

Chapitre Seize

LA SOLUTION DE SCHWARZSCHILD

1. Introduction. - L'équation du champ, à cause de sa non linéarité, est difficile à résoudre et l'on en connaît peu de solutions exactes. Cependant en imposant des conditions de symétries sur l'élément linéaire, dictées par des arguments physiques, on peut grandement la simplifier dans certains cas. Un tel cas correspond au champ gravitationnel créé par un astre à symétrie sphérique immobile et sans rotation par rapport aux galaxies lointaines. La solution exacte de l'équation du champ dans ce cas fut trouvée par SCHWARZSCHILD en 1916. Cette solution est particulièrement importante, car elle correspond au problème astronomique classique du champ créé par un seul corps et au potentiel en $-\frac{1}{r}$ qui permit à NEWTON de retrouver tous les résultats expérimentaux de KEPLER (dédits des observations de TYCHO BRAHÉ) sur les orbites des planètes.

Nous verrons ensuite, que trois des plus importantes vérifications de la Relativité générale : la déviation de la lumière, l'avance du périhélie de Mercure, et le retard des échos radars, reposent sur cette solution qui joue donc un rôle central. La déviation de la lumière et l'avance du périhélie de Mercure furent d'ailleurs pendant très longtemps les seules vérifications expérimentales de la Relativité générale.

2. Forme de l'élément linéaire imposée par les conditions de symétrie. - Le champ gravitationnel créé par l'astre est constant (cf § 14, chap 12). Nous savons que cela correspond à l'invariance de l'élément linéaire par le changement de u^0 en $-u^0$, donc à $g_{0i} = 0$. Il vient :

$$ds^2 = g_{00}(du^0)^2 + g_{ij} du^i du^j$$

Les g_{ij} sont indépendants de la coordonnée temporelle u^0 . Par raison de symétrie, deux géodésiques de l'espace à trois dimensions (que nous appelons des droites) issues de l'origine O centre de l'astre, font un angle qui, vu par un observateur local, est indépendant de la distance à l'origine. Cet angle correspond en effet à une fraction de tour qui ne dépend pas de la distance à l'origine. L'espace

est en effet isotrope autour de l'astre et tout le monde est d'accord sur ce que signifie un tour complet redonnant donc la même position, et correspondant à 2π radians. Nous utiliserons donc comme coordonnées, les angles des coordonnées polaires de l'espace : α la latitude et θ la longitude dont la signification ne pose pas de problème.

À cause de l'isotropie de l'espace, un changement de α en $-\alpha$ ou de θ en $-\theta$ ne change pas l'élément linéaire. Il n'y a donc pas de termes de la forme $dr d\alpha$, $dr d\theta$, et $d\theta d\alpha$. L'élément linéaire est donc nécessairement diagonal :

$$ds^2 = AC^2 dt^2 - (B dr^2 + C r^2 d\alpha^2 + D r^2 \cos^2 \alpha d\theta^2)$$

Attention, la constante C n'a ici rien à voir avec la vitesse de la lumière.

La signature de l'élément linéaire, le signe que nous lui donnons et la signification de la coordonnée t qui représente un temps, imposent que A , B , C , D , soient positifs.

Nous savons, cf § 14 du chapitre 12, que t est un temps d'univers. Une valeur de t fixée définit donc une simultanéité globale à laquelle correspond un espace physique à trois dimensions. Si nous pouvons avoir $A = 1$ à l'infini, t sera le temps mesuré par une horloge étalon située à l'infini.

À cause de la symétrie sphérique, les fonctions A , B , C , D , ne doivent dépendre que de r . Le symbole A' par exemple signifiera alors : dérivée de $A(r)$ par rapport à r . À cause de cette symétrie également, la distance $dl = r d\alpha$ depuis le pôle nord est égale à la distance $dl = r d\theta$ à l'équateur ($\alpha = 0$) pour $d\alpha = d\theta$; et :

$$ds^2 = -dl^2 = -Cr^2 d\alpha^2 = -Dr^2 d\theta^2$$

On en déduit que $C = D$.

$$ds^2 = AC^2 dt^2 - B dr^2 - C (r^2 d\alpha^2 + r^2 \cos^2 \alpha d\theta^2)$$

Il est possible d'obtenir une simplification supplémentaire par un choix judicieux de la coordonnée radiale r . Prenons :

$$\bar{r} = r \sqrt{C(r)} \tag{16, 1}$$

$$Cr^2 = \bar{r}^2$$

$$C' r^2 dr + 2Cr dr = 2\bar{r} d\bar{r}$$

$$\begin{aligned}
C r dr \left(1 + \frac{C'}{2C} r \right) &= \bar{r} d\bar{r} \\
C dr^2 \left(1 + \frac{C'}{2C} r \right)^2 &= d\bar{r}^2 \\
B dr^2 &= \frac{B}{C} \frac{d\bar{r}^2}{\left(1 + \frac{C'r}{2C} \right)^2} = \bar{B} d\bar{r}^2
\end{aligned}$$

Grâce à cette équation et à (16,1) \bar{B} peut être exprimé en fonction de \bar{r} .

L'équation (16,1) nous montre alors que $\bar{C} = 1$. Renommons alors les coordonnées barrées en coordonnées non barrées, nous arrivons avec ces nouvelles coordonnées à :

$$ds^2 = AC^2 dt^2 - B dr^2 - r^2 (d\alpha^2 + \cos^2 \alpha d\theta^2) \quad (16, 2)$$

La coordonnée r a une signification physique simple et directement accessible à l'expérience. En effet, sur une sphère centrée sur l'astre :

$$ds^2 = -dl^2 = -r^2 (d\alpha^2 + \cos^2 \alpha d\theta^2)$$

Pour un grand cercle sur cette sphère défini par $d\theta = 0$: $dl = r d\alpha$ et pour un tour, c'est à dire pour une circonférence du cercle, $l = 2\pi r$.

À une certaine distance de l'astre, on mesure donc la valeur de la coordonnée r en mesurant avec une règle étalon la longueur de la circonférence en faisant un tour complet en restant à la même distance de l'astre. La méthode est la même qu'en espace euclidien. Il faut voir par contre que contrairement au cas de l'espace euclidien, la coordonnée r ne donne pas la longueur effective sur un rayon depuis O le centre de l'astre jusqu'au point considéré. À cause de la contraction des longueurs au voisinage de l'astre (cf § 9, chap 7), la distance physique au centre que l'on mesure avec des règles étalons locales est certainement supérieure à r !

Les composantes non nulles du tenseur métrique sont :

$$g_{tt} = AC^2 ; g_{rr} = -B ; g_{\alpha\alpha} = -r^2 ; g_{\theta\theta} = -r^2 \cos^2 \alpha$$

Ce tenseur étant diagonal, on a tout de suite :

$$g^{tt} = \frac{1}{AC^2} ; g^{rr} = -\frac{1}{B} ; g^{\alpha\alpha} = -\frac{1}{r^2} ; g^{\theta\theta} = -\frac{1}{r^2 \cos^2 \alpha}$$

Notons bien ici que nous prenons comme coordonnée temporelle le temps t , comme le précise l'indice t , ce qui entraîne une homogénéité bien précise pour les composantes du tenseur métrique et les symboles de CHRISTOFFEL. Ainsi :

$$\eta^{tt} = \frac{1}{C^2} \quad \eta^{ii} = -1$$

3. Calcul des symboles de CHRISTOFFEL. - Les seuls symboles non nuls sont :

$$\begin{aligned} \Gamma_{rr}^r &= \frac{1}{2} g^{rr} (g_{rr,r}) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{B}\right) (-B') = \frac{B'}{2B} \\ \Gamma_{\alpha\alpha}^r &= \frac{1}{2} g^{rr} (-g_{\alpha\alpha,r}) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{B}\right) 2r = -\frac{r}{B} \\ \Gamma_{\theta\theta}^r &= \frac{1}{2} g^{rr} (-g_{\theta\theta,r}) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{B}\right) 2r \cos^2 \alpha = -\frac{r}{B} \cos^2 \alpha \\ \Gamma_{tt}^r &= \frac{1}{2} g^{rr} (-g_{tt,r}) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{B}\right) (-A' C^2) = \frac{A' C^2}{2B} \\ \Gamma_{r\alpha}^\alpha &= \frac{1}{2} g^{\alpha\alpha} (g_{\alpha\alpha,r}) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2}\right) (-2r) = \frac{1}{r} = \Gamma_{\alpha r}^\alpha \\ \Gamma_{\theta\theta}^\alpha &= \frac{1}{2} g^{\alpha\alpha} (-g_{\theta\theta,\alpha}) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2}\right) (-2r^2 \sin \alpha \cos \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha \\ \Gamma_{\theta r}^\theta &= \frac{1}{2} g^{\theta\theta} (g_{\theta\theta,r}) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2 \cos^2 \alpha}\right) (-2r \cos^2 \alpha) = \frac{1}{r} = \Gamma_{r\theta}^\theta \\ \Gamma_{\theta\alpha}^\theta &= \frac{1}{2} g^{\theta\theta} (g_{\theta\theta,\alpha}) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2 \cos^2 \alpha}\right) (2r^2 \sin \alpha \cos \alpha) = -\tan \alpha = \Gamma_{\alpha\theta}^\theta \\ \Gamma_{tr}^t &= \frac{1}{2} g^{tt} (g_{tt,r}) = \frac{1}{2} \frac{1}{A C^2} A' C^2 = \frac{A'}{2A} = \Gamma_{rt}^t \end{aligned}$$

Récapitulons :

$$\begin{aligned} \Gamma_{rr}^r &= \frac{B'}{2B} & \Gamma_{\alpha\alpha}^r &= -\frac{r}{B} & \Gamma_{\theta\theta}^r &= -\frac{r}{B} \cos^2 \alpha \\ \Gamma_{tt}^r &= \frac{A' C^2}{2B} & \Gamma_{r\alpha}^\alpha &= \frac{1}{r} & \Gamma_{\theta\theta}^\alpha &= \sin \alpha \cos \alpha \\ \Gamma_{\theta r}^\theta &= \frac{1}{r} & \Gamma_{\theta\alpha}^\theta &= -\tan \alpha & \Gamma_{tr}^t &= \frac{A'}{2A} \end{aligned} \quad (16,3)$$

4. Calcul des composantes du tenseur de RICCI. - Le tenseur de RICCI s'obtient avec les formules (11,29) et (11,14). En remplaçant j et l par α et β et h par μ , cela donne :

$$R_{\alpha\beta} = \frac{\partial \Gamma_{\alpha\lambda}^\lambda}{\partial u^\beta} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda}{\partial u^\lambda} + \Gamma_{\alpha\lambda}^\mu \Gamma_{\mu\beta}^\lambda - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda \quad (16,4)$$

Attention, l'indice courant α n'a rien à voir avec l'angle α des coordonnées polaires de l'espace. Dans la suite, la même notation α sera utilisée pour ces deux significations différentes. le contexte permet à chaque fois sans ambiguïté de savoir quelle signification est à donner à α . Lorsqu'il s'agira de α angle polaire, la répétition de l'indice n'implique bien sur aucune sommation, contrairement au cas de α indice courant.

Nous aurons besoin de l'expression :

$$\Gamma_{r\lambda}^\lambda = \Gamma_{rt}^t + \Gamma_{rr}^r + \Gamma_{r\alpha}^\alpha + \Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{A'}{2A} + \frac{B'}{2B} + \frac{2}{r}$$

Calculons R_{rr} ; par abus de langage, u^λ sera notée λ :

$$R_{rr} = \frac{\partial \Gamma_{r\lambda}^\lambda}{\partial r} - \frac{\partial \Gamma_{rr}^\lambda}{\partial \lambda} + \Gamma_{r\lambda}^\mu \Gamma_{\mu r}^\lambda - \Gamma_{rr}^\mu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda$$

$$(1) = \frac{A''}{2A} - \frac{A'^2}{2A^2} + \frac{B''}{2B} - \frac{B'^2}{2B^2} - \frac{2}{r^2}$$

$$(2) = -\frac{B''}{2B} + \frac{B'^2}{2B^2}$$

$$(3) = \begin{cases} \mu = r \Rightarrow \lambda = r \Rightarrow \left(\frac{B'}{2B}\right)^2 \\ \mu = \alpha \Rightarrow \lambda = \alpha \Rightarrow \left(\frac{1}{r}\right)^2 \\ \mu = \theta \Rightarrow \lambda = \theta \Rightarrow \left(\frac{1}{r}\right)^2 \\ \mu = t \Rightarrow \lambda = t \Rightarrow \left(\frac{A'}{2A}\right)^2 \end{cases}$$

$$(4) = -\frac{B'}{2B} \left(\frac{A'}{2A} + \frac{B'}{2B} + \frac{2}{r} \right)$$

$$R_{rr} = \frac{A''}{2A} - \frac{1}{4} \frac{A'}{A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{1}{r} \frac{B'}{B}$$

$$R_{tt} = \frac{\partial \Gamma_{t\lambda}^\lambda}{\partial t} - \frac{\partial \Gamma_{tt}^\lambda}{\partial \lambda} + \Gamma_{t\lambda}^\mu \Gamma_{\mu t}^\lambda - \Gamma_{tt}^\mu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda$$

