$$

$$P^0 = MC \quad (15, 24)$$

Lorsque nous avons remplacé $\frac{\partial \phi}{\partial r}$ par sa valeur faisant intervenir M , M est bien à l'origine du champ gravitationnel. Ceci par l'équation du champ (14,13) donnant la métrique (14,15). On a vu au § 15 du chapitre 12 que cette métrique donne bien la bonne loi de mouvement. M est donc bien la masse gravitationnelle active de NEWTON. On voit d'autre part sur la formule ci-dessus (15,24) et compte tenu de ce qui a été dit au § 8, que M est la masse inerte de la Relativité restreinte.

Nous montrons bien dans cet exemple **l'identité de ces deux masses**. Nous sommes dans un cas où la gravitation est faible partout, puisque nous avons utilisé l'approximation linéaire. Nous verrons au chapitre suivant dans le cas d'un astre sphérique créant un champ qui peut être aussi grand qu'on veut, que l'on a encore cette identité. Nous verrons au § 11 du chapitre 17 que dans la valeur de M intervient pour une part l'énergie gravitationnelle elle-même.

Nous avons déjà vu au paragraphe § 4 du chapitre 12 avec l'équation (12,5) qu'il y a égalité entre masse inerte et masse gravitationnelle passive. Il y a donc identité entre les trois masses : masse inerte, masse gravitationnelle active, et masse gravitationnelle passive.

Rappelons ici ce qui a été dit à la fin du § 9 : l'égalité entre la masse gravitationnelle passive et la masse gravitationnelle active correspond au principe de l'action et de la réaction pour les forces gravitationnelles. Une inégalité entre ces deux masses violerait ainsi la conservation du quadrivecteur impulsion-énergie. Ainsi, la Relativité générale obéit bien au principe de l'action et de la réaction.