$\begin{matrix} \parallel & & & \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix}$

$$(1) = -\frac{A''C^2}{2B} + \frac{A'B'C^2}{2B^2}$$

$$(2) = \Gamma_{tt}^r \Gamma_{rt}^t + \Gamma_{tr}^t \Gamma_{tt}^r = +2\frac{A'^2C^2}{4AB}$$

$$(3) = -\frac{A'C^2}{2B} \left(\frac{A'}{2A} + \frac{B'}{2B} + \frac{2}{r} \right)$$

$$R_{tt} = -\frac{A''C^2}{2B} + \frac{1}{4} \frac{A'C^2}{B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{1}{r} \frac{A'C^2}{B}$$

$$R_{\alpha\alpha} = \frac{\partial \Gamma_{\alpha\lambda}^\lambda}{\partial \alpha} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\alpha}^\lambda}{\partial \lambda} + \Gamma_{\alpha\lambda}^\mu \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda - \Gamma_{\alpha\alpha}^\mu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda$$

$$(1) + (2) = -\frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{B} - \frac{rB'}{B^2}$$

$$(3) = \Gamma_{\alpha\alpha}^r \Gamma_{r\alpha}^\alpha + \Gamma_{\alpha r}^\alpha \Gamma_{\alpha\alpha}^r + \Gamma_{\alpha\theta}^\theta \Gamma_{\theta\alpha}^\theta = -2\frac{r}{B} \frac{1}{r} + \tan^2\alpha$$

$$(4) = \frac{r}{B} \left(\frac{A'}{2A} + \frac{B'}{2B} + \frac{2}{r} \right)$$

$$R_{\alpha\alpha} = -1 + \frac{r}{2B} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) + \frac{1}{B}$$

$$R_{\theta\theta} = \frac{\partial \Gamma_{\theta\lambda}^\lambda}{\partial \theta} - \frac{\partial \Gamma_{\theta\theta}^\lambda}{\partial \lambda} + \Gamma_{\theta\lambda}^\mu \Gamma_{\mu\theta}^\lambda - \Gamma_{\theta\theta}^\mu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda$$

$$\begin{array}{cccc} \parallel & & & \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

$$(1) = \frac{1}{B} \cos^2\alpha - \frac{rB'}{B^2} \cos^2\alpha - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$$

$$(2) = \Gamma_{\theta\theta}^r \Gamma_{r\theta}^\theta + \Gamma_{\theta r}^\theta \Gamma_{\theta\theta}^r + \Gamma_{\theta\alpha}^\theta \Gamma_{\theta\theta}^\alpha + \Gamma_{\theta\theta}^\alpha \Gamma_{\theta\alpha}^\theta = -2\frac{r}{B} \cos^2\alpha \frac{1}{r} - 2 \tan\alpha \sin\alpha \cos\alpha$$

$$(3) = +\frac{r}{B} \cos^2\alpha \left(\frac{A'}{2A} + \frac{B'}{2B} + \frac{2}{r} \right) - \sin\alpha \cos\alpha (-\tan\alpha)$$

On trouve : $R_{\theta\theta} = \cos^2\alpha R_{\alpha\alpha}$. D'autre part : $R_{\alpha\beta} = 0$ pour $\alpha \neq \beta$.

Le fait que $R_{r\alpha}$, $R_{r\theta}$, $R_{t\alpha}$, $R_{t\theta}$, $R_{\alpha\theta}$, soient nuls et que $R_{\theta\theta} = \cos^2\alpha R_{\alpha\alpha}$ est la conséquence de l'invariance de la métrique pour une rotation quelconque autour de l'origine. Le fait que R_{rt} soit nul est la conséquence de l'invariance de la métrique par la transformation $t \rightarrow -t$.

5. Résolution de l'équation du champ. - Nous résolvons cette équation dans l'espace vide autour de l'astre, donc elle s'écrit :

$$R_{\alpha\beta} = 0$$

Nous voyons qu'il suffit d'annuler R_{rr} , $R_{\alpha\alpha}$, R_{tt} ; d'autre part :

$$\frac{R_{rr}}{B} + \frac{R_{tt}}{AC^2} = -\frac{1}{rB} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right)$$

Nous obtenons donc l'équation :

$$\frac{A'}{A} = -\frac{B'}{B} \quad \text{soit : } AB = Cte$$

Nous devons imposer à la métrique de devenir celle de MINKOWSKI à l'infini ; donc à l'infini $A = B = 1$ et :

$$A = \frac{1}{B}$$

Il nous reste à annuler R_{rr} et $R_{\alpha\alpha}$. Utilisons la relation précédente, il vient :

$$R_{\alpha\alpha} = -1 + rA' + A$$

$$R_{rr} = \frac{A''}{2A} + \frac{1}{r} \frac{A'}{A} = \frac{R'_{\alpha\alpha}}{2rA}$$

Nous voyons que sur les trois équations, deux seulement sont indépendantes. Il nous suffit donc d'annuler $R_{\alpha\alpha}$:

$$(rA)' = 1 \quad \Rightarrow \quad rA = r + Cte \quad \Rightarrow \quad A = 1 + \frac{Cte}{r}$$

Pour fixer la constante d'intégration, nous utilisons le fait qu'à grande distance la composante g_{tt} doit être voisine de $1 + \frac{2\phi}{C^2}$, ϕ étant le potentiel newtonien : $\phi = -\frac{GM}{r}$; M est la masse gravitationnelle active de l'astre. Il vient $Cte = -\frac{2GM}{C^2}$ et :

$$A = 1 - \frac{2GM}{rC^2} \quad ; \quad B = \frac{1}{1 - \frac{2GM}{rC^2}}$$

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rC^2}\right) C^2 dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{2GM}{rC^2}} dr^2 - r^2 d\alpha^2 - r^2 \cos^2\alpha d\theta^2 \quad (16, 5)$$

Tel est l'élément linéaire, solution exacte de l'équation du champ, trouvé par SCHWARZSCHILD. Nous avons calculé la solution de *Schwarzschild* ou *métrique de Schwarzschild*.

6. La masse gravitationnelle pour la solution de SCHWARZSCHILD est égale à la masse inerte. - Nous utilisons la formule (15,22) pour faire le calcul. Plaçons nous loin de l'astre, là où ϕ est faible, et utilisons les coordonnées suivantes que nous appellerons *quasi-galiléennes*. Elles redonnent les coordonnées galiléennes types quand les effets de la Relativité générale deviennent négligeables.

$$\begin{aligned} x &= r \cos \alpha \cos \theta & ; & & y &= r \cos \alpha \sin \theta & ; & & z &= r \sin \alpha \\ r^2 &= x^2 + y^2 + z^2 & ; & & r dr &= x dx + y dy + z dz \\ dx^2 + dy^2 + dz^2 &= dr^2 + r^2 d\alpha^2 + r^2 \cos^2\alpha d\theta^2 \end{aligned}$$

Pour évaluer l'élément à intégrer, nous pouvons utiliser le fait que l'élément linéaire garde la même forme pour une rotation des axes de coordonnées x^i . Au point M où on évalue l'élément, nous pouvons choisir l'axe des x parallèle au vecteur \mathbf{dS} , de telle sorte que : $x = r, y = z = 0$. L'élément devient :

$$\sum_{j=1,3} \left(\frac{\partial h^{jj}}{\partial x} - \frac{\partial h^{xj}}{\partial x^j} \right) r^2 d\Omega$$

$$ds^2 = AC^2 dt^2 - dl^2$$

Avec loin de l'astre :

$$\begin{aligned} -dl^2 &= - \left(1 - \frac{2\phi}{C^2} \right) dr^2 - r^2 d\alpha^2 - r^2 \cos^2\alpha d\theta^2 \\ -dl^2 &= -dr^2 + \frac{2\phi (x dx + y dy + z dz)^2}{C^2 r^2} + dr^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \end{aligned}$$

$$h^{ij} dx^i dx^j = \frac{2\phi}{C^2} \left(dx^2 + \frac{y^2}{x^2} dy^2 + \frac{z^2}{x^2} dz^2 + 2\frac{y}{x} dx dy + 2\frac{z}{x} dx dz + 2\frac{yz}{x^2} dy dz \right)$$

$$\sum_j \frac{\partial h^{jj}}{\partial x} (y = z = 0) = \frac{2}{C^2} \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

$$-\sum_j \frac{\partial h^{xj}}{\partial x^j} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{2\phi}{C^2} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{2\phi}{C^2} \right) \frac{y}{x} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{2\phi}{C^2} \right) \frac{z}{x} \right] = -\frac{2}{C^2} \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{4\phi}{C^2 r}$$

$$P^0 = \frac{C^3}{16\pi G} \int_S -\frac{4\phi}{C^2 r} r^2 d\Omega \quad ; \text{ avec } \phi = -\frac{GM}{r}$$

$$P^0 = MC \tag{16, 6}$$

Nous avons donc démontré l'égalité de la masse gravitationnelle active et de la masse inerte dans un cas où la gravitation peut être forte et où l'approximation linéaire ne s'applique pas. Dans un tel cas, le champ de gravitation lui-même contribue effectivement pour une part à la masse (voir également à ce sujet le § 11 du chapitre 17).

7. La singularité de SCHWARZSCHILD. - Pour $r_s = \frac{2MG}{C^2}$, le coefficient de dr^2 devient infini et celui de dt^2 devient nul. Le nombre r_s s'appelle le *rayon de Schwarzschild* et la surface $r = r_s$ la *surface de Schwarzschild*.

Il faut remarquer tout d'abord que pour tous les astres stables, comme nous le verrons plus loin, cela ne pose pas de problème. En effet, et même pour les astres les plus compactes, les étoiles à neutrons, le rayon de SCHWARZSCHILD est inférieur au rayon de l'étoile. Ainsi, pour le Soleil, ce rayon vaut environ 3 km. La discontinuité serait donc située à l'intérieur de l'étoile, là où justement la solution que nous avons trouvée, qui est une solution de l'équation du champ dans l'espace vide, ne s'applique plus. En fait, nous verrons en résolvant au chapitre suivant l'équation du champ à l'intérieur de l'astre, qu'il ne se présente pas de discontinuité. Le problème de la discontinuité de SCHWARZSCHILD ne peut donc se poser que pour des astres en train de s'effondrer en trou noir. Nous aboutirons nécessairement à de tels objets au § 10 du chapitre 17.

Le *théorème de Birkhoff* (voir § 29 du chapitre 18), que nous ne démontrons pas dans ce livre, affirme que toute distribution de matière à symétrie sphérique et sans rotation d'ensemble mène à l'extérieur à l'élément linéaire de SCHWARZSCHILD même si la matière créant le champ n'est pas immobile. Une étoile s'effondrant en gardant la symétrie sphérique mène donc à l'extérieur à l'élément linéaire de SCHWARZSCHILD qui est constant. Cela prouve qu'un tel effondrement ne crée pas d'ondes gravitationnelles. Envisageant un tel collapse dont nous verrons au § 16 de ce chapitre qu'il n'est jamais achevé vu de l'extérieur, il est donc raisonnable de penser que l'élément linéaire garde un sens physique au moins aussi près qu'on veut de la surface de SCHWARZSCHILD et d'étudier les conséquences de cette discontinuité.

La question que l'on doit se poser est de savoir s'il s'agit d'une vraie discontinuité physique, ou simplement d'un mauvais choix des coordonnées à cet endroit là de la variété différentiable. Ainsi, au pôle d'une sphère, la coordonnée θ (longitude) n'a pas de valeurs précises. Une manière de vérifier que la sphère ne présente pas de discontinuité au pôle, est d'étudier le tenseur de courbure et la courbure scalaire. Ces quantités restent effectivement continues aux pôles.

Il en est de même pour la surface de SCHWARZSCHILD sur laquelle le tenseur de courbure est continu. Nous sommes donc amenés à penser qu'il s'agit plus d'un mauvais choix des coordonnées plutôt que d'une vraie discontinuité physique. Ainsi, cela doit avoir un sens d'étudier cette surface et son intérieur.

La discontinuité du coefficient de dr^2 ne présente pas de difficulté. Imaginons le modèle d'une surface à trois dimensions ayant la forme indiquée sur la figure 16.1. En particulier, cette surface se termine par un cylindre.

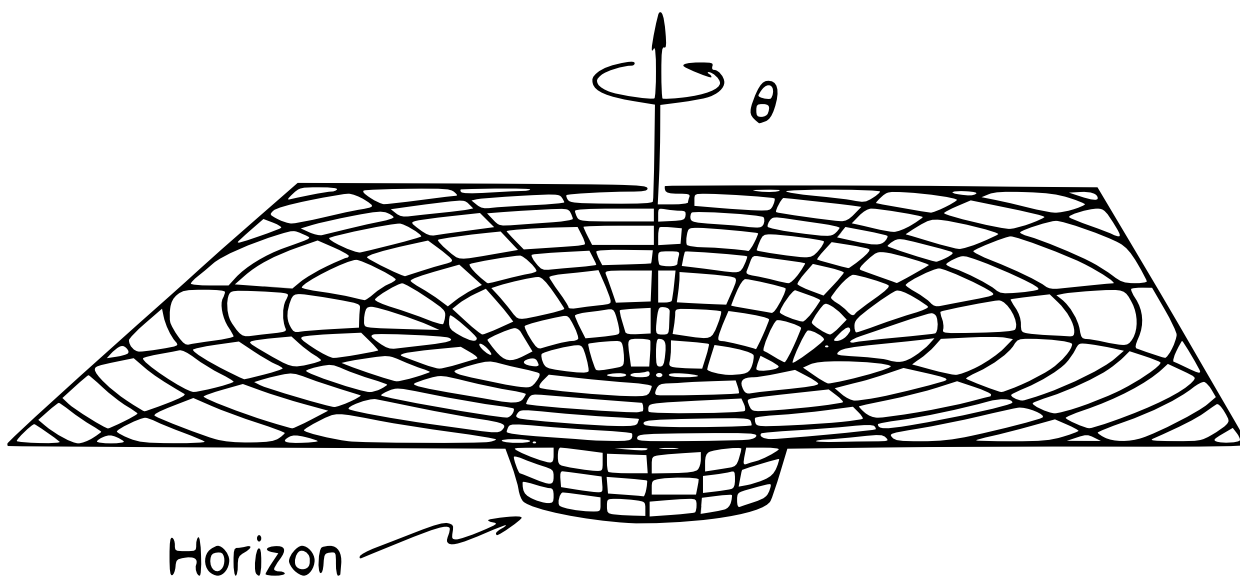


Fig. 16.1

On voit qu'une fois le cylindre atteint, un déplacement vers le bas ne correspond à aucune variation de la longueur de la circonférence qui correspond à la coordonnée r de la métrique de SCHWARZSCHILD. Les coordonnées spatiales sur la surface sont r et θ au dessus du cylindre. Sur le cylindre, on a un déplacement dl avec $dr = d\theta = 0$ et la coordonnée r n'est plus adaptée.

Le fait que le coefficient de dt^2 s'annule pose plus de difficulté du point de vue de l'interprétation physique. On voit que plus on se rapproche de la surface de SCHWARZSCHILD plus le temps propre, vu par un observateur local au moyen d'horloges étalons, est petit par rapport au temps t à l'infini. Il est clair que si

l'on pouvait voir de loin avec un télescope les choses évoluer près de la surface, on aurait l'impression de voir un film au ralenti. À la limite un objet extrêmement près de la surface est vu immobile, quelle que soit la durée d'observation, car toute l'évolution de l'Univers au dehors, pendant des milliards d'années peut correspondre à moins de une seconde en cet endroit. Quel sens physique peut on donner à l'existence d'objets pour lesquels l'évolution de tout l'Univers ne représente qu'une fraction de seconde ? Il est clair qu'on a une espèce de déconnection spatiale et temporelle de cette partie de l'Univers. Un tel résultat pose la question des limites de la Relativité générale.

Ce qu'on peut dire de sûr, c'est que tout rayon lumineux émis depuis le voisinage de cette surface est tellement décalé vers le rouge qu'il devient indétectable. Cette surface correspond à une région opaque au delà de laquelle on ne voit rien. C'est de là que vient la dénomination d'*horizon* pour cette surface. Tout ce qui est à l'intérieur de cette horizon constitue un objet totalement noir, d'où l'appellation due au physicien WHEELER de *trou noir*. Un tel objet n'est perçu de l'extérieur que par son action gravitationnelle (et éventuellement un effet électrique s'il n'est pas neutre).

Le fait qu'un trou noir n'a pas d'autre caractéristique que sa masse, son moment cinétique et sa charge est traduit de manière imagée en disant qu'il n'a pas de cheveux.

Il n'y a donc pas de différence entre un trou noir rempli de matière et un trou noir rempli d'antimatière. Il ne faut pas être étonné de cela. La séparation particule-antiparticule vient de l'équation de DIRAC, c'est à dire de l'union de la Relativité restreinte et de la Mécanique quantique. La symétrie de l'espace-temps de MINKOWSKI est donc à la base de la symétrie particule-antiparticule. Dans un espace-temps courbe où cette symétrie est brisée, la séparation particule-antiparticule l'est également. Dans la perspective d'une union de toutes les interactions, il ne faut pas s'étonner que dans les Théories modernes de physique des particules, la brisure de cette symétrie soit également envisagée. Elle serait à l'origine de l'excès de la matière sur l'antimatière juste après le Big-Bang. Cela explique que notre Univers présent ne contienne pratiquement que de la matière. Cette idée a été étudiée au début principalement par SAKHAROV.

Enfin en ce qui concerne la vérification expérimentale de l'existence des trous noirs, nous renvoyons au paragraphe § 8 du chapitre 7.

8. Équation des géodésiques. - p étant un paramètre décrivant la trajectoire, les symboles de CHRISTOFFEL avec l'équation des géodésiques donnent :

$$\frac{d^2 r}{dp^2} + \frac{B'}{2B} \left(\frac{dr}{dp} \right)^2 - \frac{r}{B} \left(\frac{d\alpha}{dp} \right)^2 - \frac{r}{B} \cos^2 \alpha \left(\frac{d\theta}{dp} \right)^2 + \frac{A' C^2}{2B} \left(\frac{dt}{dp} \right)^2 = 0 \quad (16,7)$$

$$\frac{d^2 \alpha}{dp^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{dp} \frac{d\alpha}{dp} + \sin \alpha \cos \alpha \left(\frac{d\theta}{dp} \right)^2 = 0 \quad (16,8)$$

$$\frac{d^2 \theta}{dp^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{dp} \frac{d\theta}{dp} - 2 \tan \alpha \frac{d\theta}{dp} \frac{d\alpha}{dp} = 0 \quad (16,9)$$

$$\frac{d^2 t}{dp^2} + \frac{A'}{A} \frac{dt}{dp} \frac{dr}{dp} = 0 \quad (16,10)$$

9. Résolution des équations. - Voir à ce sujet également l'exercice 12.1.

Nous résolvons ce système d'équations en recherchant des constantes du mouvement. Puisque le champ est isotrope, nous pouvons considérer uniquement les trajectoires dans le plan $\alpha = 0$ (la symétrie de la situation implique que les trajectoires sont planes). L'équation en α est alors automatiquement satisfaite.

Divisons (16,9) par $\frac{d\theta}{dp}$ et (16,10) par $\frac{dt}{dp}$, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{d}{dp} (\ln \theta' + \ln r^2) = 0 \\ \frac{d}{dp} (\ln t' + \ln A) = 0 \end{cases}$$

Attention, le ' sur A signifie : dérivée par rapport à r , tandis que le ' sur θ et t signifie : dérivée par rapport à p .

Cela nous donne deux constantes du mouvement :

$$r^2 \frac{d\theta}{dp} = J \quad (16,11) \quad ; \quad \frac{dt}{dp} A = Cte \quad (16,12)$$

J joue le rôle d'un moment cinétique. Nous pouvons choisir de normaliser le paramètre p de façon à avoir :

$$\frac{dt}{dp} = \frac{1}{AC} \quad (16,13)$$

A étant voisin de l'unité, p est voisin du temps d'univers $x^0 = Ct$. Compte tenu de tout cela, l'équation en r , (16,7) devient :

$$\frac{d^2 r}{dp^2} + \frac{B'}{2B} \left(\frac{dr}{dp} \right)^2 - \frac{1}{B} \frac{J^2}{r^3} + \frac{A'}{2BA^2} = 0$$

Multiplions cette équation par $2B \frac{dr}{dp}$, il vient :

$$\frac{d}{dp} \left\{ B \left(\frac{dr}{dp} \right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{A} \right\} = 0$$

La dernière constante du mouvement est donc :

$$B \left(\frac{dr}{dp} \right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{A} = -E \quad (16, 14)$$

E étant une constante du mouvement qui tient le rôle joué par l'énergie dans le problème équivalent traité en Mécanique newtonienne.

$$C^2 d\tau^2 = AC^2 dt^2 - Bdr^2 - r^2 d\theta^2 = dp^2 \left(\frac{1}{A} - B \left(\frac{dr}{dp} \right)^2 - \frac{J^2}{r^2} \right) = E dp^2$$

$$d\tau^2 = \frac{E}{C^2} dp^2 \quad (16, 15)$$

Pour les photons et les particules de masses nulles, nous avons donc $E = 0$, et pour les particules matérielles $E > 0$.

Nous pouvons maintenant éliminer le paramètre p , puisque $dp = ACdt$:

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = JAC \quad (16, 16)$$

$$\frac{B}{A^2 C^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{A} = -E \quad (16, 17)$$

$$d\tau^2 = EA^2 dt^2 \quad (16, 18)$$

10. Approximation newtonienne. - Dans ce cas $A \simeq B \simeq 1$; posons $J_n = CJ$:

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = J_n$$

$$\frac{1}{A} \simeq 1 - \frac{2\phi}{C^2}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{J_n^2}{2r^2} + \phi = \frac{1-E}{2} C^2$$

Nous retrouvons les équations de la Mécanique newtonienne, le deuxième membre de l'équation ci-dessus représentant l'énergie totale newtonienne pour l'unité de masse.

11. Étude générale du mouvement : écriture des équations. - Nous allons utiliser l'équation concernant la variable r . Nous allons dans un premier temps lui donner une forme plus pratique. Commençons par remplacer t par $q = C\tau$ en utilisant (16,18) dans (16,17) :

$$BE \left(\frac{dr}{dq} \right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{A} = -E$$

$$\left(\frac{dr}{dq} \right)^2 = -\frac{J^2}{r^2 BE} - \frac{1}{B} + \frac{1}{E} \quad (16, 19)$$

$$\text{Posons : } \tilde{E} = \frac{1}{E} \quad ; \quad \tilde{J}^2 = \frac{J^2}{E} \quad (16, 20)$$

$$\left(\frac{dr}{dq} \right)^2 = \tilde{E} - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \left(1 + \frac{\tilde{J}^2}{r^2}\right) \quad (16, 21)$$

Envisageons maintenant le cas des photons. L'équation en r (16,17) donne :

$$\frac{B}{A^2 C^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{A} = 0$$

Avec (16,13) : $dp^2 = A^2 C^2 dt^2$, il vient :

$$\left(\frac{dr}{dp} \right)^2 = 1 - \frac{J^2}{r^2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)$$

Divisons cette équation par J^2 , puis posons $dq = Jdp$ (il est en effet loisible de choisir un paramétrage de la trajectoire adapté suivant les valeurs de J). Posons enfin $\tilde{E} = \frac{1}{J^2}$:

$$\left(\frac{dr}{dq} \right)^2 = \tilde{E} - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \frac{1}{r^2} \quad (16, 22)$$

Posons enfin :

$$\begin{cases} V(r) = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \left(1 + \frac{\tilde{J}^2}{r^2}\right) & (16, 23) \\ W(r) = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \frac{1}{r^2} & (16, 24) \end{cases}$$

12. Étude du potentiel efficace $V(r)$ pour une particule matérielle. - Nous allons étudier successivement la forme des courbes $V(r)$ et $W(r)$.

Etude de $V(r)$.

Soit $x = \frac{1}{r}$; $l = \tilde{J}^2$:

$$V(x) = (1 - r_s x)(1 + lx^2)$$

$$V' = -r_s(1 + lx^2) + 2lx(1 - r_s x)$$

$$V' = -3r_s lx^2 + 2lx - r_s$$

Supposons dans un premier temps que $\Delta'^2 = l^2 - 3r_s^2 l > 0$. Cela correspond à :

$$\tilde{J}^2 > 12 \frac{G^2 M^2}{C^4}$$

V' a alors deux racines positives car leur somme et leur produit sont positifs.

$$V'' = 2l(1 - 3r_s x) > 0 \text{ pour } x < \frac{1}{3r_s} \text{ ; soit : } r > 3r_s$$

Nous pouvons dresser le tableau de variation suivant, figure 16.2 :

r	$+\infty$	$3r_s$	0
x	0		$+\infty$
y''	$+$	0	$-$
y'	$\nearrow 0$		$\searrow 0$
y	$\searrow 1$		$-\infty$

Fig. 16.2

Dans la mesure où l'on retrouve la gravitation newtonienne comme cas limite, on peut penser qu'il existe des cas où le maximum relatif de la fonction $V(r)$, obtenu pour $r = r_{ci}$, est plus élevé que la limite de $V(r)$ quand r tend vers $+\infty$: $V(r_{ci}) > 1$. En effet, en gravitation newtonienne, $V(r) \rightarrow +\infty$ quand $r \rightarrow 0$. Nous appelons r_{cs} la valeur de r pour le minimum relatif de $V(r)$. Nous arrivons donc à la courbe suivante pour la fonction $V(r)$ (fig. 16.3) :

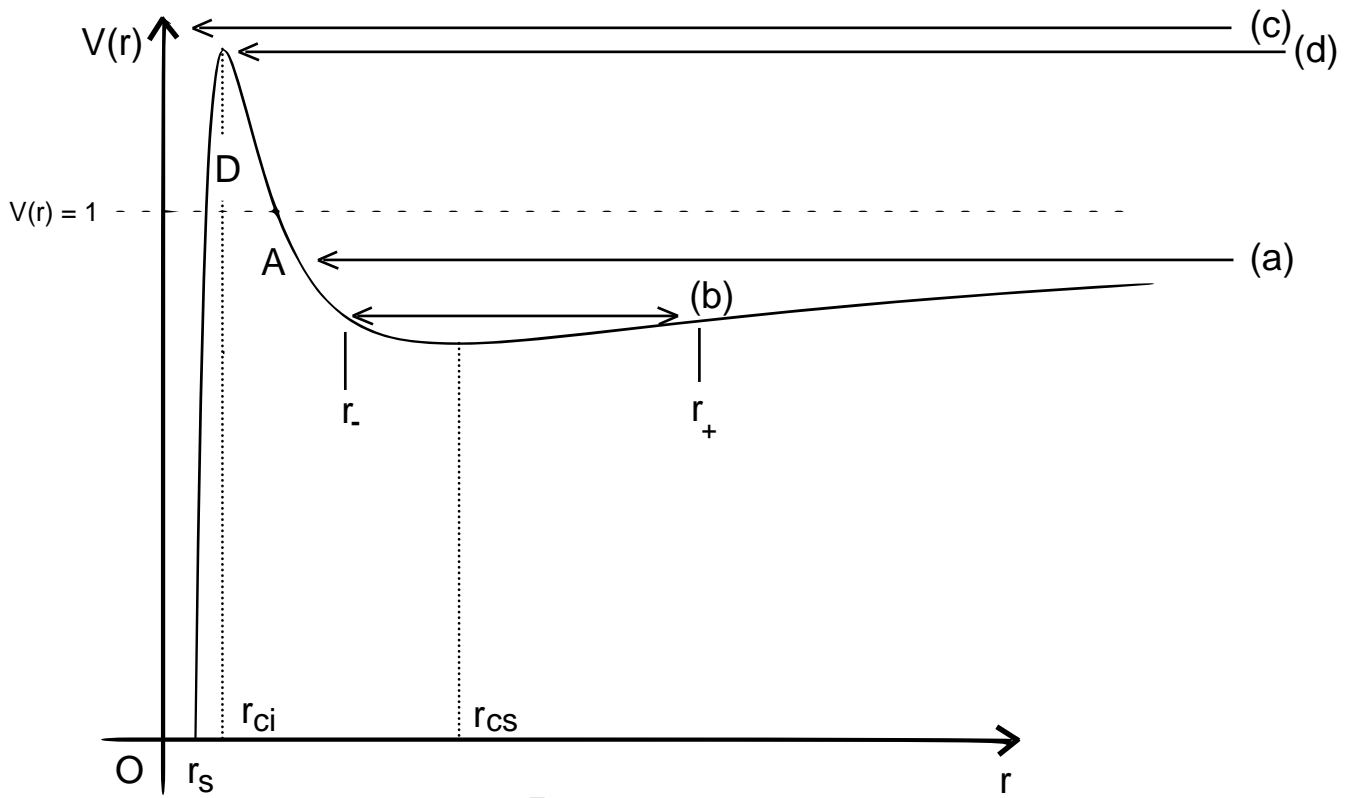


Fig. 16.3

13. Discussion générale du mouvement. - L'équation en r est de la forme générale :

$$\left(\frac{dr}{dq}\right)^2 + V(r) = \tilde{E}$$

Cette relation étant constamment vérifiée, la relation dérivée l'est également :

$$2\left(\frac{dr}{dq}\right)\left(\frac{d^2r}{dq^2}\right) + V'(r)\frac{dr}{dq} = 0$$

Soit :

$$\frac{d^2r}{dq^2} = -\frac{V'(r)}{2}$$

La relation ci-dessus étant vraie sur toute une plage où $\frac{dr}{dq} \neq 0$ l'est également, par continuité, aux points où $\frac{dr}{dq}$ est nul.

Nous pouvons représenter l'évolution d'une particule par une droite horizontale de hauteur \tilde{E} au dessus de l'axe des abscisses et munie d'une flèche indiquant le sens de variation de r . La particule s'arrête lorsque $\frac{dr}{dq} = 0$ donc lorsque $V(r) = \tilde{E}$, c'est à dire aux points d'intersections de la courbe $y = V(r)$ et de la droite précédente.

En ces points, la direction vers laquelle la particule repart sur la droite est donnée par la pente de la courbe en ce point. $V'(r) > 0$ donne $r'' < 0$ et la particule redémarre vers la gauche. Elle redémarre vers la droite pour $V'(r) < 0$.

Enfin elle reste immobile pour $V'(r) = 0$. Si il s'agit d'un sommet de la courbe, il est clair que l'équilibre est instable, car une petite diminution de r par exemple, donne $V'(r) > 0$ donc $r' < 0$ et le mouvement s'amplifie (idem pour une petite augmentation en changeant les signes). Le raisonnement est analogue pour montrer qu'à un minimum relatif de la fonction $V(r)$ correspond un équilibre stable.

Ceci dit, dans le cas (a), on voit que la particule vient de l'infini, s'arrête en A puis retourne à l'infini. On a une trajectoire tout à fait analogue au cas de l'hyperbole du mouvement newtonien. De même dans le cas (b), r oscille en permanence de r_- à r_+ . C'est le cas analogue de l'ellipse du mouvement newtonien donnant des orbites stables, bien que non fermées comme nous le verrons (précession du périhélie). Le cas $r = Cte = r_{cs}$ correspond à une trajectoire circulaire stable (cs rappel circulaire et stable).

Un cas nouveau se présente pour la trajectoire (c). r décroît sans arrêt jusqu'à atteindre l'horizon dans laquelle la particule s'engloutit.

Le cas limite est le cas (d). La particule spirale pour se stabiliser à $r = r_{ci}$ (cercle instable) mais il suffit d'un rien, et la spirale infernale reprend, la particule étant engloutie par le trou noir. Notons que l'augmentation de \tilde{E} à \tilde{J} constant correspond à une diminution de E et donc à une diminution de J qui correspond à un moment cinétique d'après (16,16).

Dans le cas où la dérivée $V'(r)$ n'a pas de racines, elle est constamment négative. $V(r)$ est une fonction constamment croissante de r et aucune orbite stable n'existe. On passe de ce cas au cas cité précédemment en faisant varier les conditions initiales de lancement de la particule. Toutes les particules sont englouties (fig. 16.4).

Ce cas correspond à $\tilde{J}^2 < \frac{12G^2M^2}{C^4}$ et une valeur plus petite de \tilde{J} correspond d'après (16,20) à une plus petite valeur de J qui correspond au moment cinétique, donc également par exemple à un paramètre d'impact plus petit.

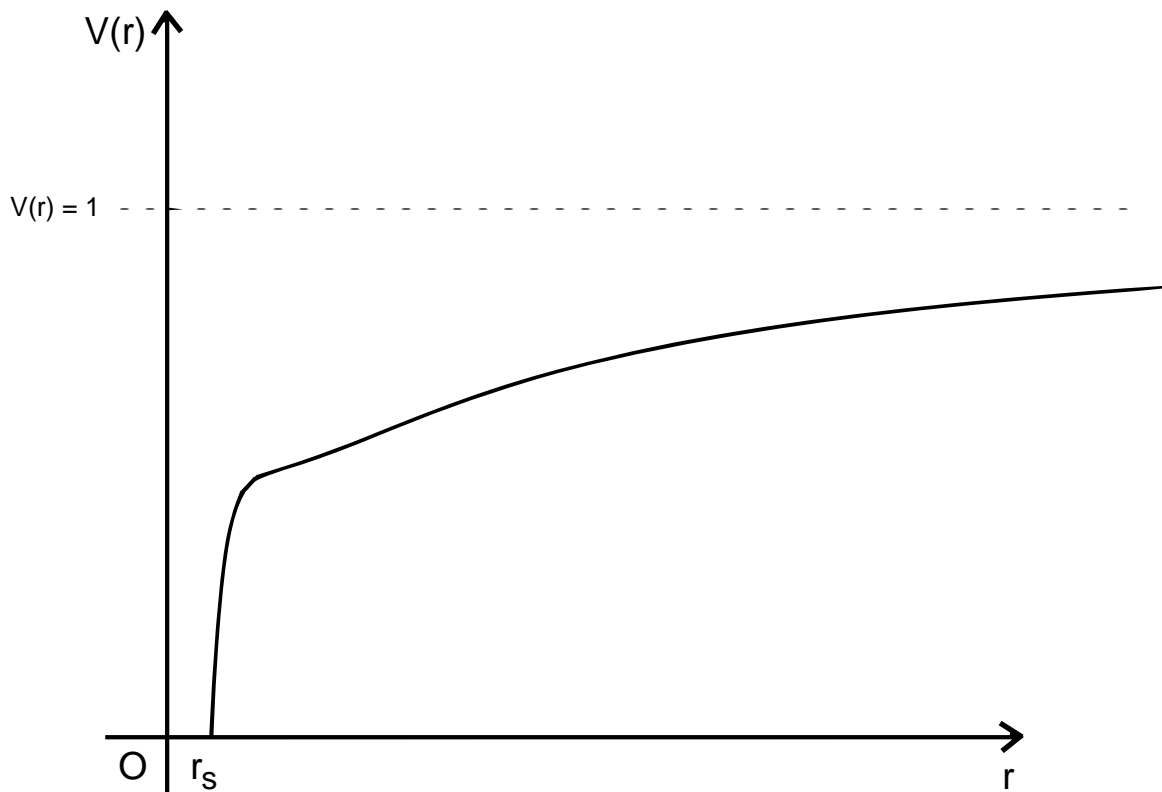


Fig. 16.4

Le cas limite est celui où y' a une racine double. y'' s'annule donc également, et nous avons un point d'inflexion à tangente horizontale, donc la possibilité d'avoir une orbite circulaire. C'est d'ailleurs la seule solution qui évite l'engloutissement (fig. 16.5).

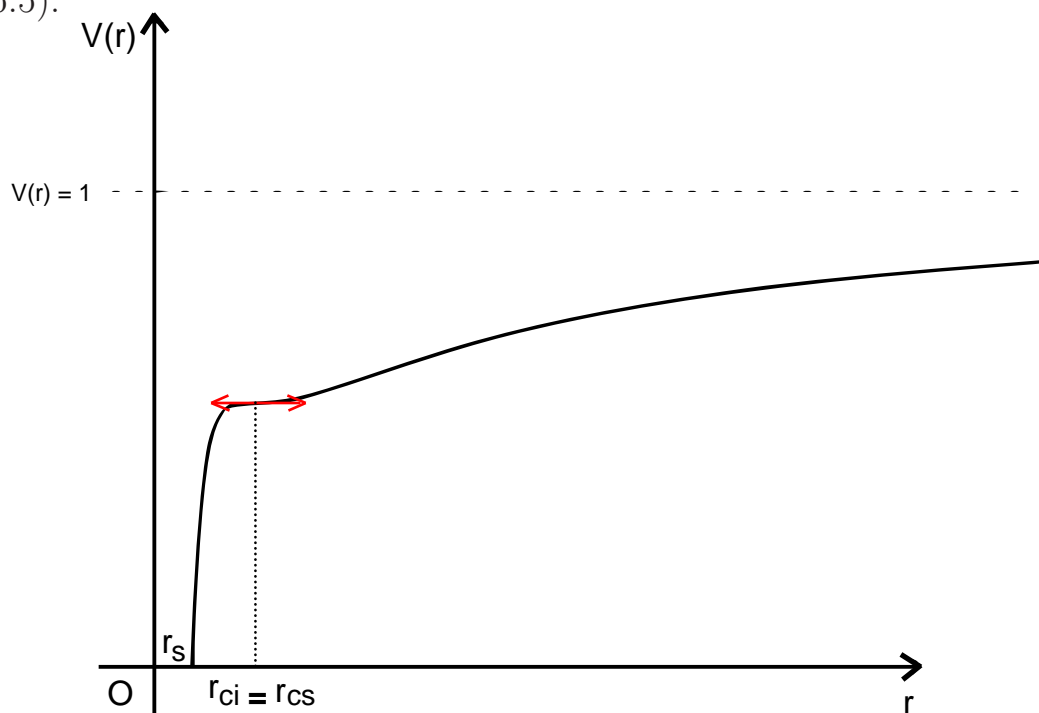


Fig. 16.5

Lorsqu'on est voisin de ce cas, mais qu'on a tout de même deux zéros, on peut voir la forme de la courbe par continuité par rapport à la courbe précédente. Lorsqu'on est proche de la courbe précédente, le maximum relatif est certainement inférieur à la limite de $V(r)$ quand r tend vers $+\infty$. Les seules orbites qui évitent l'engloutissement sont celles pour lesquelles r oscille entre r_- et r_+

(figure 16.6).

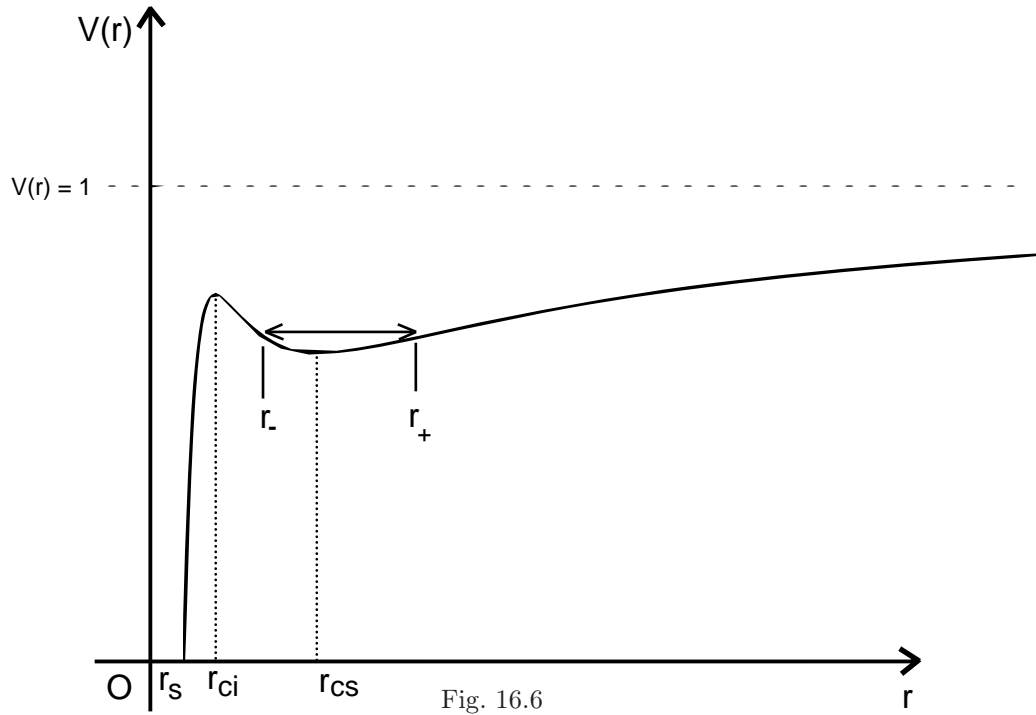


Fig. 16.6

La demi-somme des deux racine de y' vaut :

$$\frac{\frac{1}{r_{ci}} + \frac{1}{r_{cs}}}{2} = \frac{1}{3r_s} = Cte$$

Donc, r_{cs} et r_{ci} sont toujours de part et d'autre de $3r_s$. r_{ci} et r_{cs} se rejoignent et on a la dernière orbite circulaire stable possible, celle qui est le plus près possible du trou noir pour :

$$r = r_{ci} = r_{cs} = 3r_s = 6\frac{GM}{C^2} \quad (16, 25)$$

14. Cas des photons. - Nous avons :

$$W(x) = x^2(1 - r_s x)$$

$$y' = 2x(1 - r_s x) - x^2 r_s = -3x^2 r_s + 2x$$

D'où le diagramme et la courbe, figure 16.7 et 16.8.

r	$\rightarrow \infty$	$\frac{3r_s}{2}$	r_s	0
x	0	$\frac{2}{3r_s}$	$\frac{1}{r_s}$	$\rightarrow \infty$
y'	$+$	0	$-$	
y	0		0	$-\infty$

Fig. 16.7

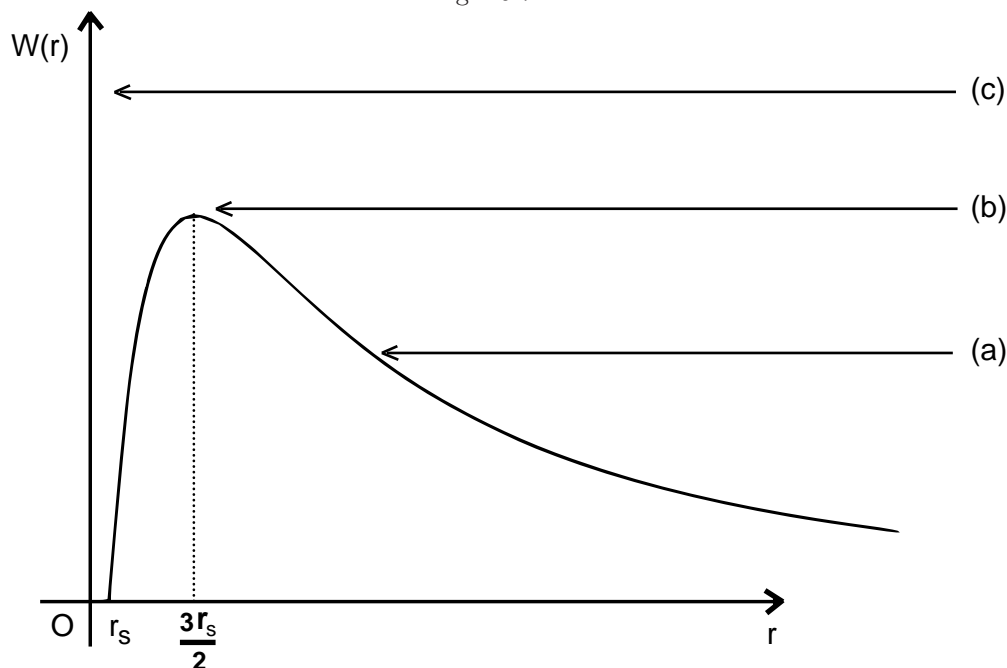


Fig. 16.8

On voit qu'il n'existe que trois cas :

(a) qui correspond à la déviation de la lumière venant de l'infini et y retournant.

(b) : la lumière se rapproche du trou noir en spiralant pour finir par décrire un cercle ; mais cette trajectoire est instable, et la spirale peut reprendre menant à l'engloutissement. Enfin, le cas :

(c), on a engloutissement à la suite d'une spirale plus ou moins enroulée sur elle même. Le rayon de l'orbite circulaire instable correspond à l'annulation de la dérivée qui est obtenue pour :

$$r = \frac{3}{2}r_s = \frac{3GM}{C^2} \quad (16, 26)$$

La montée (a) \rightarrow (b) \rightarrow (c) correspond à l'augmentation de \tilde{E} , donc à la

diminution de ce qui joue le rôle de moment cinétique J . Ce sont les photons de “moment cinétique” trop faible qui sont engloutis, comme il fallait s’y attendre. J , bien sûr, est différent du moment cinétique classique, puisque des photons suivant la même trajectoire et de fréquence variable, donc d’impulsion variable ont ici le même J . On voit ainsi que la trajectoire ne dépend pas de la fréquence de la lumière puisque J n’en dépend pas.

En conclusion, on voit qu’un trou noir peut engloutir de la matière qui s’enfonce en spiralant. Ce qui a été dit sur les trous noirs à la fin du paragraphe 8 du chapitre 7 est ainsi justifié.

15. Etude de l’orbite circulaire de la lumière. - Nous allons montrer en faisant intervenir la nature ondulatoire de la lumière comme cela a été fait au § 21 du chapitre 12 que l’on retrouve directement le rayon de l’orbite circulaire.

Nous considérons une onde plane qui tourne autour de l’astre dans le plan équatorial ($\alpha = 0$). Deux plans d’ondes voisins se rejoignent au centre et sont caractérisés par l’angle qui les sépare (fig. 16.9) :

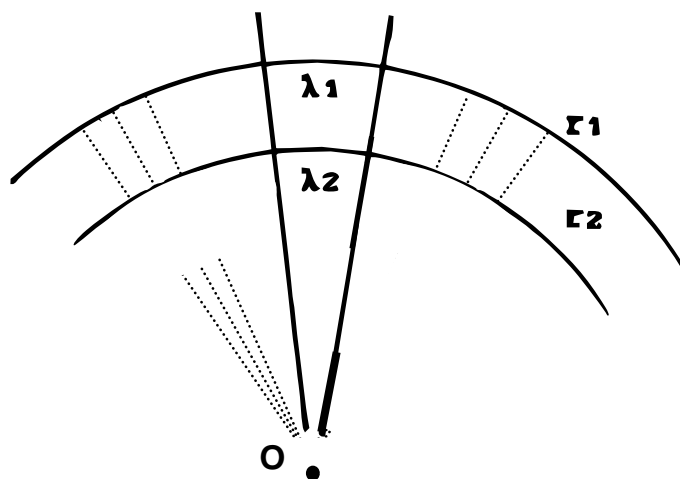


Fig. 16.9

Un tour complet à la distance définie par la valeur r_1 a pour circonférence $2\pi r_1$ et contient N longueurs d’ondes. Un tour complet à la distance voisine définie par r_2 a pour circonférence $2\pi r_2$ et contient également N longueurs d’ondes. En $r = r_1$, la longueur d’onde est λ_1 , idem pour r_2 , λ_2 . On a donc :

$$r_1 = k\lambda_1 \quad ; \quad r_2 = k\lambda_2$$

D’autre part, le long d’un rayon équatorial, sur un plan d’onde, la vibration doit être partout en phase. Il y a simultanément de la vibration qui est donc

caractérisée par sa période mesurée en temps d'univers t . À la distance définie par r_1 , localement, la période est égale à τ_1 , idem τ_2 pour r_2 . On a :

$$\tau_1 = \sqrt{1 - \frac{r_s}{r_1}} t \quad ; \quad \tau_2 = \sqrt{1 - \frac{r_s}{r_2}} t$$

La vitesse de la lumière est trouvée partout égale à C , donc : $C = \frac{\lambda_1}{\tau_1} = \frac{\lambda_2}{\tau_2}$.
On en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{r}{\sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}} &= Cte \\ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}} + r \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{\frac{r_s}{r^2}}{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{\frac{3}{2}}} &= 0 \\ 1 - \frac{r_s}{r} - \frac{1}{2} \frac{r_s}{r} &= 0 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{3}{2} r_s \end{aligned}$$

et on retrouve (16,26) :

$$r = 3 \frac{GM}{C^2}$$

16. Temps de chute d'une particule. - Nous prenons l'exemple simple d'une particule immobile à l'infini qui chute radialement vers le trou noir et nous nous proposons d'étudier le temps qu'il lui faut pour atteindre l'horizon.

L'équation (16,19) donne (rappelons que $q = C\tau$), puisque $J = 0$:

$$\left(\frac{dr}{dq} \right)^2 = -\frac{1}{B} + \frac{1}{E}$$

Le premier membre s'annule à l'infini où $B = 1$; donc $E = 1$ et :

$$\begin{aligned} \left(\frac{dr}{dq} \right)^2 &= \frac{r_s}{r} \\ d\tau &= -\frac{1}{C} \frac{1}{\sqrt{r_s}} \sqrt{r} dr \end{aligned} \quad (16, 27)$$

Le signe moins vient du fait que lorsque le temps croît, r décroît. Le temps de chute pour un observateur sur la particule (temps propre), depuis la valeur $r = R$ jusqu'à l'horizon est donc :

$$\Delta\tau = \frac{2}{3C\sqrt{r_s}} \left(R^{\frac{3}{2}} - r_s^{\frac{3}{2}} \right) \quad (16, 28)$$

Ainsi l'engloutissement par le trou noir a effectivement lieu en un temps fini pour la particule. On peut montrer que tel est le cas pour n'importe quelle trajectoire se terminant par un engloutissement.

Envisageons maintenant la situation vue en temps universel t , temps propre à l'infini. (16,18) avec $E = 1$ donne $d\tau = A dt$. Il vient :

$$dt = -\frac{1}{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)} \frac{1}{C} \frac{dr}{\sqrt{\frac{r_s}{r}}}$$

Posons $u = r - r_s$; Le temps est donné par :

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{r_s}} \frac{1}{C} \int_0^U \frac{du}{u} (u + r_s)^{\frac{3}{2}}$$

L'intégrale diverge en 0. Ainsi il faut un temps infini pour que la particule franchisse l'horizon. On peut montrer qu'il en est ainsi pour toute trajectoire menant à cette horizon. Cela ne doit pas nous surprendre, puisqu'on sait que la chute est vue de plus en plus au ralenti au fur et à mesure que la particule se rapproche de l'horizon.

On peut déduire de cela qu'un collapse gravitationnel n'est jamais achevé vu de l'extérieur. La situation se fige de plus en plus alors que certaines particules n'ont pas encore atteint l'horizon. Nous allons montrer cependant au paragraphe suivant qu'il se produit un décalage vers le rouge brutal entraînant l'extinction soudaine de la particule en chute libre qui disparaît ainsi totalement de la vue en un temps fini.

17. Extinction d'un objet lumineux lors de la chute dans un trou noir. - Reprenons l'exemple du paragraphe précédent d'une particule immobile à l'infini qui chute radialement vers le trou noir et supposons que cette particule soit lumineuse. Nous appelons z le décalage vers le rouge de cette lumière et posons :

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0}$$

λ_0 est la longueur d'onde d'une radiation émise par l'objet, λ est la longueur d'onde de cette radiation mesurée par l'observateur à l'infini qui voit cette lumière. On peut montrer (exercice 16.5) que pour $r \simeq r_s$:

$$z \simeq 2 \frac{r_s}{r - r_s} \quad (16, 29)$$

La valeur de r est prise à l'instant d'émission du signal : t en temps universel, tandis que le signal est reçu à l'infini (très loin) à l'instant t_∞ en temps universel.

D'autre part :

$$\frac{dr}{dt} = - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \sqrt{\frac{r_s}{r}} C \quad (16,30)$$

Envisageons deux cas distincts :

a) $r \gg r_s \Rightarrow z \simeq 0$

b) $r \simeq r_s$

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &\simeq - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) C = - \frac{r - r_s}{r} C \simeq - \frac{r - r_s}{r_s} C \\ \frac{dr}{r - r_s} &= - \frac{C dt}{r_s} \\ r - r_s &= C t e^{-\frac{Ct}{r_s}} \end{aligned} \quad (16,31)$$

On retrouve bien le fait qu'il faut un temps infini pour avoir $r = r_s$. Mais (16,29) donne :

$$z = C t e^{\frac{Ct}{r_s}}$$

Ainsi le décalage vers le rouge est voisin de zéro pendant très longtemps puis se met à croître exponentiellement très brutalement avec la constante de temps $T = \frac{r_s}{C}$. Prenons l'exemple d'un trou noir de masse $2.5M_\odot$ cf § 8 du chapitre 7)

$$T = \frac{2GM}{C^3} \quad ; \quad T = 2.46 \cdot 10^{-5} \text{ s}$$

L'extinction de l'objet est donc quasiment instantanée.

Il faut tout de même se souvenir que t n'est pas **le temps d'arrivée du signal au point où il est observé** ; t est **l'instant d'émission**. Cela modifie quelque peu la formule si l'on exprime z en fonction de t_∞ , le décalage $t_\infty - t$ croissant lors de la chute (voir exercice 16.7).

Sans faire une démonstration rigoureuse, nous comprenons bien comment une étoile s'effondrant en trou noir disparaît de la vue quasi instantanément. On peut imaginer une enveloppe de gaz s'effondrant, mais encore située à une distance supérieure à celle de l'horizon déjà formée. Chaque particule se comporte comme celle que nous avons étudiée ci-dessus et l'enveloppe dans son ensemble disparaît quasi instantanément de la vue bien que n'atteignant jamais complètement l'horizon, vue du reste de l'univers.

En conclusion de ce paragraphe, les trous noirs peuvent exister en ce qu'il peut exister des masses gigantesques invisibles par les rayonnements électromagnétiques et agissant pourtant gravitationnellement. On peut d'ailleurs calculer

complètement la métrique d'une boule de poussière s'effondrant gravitationnellement ; on arrive également et plus rigoureusement au fait qu'il y a extinction brutale de l'astre.

18. Déviation de la lumière par le Soleil. - Nous arrivons à l'étude des tests fondamentaux de la Relativité générale basés sur la solution exacte de SCHWARZSCHILD.

Ici, nous avons besoin de la forme de l'orbite, donc du lien entre r et θ . Éliminons dp entre (16,11) et (16,14) :

$$\frac{1}{d\theta} = \frac{r^2}{J} \frac{1}{dp}$$

$$\frac{B}{r^4} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{J^2 A} = -\frac{E}{J^2} \quad (16, 32)$$

$$\frac{dr}{d\theta} = \left(\frac{1}{J^2 A} - \frac{E}{J^2} - \frac{1}{r^2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{r^2}{\sqrt{B}}$$

La solution est alors déterminée par une quadrature :

$$\theta = \pm \int \frac{B^{\frac{1}{2}} dr}{r^2 \left(\frac{1}{J^2 A} - \frac{E}{J^2} - \frac{1}{r^2} \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (16, 33)$$

Considérons un photon ou une particule matérielle qui arrive de l'infini (fig. 16.10). À l'infini, la métrique est celle de MINKOWSKI et $A(\infty) = B(\infty) = 1$. Le mouvement s'effectue en ligne droite à la vitesse V . Nous pouvons choisir l'origine des longitudes de façon à avoir $\theta(\infty) = 0$.

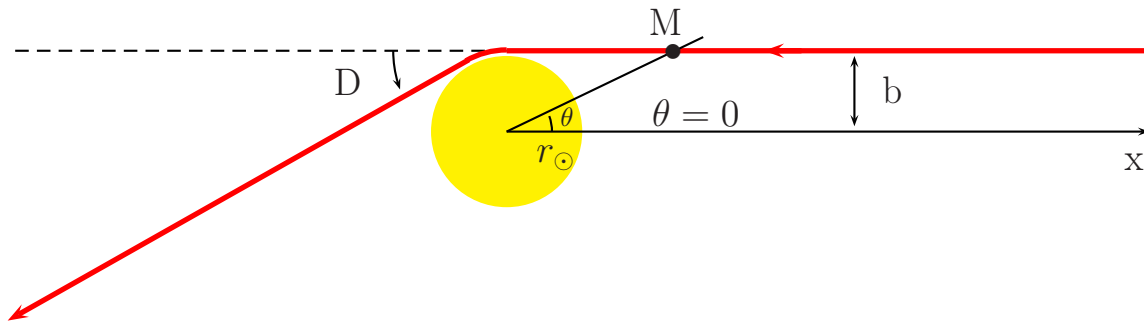


Fig. 16.10

$$b = r \sin \theta \quad V = -\frac{dr}{dt}$$

Introduisons ces valeurs dans les équations du mouvement (16,16) et (16,17), nous voyons que celles-ci sont vérifiées, et cela nous donne les constantes du mouvement :

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} \simeq JC = \frac{b^2}{\sin^2 \theta} \frac{d\theta}{dt}$$

$$V = b \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{d\theta}{dt} \simeq \frac{JC}{b} \quad (13, 34)$$

$$E = 1 - \frac{V^2}{C^2} \quad (16, 35)$$

Nous retrouvons le fait que pour un photon, $E = 0$.

Dans le cas qui nous intéresse, il est plus pratique d'exprimer J en fonction de la distance minimale d'approche du Soleil r_0 . En r_0 , $\frac{dr}{d\theta}$ s'annule et (16,17) donne :

$$\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{J^2 A} = -\frac{1}{J^2} \left(1 - \frac{V^2}{C^2} \right)$$

$$J = r_0 \left(\frac{1}{A} - 1 + \frac{V^2}{C^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

La déviation est alors égale à : $D = 2\theta - \pi$ avec :

$$\theta = \int_{r_0}^{+\infty} \frac{B(r)^{\frac{1}{2}} dr}{r^2 \left[\frac{1}{r_0^2} \left(\frac{1}{A(r_0)} - 1 + \frac{V^2}{C^2} \right)^{-1} \left(\frac{1}{A(r)} - 1 + \frac{V^2}{C^2} \right) - \frac{1}{r^2} \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (16, 36)$$

Pour un photon $V = C$ et on obtient :

$$\theta = \int_{r_0}^{+\infty} B(r)^{\frac{1}{2}} \left(\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \frac{A(r_0)}{A(r)} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{dr}{r} \quad (16, 37)$$

Nous prenons :

$$A(r) = 1 - \frac{2GM}{rC^2} \quad ; \quad B(r) \simeq 1 + \frac{2GM}{rC^2}$$

La quantité à la puissance moins un demi vaut alors :

$$\frac{r^2}{r_0^2} \left(1 - \frac{2GM}{r_0 C^2} + \frac{2GM}{r C^2} \right) - 1 = \frac{r^2}{r_0^2} - 1 + \frac{2GM}{C^2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \frac{r^2}{r_0^2}$$

Or :

$$\frac{r^2}{r_0^2} - 1 = \frac{(r - r_0)(r + r_0)}{r_0^2}$$

$$\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \frac{r^2}{r_0^2} = -\frac{(r - r_0)r}{r_0^2 r_0} = -\frac{\frac{r^2}{r_0^2} - 1}{r + r_0} \frac{r}{r_0}$$

Donc, on obtient :

$$\left(\frac{r^2}{r_0^2} - 1 \right) \left(1 - \frac{2GM}{C^2} \frac{r}{r_0(r + r_0)} \right)$$

et :

$$\theta = \int_{r_0}^{+\infty} \frac{\frac{dr}{r}}{\left(\frac{r^2}{r_0^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}} \left(1 + \frac{GM}{r C^2} + \frac{GM}{C^2} \frac{r}{r_0(r + r_0)} \right)$$

Dérivons :

$$f(r) = \sqrt{1 - \frac{r_0^2}{r^2}} + \sqrt{\frac{r - r_0}{r + r_0}}$$

$$\frac{-2\frac{r_0}{r} \left(-\frac{r_0}{r^2} \right)}{2\sqrt{1 - \frac{r_0^2}{r^2}}} + \frac{\frac{r+r_0-(r-r_0)}{(r+r_0)^2}}{2\sqrt{\frac{r-r_0}{r+r_0}}} = \frac{\frac{r_0}{r^2}}{\sqrt{\frac{r^2}{r_0^2} - 1}} + \frac{1}{(r + r_0)\sqrt{\frac{r^2}{r_0^2} - 1}}$$

Dérivons $g(r) = \arcsin \frac{r_0}{r}$, on obtient :

$$\frac{-\frac{r_0}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{r_0^2}{r^2}}} = -\frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{\frac{r^2}{r_0^2} - 1}}$$

Nous pouvons maintenant calculer θ :

$$\theta = \int_{r_0}^{+\infty} \left(\frac{1}{r_0} \frac{GM}{C^2} f'(r) - g'(r) \right) dr$$

$$\theta = \frac{GM}{r_0 C^2} [f(r)]_{r_0}^{+\infty} - [g(r)]_{r_0}^{+\infty}$$

$$\theta = \frac{GM}{r_0 C^2} 2 + \frac{\pi}{2} \quad ; \text{ et avec } D = 2\theta - \pi :$$

$M = M_{\odot}$, M_{\odot} est la masse du Soleil.

$$D = \frac{4GM_{\odot}}{r_{\odot}C^2} \quad (16, 38)$$

La déviation est en effet maximale pour un rayon lumineux rasant le Soleil, et dans ce cas $r_0 = r_{\odot}$.

On voit que la déviation est positive comme sur la figure 16.10. Elle correspond bien à une attraction de la lumière.

La valeur est double de celle que donne la Mécanique newtonienne pour une particule matérielle animée de la vitesse C , comme cela avait déjà été trouvé au § 20 du chapitre 12. Avec les valeurs numériques suivantes en unités légales :

$$\begin{array}{ll} G = 6.67 \cdot 10^{-11} & M_{\odot} = 1.99 \cdot 10^{30} \\ r_{\odot} = 6.95 \cdot 10^8 & C = 3 \cdot 10^8 \\ \text{On trouve} & D = 1.75'' \end{array}$$

Voir à ce sujet l'exercice 7.3.

L'expédition de 1919 menée par EDDINGTON lors d'une éclipse totale trouva environ $1.98''$ (voir photos sur la figure 16.11).

Lors des mesures ultérieures, les valeurs oscillent entre $1.7''$ et $2''$. On voit que la précision est faible, mais la valeur théorique est bien incluse dans les résultats expérimentaux.

On a effectivement une déviation, ce qui élimine la théorie ondulatoire de la lumière avec un temps absolu et un espace euclidien. D'autre part la déviation trouvée élimine également la possibilité que le photon soit une particule matérielle obéissant à la Mécanique newtonienne. La Relativité générale franchit donc avec succès ce premier test.

Voir également à ce sujet le § 6 du chapitre 7.

La déviation de la lumière par une galaxie ou un amas de galaxies est à l'origine de *mirages gravitationnels*. La lumière émise par une autre galaxie plus lointaine, ou un quasar, peut être déviée par la galaxie servant de *lentille gravitationnelle* de telle sorte que deux images virtuelles identiques sont créées (fig. 16.11). La figure pouvant avoir la symétrie sphérique, on peut parfois voir un anneau entourant la galaxie servant de lentille. Ce phénomène appelé *anneau d'Einstein* (quand il est incomplet, on a un arc) qui avait été prévu par EINSTEIN a été effectivement observé sur plusieurs cas.

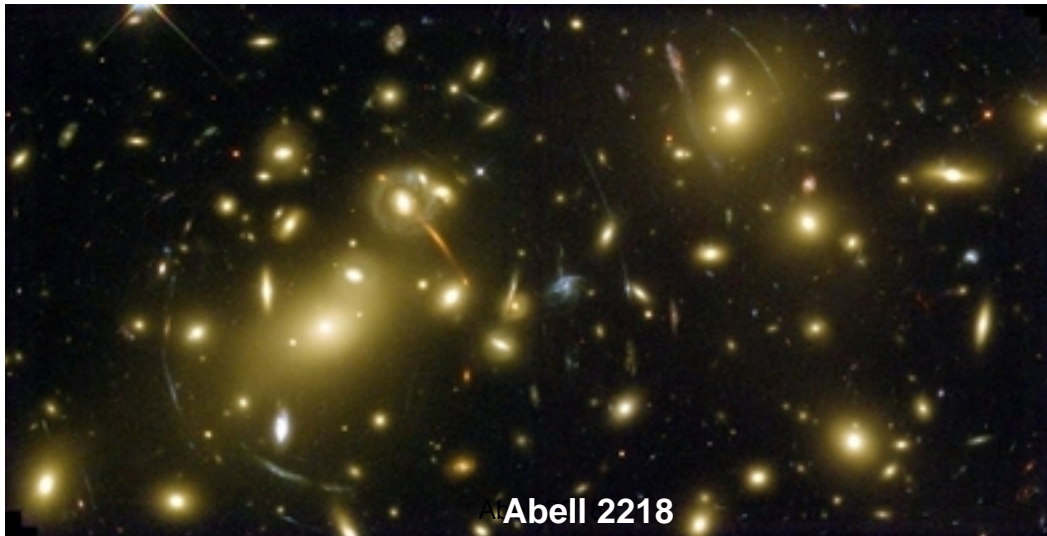
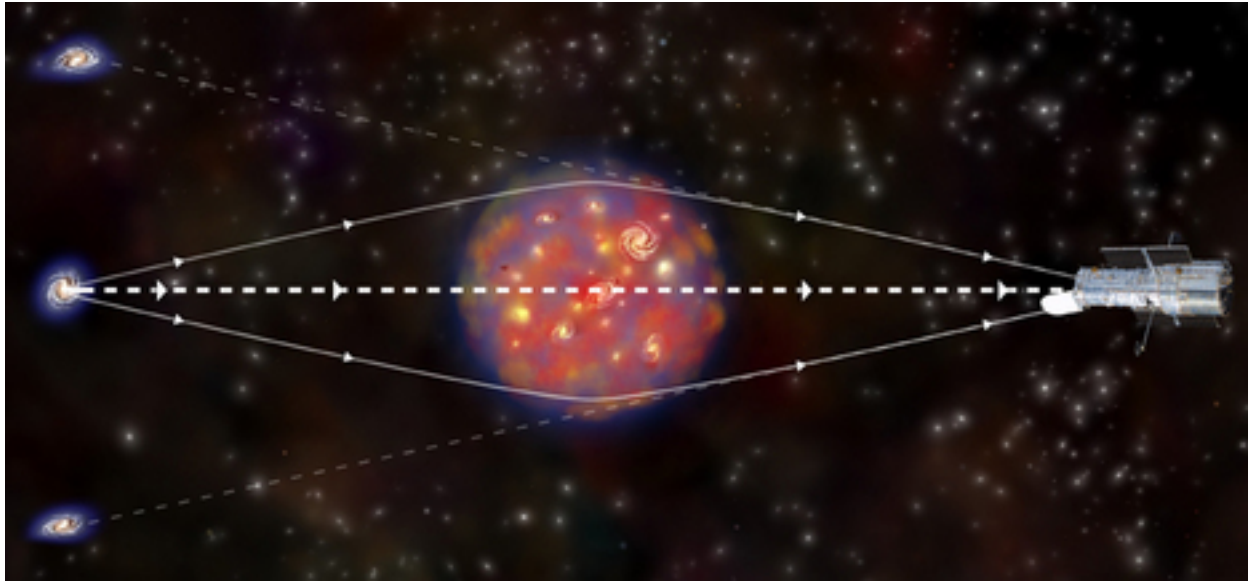
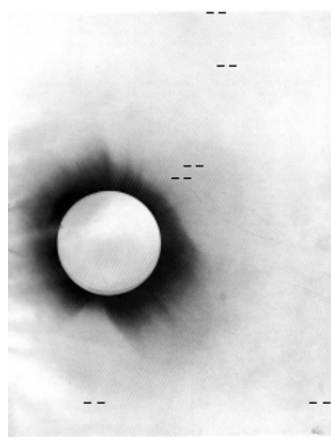


Fig. 16.11

Ces mirages gravitationnels sont un moyen d'évaluer la masse de la galaxie lentille ou de l'amas de galaxies lentille, donc permettent d'évaluer les masses dans l'univers. Ceci apporte une contribution à l'étude de la densité actuelle de l'univers (voir chapitre 18). On observe également que la plus grande part de la masse est invisible (matière noire).

19. Précession du périhélie. - Nous considérons maintenant une orbite liée, qui sera donc très voisine d'une ellipse qui est la trajectoire donnée par l'approximation newtonienne (fig.16.12).

Nous allons faire un développement limité de ce terme en $\frac{r_s}{r}$. Si nous prenons pour les termes contenant A des développements au premier ordre, nous voyons que r_s se trouve en facteur au numérateur et au dénominateur et disparaît. Il nous faut donc aller au deuxième ordre pour A .

$$\begin{aligned} A &= 1 - \frac{r_s}{r} \\ B &\simeq 1 + \frac{r_s}{r} \\ A^{-1} &\simeq 1 + \frac{r_s}{r} + \frac{r_s^2}{r^2} \end{aligned}$$

On voit alors que la quantité considérée est du second degré en $\frac{1}{r}$; d'autre part elle s'annule pour $r = r_+$ et pour $r = r_-$; ceci est donné par (16,32) avec $\frac{dr}{d\theta} = 0$. De plus cette quantité est positive. Elle est donc de la forme :

$$k \left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r} \right) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_+} \right)$$

Pour trouver la valeur de k , il suffit de regarder la valeur prise quand $r \rightarrow +\infty$.

$$-\frac{k}{r_- r_+} = \frac{r_-^2 - r_-^2 A_-^{-1} - r_+^2 + r_+^2 A_+^{-1}}{r_+^2 r_-^2 (A_+^{-1} - A_-^{-1})}$$

$$k = \frac{r_-^2 \left(\frac{r_s}{r_-} + \frac{r_s^2}{r_-^2} \right) - r_+^2 \left(\frac{r_s}{r_+} + \frac{r_s^2}{r_+^2} \right)}{r_+ r_- \left(\frac{r_s}{r_+} + \frac{r_s^2}{r_+^2} - \frac{r_s}{r_-} - \frac{r_s^2}{r_-^2} \right)}$$

$$k = \frac{1}{1 + r_s \left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-} \right)}$$

$$k^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{r_s}{2} \left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-} \right)$$

On obtient : $k^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{r_s}{p}$, p étant le paramètre de l'ellipse :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

Finalement l'intégrale de r_- à r_+ vaut :

$$I = \left(1 + \frac{r_s}{p} \right) \int_{r_-}^{r_+} \frac{\left(1 + \frac{r_s}{2r} \right) dr}{r^2 \left[\left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r} \right) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_+} \right) \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (16,41)$$

Posons :

$$F(r) = \left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r} \right) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_+} \right)$$

et effectuons le changement de variable :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) x$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) x$$

F s'annule pour $r = r_+$ et $r = r_-$, donc pour $x = \pm 1$. F est positive pour $-1 < x < 1$, F est du second degré en x . Donc $F = \lambda^2(1 - x^2)$.

λ^2 est la valeur de F pour $x = 0$, soit puisqu'on a alors :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2r_+} + \frac{1}{2r_-}$$

$$\lambda^2 = \left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{2r_+} - \frac{1}{2r_-} \right) \left(\frac{1}{2r_+} + \frac{1}{2r_-} - \frac{1}{r_+} \right)$$

$$\lambda^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r_+} \right) \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r_+} \right)$$

$$\text{et} \quad \lambda = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r_+} \right)$$

Finalement :

$$\sqrt{F} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r_+} \right) \sqrt{1 - x^2}$$

D'autre part :

$$-\frac{dr}{r^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) dx$$

Il vient alors :

$$I = \left(1 + \frac{r_s}{p} \right) \int_{-1}^{+1} \frac{\left(1 + \frac{r_s}{2p} \right) + \frac{r_s}{4} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

La part du numérateur faisant intervenir x donne une contribution nulle entre -1 et 1 et on obtient :

$$I = \left(1 + \frac{r_s}{p} \right) \left(1 + \frac{r_s}{2p} \right) \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (16, 42)$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = -[\arccos x]_{-1}^{+1} = \pi$$

$$\theta_+ - \theta_- = \pi + \frac{3r_s}{2p} \pi$$

La précession du périhélie vaut donc :

$$\Delta\theta = 2(\theta_+ - \theta_-) - 2\pi = \frac{3\pi r_s}{p}$$

$$\Delta\theta = \frac{6\pi GM_\odot}{p C^2} \quad (16, 43)$$

La valeur trouvée est positive, ce qui prouve que l'ellipse tourne dans le même sens que la planète.

L'effet de perturbation des autres planètes comme Jupiter, entraîne également une précession du périhélie calculable par la Mécanique newtonienne.

On peut montrer que tous les différents effets s'ajoutent, et une fois les effets classiques enlevés, il reste uniquement la précession due à la Relativité générale qui restait inexplicable avant que cette dernière théorie voit le jour.

Prenons les éléments de l'orbite de Mercure :

demi-grand axe	$a = 5.791 \cdot 10^{10} \text{ m}$
excentricité	$e = 0.206$
	$p = a(1 - e^2) = 5.545 \cdot 10^{10} \text{ m}$

On trouve : $\Delta\theta = 5 \cdot 10^{-7} \text{ rd}$

Mercure faisant un tour autour du Soleil en 0.2408 année, on obtient 43'' par siècle, ce qui est pratiquement exactement la valeur expérimentale trouvée. Cette valeur de 43'' était déjà connue en 1916, année d'avènement de la Relativité générale, de telle sorte que la précession du périhélie de Mercure fait partie avec la déviation de la lumière par le Soleil des deux seules vérifications expérimentales contemporaines de la découverte de cette théorie. Il fallut attendre les années 1960 pour que d'autres vérifications apparaissent (décalage vers le rouge, retard des échos radars, mirages gravitationnels etc).

Lorsqu'EINSTEIN qui travaillait seul sur ce sujet vit que ce très long calcul menait d'une manière inévitable au nombre de 43 qui était déjà connu de part les observations astronomiques inexplicables jusqu'à ce jour, il eut le sentiment que quelque chose s'était brisé en lui. Il eut des palpitations cardiaques (Abraham PAIS : *Subtle is the Lord* 1982 Oxford University press)

Nous pouvons comparer les précessions théoriques et les valeurs observées pour les précessions du périhélie en un siècle pour les différentes planètes (fig. 16.13) :

Planètes	a $10^{10} m$	e	p $10^{10} m$	$\Delta\theta$ en " / tour	Nbre de révol par siècle	$\Delta\theta$ en " / siècle	$\Delta\theta$ observé
Mercure	5.791	0.206	5.545	0.1036	415.3	43	43.1 ± 0.45
Vénus	10.821	0.007	10.820	0.0531	162.55	8.63	8.4 ± 0.5
Terre	14.960	0.0167	14.956	0.0383	100	3.83	5 ± 1.2
Icare	16.10	0.827	5.089	0.11286	89	10.05	9.8 ± 0.8

Fig. 16.13

Ce tableau montre le grand accord entre les prévisions théoriques et les résultats expérimentaux.

20. Effet Shapiro : retard des échos radars. - Venons en maintenant à cet effet déjà mentionné au § 13 du chapitre 7. Nous envisageons donc maintenant l'évolution de la position du mobile en fonction du temps.

L'équation (16,17) donne, dans le cas d'un photon ($E = 0$) :

$$\frac{B}{A^2 C^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{A} = 0$$

$\frac{dr}{dt} = 0$ à la distance d'approche maximale du Soleil que nous appelons r_0 , donc : $\frac{J^2}{r_0^2} - \frac{1}{A(r_0)} = 0$ soit en posant $A(r_0) = A_0 : J^2 = \frac{r_0^2}{A_0}$; Il vient :

$$\frac{B}{A^2 C^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \frac{1}{A_0} - \frac{1}{A} = 0 \quad (16, 44)$$

$$\frac{dr}{dt} = \left[\left(1 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \frac{A}{A_0} \right) \frac{A C^2}{B} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (16, 45)$$

Nous appelons alors $t(r_1, r_0)$ le temps que met la lumière pour aller du point $M_1(r_1, \theta_1)$ au point $M_0(r_0, \theta_0)$ (fig. 16.14). L'effet de courbure de la lumière est énormément exagéré sur la figure pour bien préciser les notations.

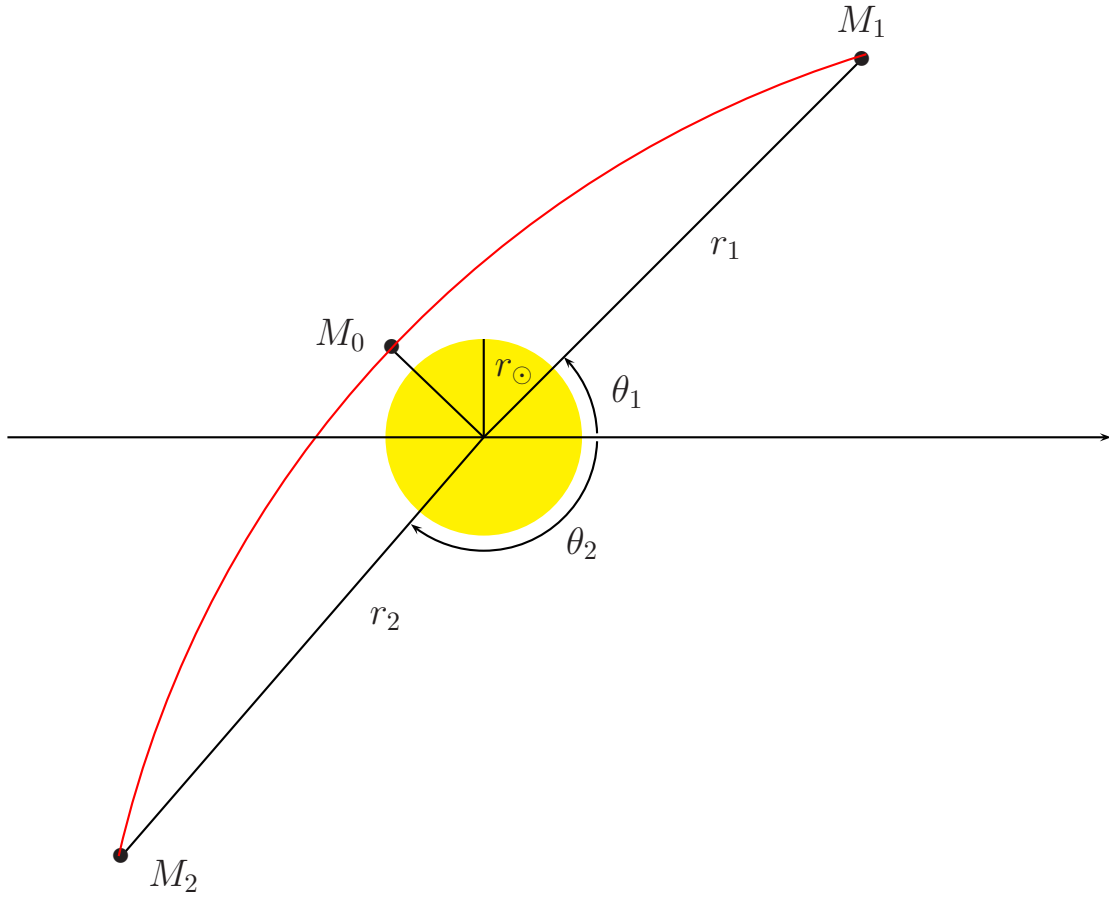


Fig. 16.14

$$t(r_1, r_0) = \frac{1}{C} \int_{r_0}^{r_1} \frac{\sqrt{\frac{B}{A}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \frac{A}{A_0}}} dr \quad (16, 46)$$

et pour aller de M_1 à M_2 , on a :

$$t(M_1, M_2) = t(r_1, r_0) + t(r_2, r_0)$$

Pour calculer cette intégrale, nous allons faire des développements limités en $\frac{r_s}{r}$.

$$B(r) \simeq 1 + \frac{r_s}{r} \quad \text{et} \quad A(r) = 1 - \frac{r_s}{r} \quad ; \quad \sqrt{\frac{B}{A}} \simeq 1 + \frac{r_s}{r}$$

$$1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \frac{A}{A_0} = 1 - \frac{r_0^2}{r^2} \frac{1 - \frac{r_s}{r}}{1 - \frac{r_s}{r_0}} = 1 - \frac{r_0^2}{r^2} \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_s}{r_0}\right) = 1 - \frac{r_0^2}{r^2} + \frac{r_0 r_s}{r^3} (r_0 - r)$$

$$= 1 - \frac{r_0^2}{r^2} + \frac{r_0 r_s}{r^3} \frac{r_0^2 - r^2}{r_0 + r} = 1 - \frac{r_0^2}{r^2} - \frac{r_0 r_s}{r} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) \frac{1}{r_0 + r} = \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{r_0 r_s}{r(r_0 + r)}\right)$$

$$t(r_1, r_0) = \frac{1}{C} \int_{r_0}^{r_1} \frac{\left(1 + \frac{r_s}{r}\right) \left[1 + \frac{r_0 r_s}{2r(r_0+r)}\right]}{\sqrt{1 - \frac{r_0^2}{r^2}}} dr$$

$$t(r_1, r_0) = \frac{1}{C} \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r_0^2}{r^2}}} \left(1 + \frac{r_s}{r} + \frac{r_0 r_s}{2r(r_0+r)}\right) \quad (16,47)$$

avec : $t(r_1, r_0) = I_1 + I_2 + I_3$

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 = \frac{1}{2C} \int_{r_0}^{r_1} \frac{d(r^2 - r_0^2)}{\sqrt{r^2 - r_0^2}} \quad I_1 = \frac{1}{C} \sqrt{r_1^2 - r_0^2} \end{array} \right. \quad (16,48)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I_2 = \frac{r_s}{C} \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - r_0^2}} \quad I_2 = \frac{r_s}{C} \ln \left(\frac{r_1}{r_0} + \sqrt{\frac{r_1^2}{r_0^2} - 1} \right) \end{array} \right. \quad (16,49)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I_3 = \frac{r_s}{2C} \int_{r_0}^{r_1} \frac{r_0 dr}{(r_0+r)\sqrt{r^2 - r_0^2}} \quad I_3 = \frac{r_s}{2C} \sqrt{\frac{r_1 - r_0}{r_1 + r_0}} \end{array} \right. \quad (16,50)$$

$$t(r_1, r_0) = \frac{1}{C} \left[\sqrt{r_1^2 - r_0^2} + r_s \ln \left(\frac{r_1}{r_0} + \sqrt{\frac{r_1^2}{r_0^2} - 1} \right) + \frac{r_s}{2} \sqrt{\frac{r_1 - r_0}{r_1 + r_0}} \right] \quad (16,51)$$

On voit sur la figure 16.15 que le premier terme, prépondérant, est celui que l'on obtient en considérant, en géométrie euclidienne, que la lumière se propage en ligne droite à la vitesse C . On retrouve ce terme seul quand $r_s = 0$ donc quand $MG = 0$, lorsque la gravité est donc absente.

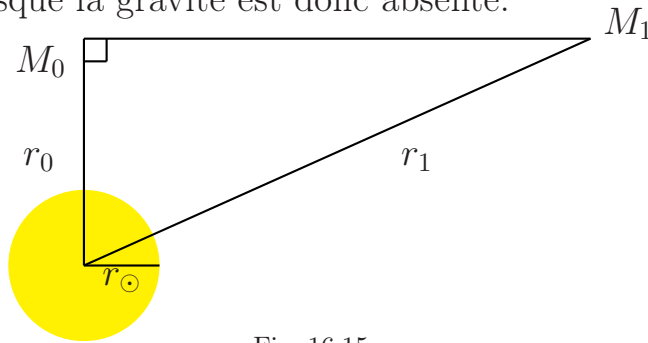


Fig. 16.15

Le retard est donc donné par :

$$\Delta t(r_1, r_0) = \frac{r_s}{C} \left[\ln \left(\frac{r_1}{r_0} + \sqrt{\frac{r_1^2}{r_0^2} - 1} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r_1 - r_0}{r_1 + r_0}} \right] \quad (16,52)$$

Il reste à évaluer avec précision r_1 en métrique de SCHWARZSCHILD (SHAPIRO 1968). De plus, pour une horloge sur Terre, on a : $\tau = \sqrt{1 - \frac{3r_s}{2r_T}} t$ (voir exercice 16.11 avec une influence négligeable de la gravité terrestre sur l'écoulement du temps).

L'expérience consiste à envoyer un signal radar sur Mercure et à mesurer le retard $\Delta\tau$ du retour par rapport au résultat attendu dans le cas d'une propagation rectiligne de la lumière à la vitesse C . La situation la plus favorable est obtenue lors d'une conjonction supérieure de Mercure, le signal radar rasant le Soleil à l'aller et au retour (fig. 16.16). Sur cette figure, il y a également une animation montrant le même cas avec Mars :

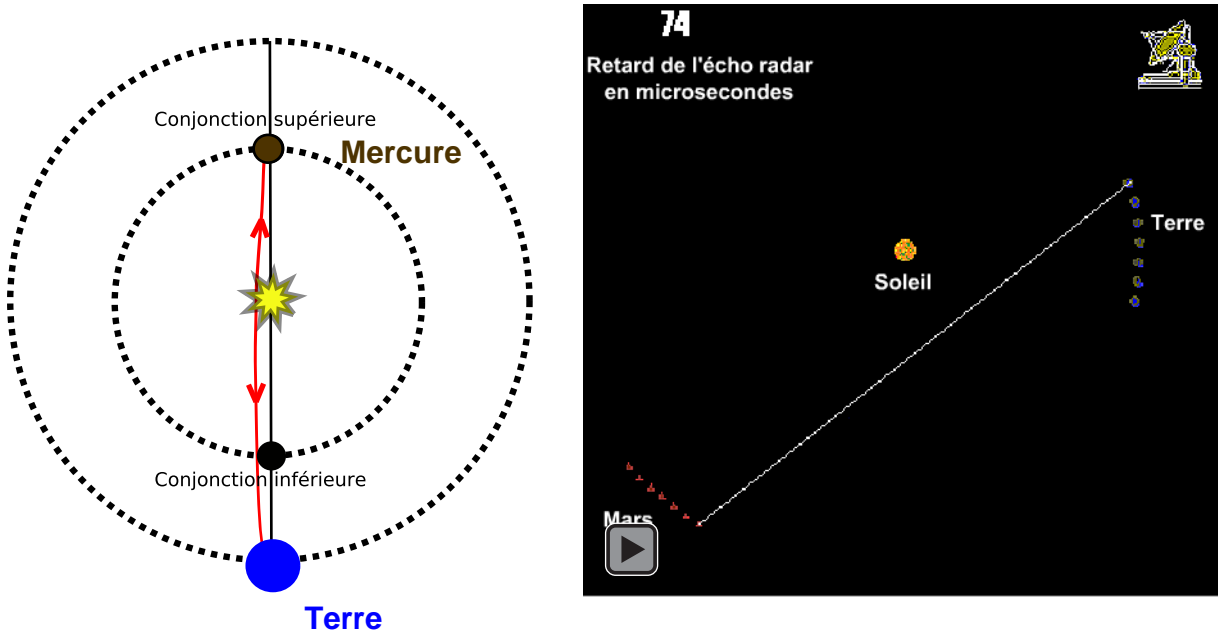


Fig. 16.16

Considérons plus en détail le cas de Mercure :

Nous appelons r_M la distance de Mercure au Soleil, r_T la distance de la Terre au Soleil, r_\odot le rayon du Soleil. On a alors, en tenant compte de l'aller et du retour :

$$\Delta\tau = 2 [\Delta t(r_T, r_\odot) + \Delta t(r_M, r_\odot)] \quad (16, 53)$$

Le calcul numérique donne :

$$\Delta\tau = 0.240 \cdot 10^{-3} \text{secondes}$$

Voir à ce sujet l'exercice 7.3 .

Les premières mesures faites par le laboratoire Lincoln lors des conjonctions supérieures de Mercure du 28 avril au 20 mai 1967 et du 15 août au 10 septembre 1967 donnèrent un bon accord entre la théorie et l'observation.

Le retard produit par le passage d'une onde près du Soleil est maintenant vu très nettement grâce aux pulsars. Lorsque, du fait de la rotation de la Terre autour du Soleil, un pulsar s'aligne avec le Soleil, on détecte avec beaucoup de précision le retard sur l'arrivée des impulsions d'ondes radioélectriques.

21. Ralentissement apparent de la vitesse de la lumière. - Montrons que le calcul fait dans le paragraphe précédent est en accord avec l'explication intuitive du ralentissement apparent de la propagation de la lumière vu par un observateur loin de l'astre, donnée au § 13 du chapitre 7 et dans l'exercice 7.3 .

L'équation utilisée était (16,17). Montrons qu'avec l'équation (16,16), elle redonne bien la vitesse locale de C pour un photon :

L'élément linéaire de SCHWARZSCHILD (16,5) montre que :

$$dl^2 = Bdr^2 + r^2 d\theta^2$$

et le temps local t_l est tel que $t_l = \sqrt{A} dt$. La vitesse mesurée localement avec des instruments étalons est donc telle que :

$$v_l^2 = \frac{dl^2}{dt_l^2} = \frac{B dr^2}{A dt^2} + \frac{r^2 d\theta^2}{A dt^2}$$

(16,17) avec $E = 0$ donne :

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{AC^2}{B} - \frac{J^2 A^2 C^2}{Br^2}$$

(16,16) donne : $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{J^2 A^2 C^2}{r^4}$

$$\text{et } v_l^2 = C^2 - \frac{J^2 C^2 A}{r^2} + \frac{J^2 A C^2}{r^2} \Rightarrow v_l = C$$

Considérons maintenant le cas simple d'un mouvement radial : $J = 0$. (16,17) donne $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{AC^2}{B}$ et on a rigoureusement :

$$t = \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{dt}{dr}\right) dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{C} \sqrt{\frac{B}{A}} dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{v}$$

Cela correspond bien à une vitesse apparente v de la lumière, vue de loin, avec $v = C\sqrt{\frac{A}{B}}$. Il y a le facteur \sqrt{A} dû au ralentissement du temps et le facteur $\frac{1}{\sqrt{B}} < 1$ dû à la contraction des longueurs étalons radiales par rapport à celles mesurées en tournant à distance constante autour de l'astre.

En effet l'augmentation des longueurs radiales mesurée avec des règles étalons locales est complètement représentée par l'image d'une surface courbe plongée

dans l'espace euclidien à trois dimensions telle qu'elle est dessinée sur la figure 7.7, avec augmentation des distances radiales, sans modification des distances orthoradiales (en cercle autour de l'astre).

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{\frac{1}{\sqrt{B}} dl}{\frac{1}{\sqrt{A}} dt_l} = \sqrt{\frac{A}{B}} \frac{dl}{dt_l} = \sqrt{\frac{A}{B}} C$$

EXERCICES

16.1

1. Calculez le rayon de SCHWARZSCHILD pour un trou noir de 1 milliard de masses solaires au centre d'une galaxie (quasar).
2. Montrez que ce résultat est cohérent avec le temps minimum de fluctuation du rayonnement des quasars qui est de quelques heures.

16.2

1. La masse de la Terre étant égale à $6 \cdot 10^{24}$ kg, calculez le rayon de SCHWARZSCHILD correspondant.
2. Calculez un ordre de grandeur de l'effet de contraction des longueurs au niveau de la surface terrestre, et déduisez en l'erreur sur la circonférence terrestre.

Les exercices 16.3 à 16.9 étudient le mobile en chute libre depuis l'infini où il a une vitesse nulle, décrit aux § 16 et § 17.

16.3

1. Calculez la vitesse du mobile du paragraphe 16, vu par un observateur fixe de coordonnée r .
2. Quelles conclusions en tirez vous, en liaison avec l'exercice 7.1 ?

16.4

1. Trouvez le lien entre dt_l , temps propre local d'un objet immobile de coordonnée r et $d\tau$, temps propre du mobile étudié au § 16.
Montrez que ce lien correspond à la formule (3,6) de Relativité restreinte, donnant le retard d'une horloge mobile, vue du référentiel fixe.

2. En déduire la formule $d\tau = A dt$, compte tenu de (16,30).

16.5

En utilisant les résultats des exercices 16.3 et 16.4, ainsi que la formule de l'effet Doppler relativiste de l'exercice 4.4, trouvez la formule donnant le décalage vers le rouge de la lumière émise par un objet, situé à la coordonnée r , en chute libre depuis l'infini où il était immobile, cette lumière étant observée à l'infini. En déduire la formule (16,29).

16.6

1. Écrire l'équation différentielle à variables séparables reliant t et r pour un rayon lumineux se propageant radialement dans la métrique de SCHWARZSCHILD.

2. Exprimez cette équation sous forme intégrale pour le mouvement d'une crête d'onde, émise en r à l'instant du temps universel t par le mobile du § 16, et qui arrive au point d'observation r_∞ très grand devant r_s (sans être infini) au temps universel t_∞ .

Exprimez de même le mouvement de la crête d'onde suivante, émise par le mobile, partant du point $r + \delta r$ au temps universel $t + \delta t$ et arrivant en r_∞ (le point d'observation est fixe) au temps universel $t_\infty + \delta t_\infty$.

3. Connaissant l'équation $\delta\tau = A \delta t$ et l'équation (16,27), calculez $\frac{\delta t_\infty}{\delta\tau}$.

4. En déduire le décalage vers le rouge z en fonction du point d'émission de coordonnée r .

16.7

On étudie toujours le même mobile.

1. Le mobile émet un signal lumineux à l'instant t du temps universel, au point de coordonnée $r(t)$.

Ce signal arrive au point d'observation éloigné de coordonnée r_∞ au temps universel t_∞ .

Exprimez t_∞ en fonction de t au moyen d'une intégrale (que l'on ne calculera pas) contenant une fonction de $r(t)$.

2. Montrez que à la fois t et l'intégrale divergent quand $r(t) \rightarrow r_s$. Exprimez ce que signifie pratiquement la divergence de ces deux quantités.

3. Déduire de la formule trouvée le décalage vers le rouge z de la lumière émise par l'objet situé en $r(t)$ et reçue à l'infini. On rappelle que :

$$\frac{d}{dt} \int_{h(t)}^a f(x) dx = -f[h(t)] \frac{dh(t)}{dt}$$

4. r est supposé voisin de r_s et la formule (16,31) est vérifiée. En utilisant cette formule et en calculant d'une manière approchée l'intégrale qui apparaît dans la formule reliant t_∞ et t , exprimez t_∞ en fonction de t , et de $r(t)$ position de l'émission du signal qui est reçu au temps universel t_∞ au point d'observation éloigné.

En déduire le décalage vers le rouge de l'objet en fonction de l'instant d'observation t_∞ de cet objet. Conclusion ?

16.8

Calculez l'intégrale apparaissant à la question 1 de l'exercice 16.7, et donc le retard $t_\infty - t$ entre l'instant en temps universel d'émission du signal par le mobile et l'instant de réception au point de coordonnée r_∞ .

16.9

1. Calculez :

$$\int \frac{dr}{\sqrt{\frac{a}{r}} \left(1 - \frac{a}{r}\right)} \quad \text{en posant} \quad \sqrt{\frac{a}{r}} = u$$

2. En déduire, à partir de (16,30), la formule exacte donnant la valeur du temps universel Δt nécessaire pour une particule lâchée avec une vitesse nulle à l'infini pour aller de r_0 à r .

3. Montrez que pour $r \gg r_s$, on retrouve la formule (16,28) ; justifiez.

4. Montrez que pour $r \rightarrow r_s$ on retrouve (16,31).

5. Utilisez les résultats précédents, ainsi que ceux de l'exercice 16.8, pour donner la valeur numérique du temps t_∞ d'arrivée du signal au poste d'observation (l'origine des temps sera choisie à votre guise) en fonction de z . $x = \frac{r}{r_s}$ variera de $1 + 10^{10}$ à $1 + 10^{-9}$; $x - 1$ étant divisé par 10 d'un calcul à l'autre.

On prendra la valeur numérique du § 17 : $T = 2.46 \cdot 10^{-5}$.

6. Sachant que la Terre est à environ 8 mn lumière du Soleil, lorsque le corps tombant est à la même distance du trou noir que la Terre du Soleil, quel est son décalage vers le rouge ?

Combien de temps met-il à tomber depuis cette distance dans le trou noir ?

7. Vérifiez cette valeur par un calcul de mécanique newtonienne.

16.10

Une horloge étalon posée sur la Terre voit son temps propre s'écouler plus lentement que celui d'une horloge immobilisée à une certaine hauteur.

Quel est le mouvement d'une horloge partant à l'instant universel t_a d'un point de la surface terrestre et y revenant à l'instant t_b , la trajectoire étant telle que le temps propre écoulé soit maximal ?

16.11

On considère un astre sans atmosphère (comme la Lune) isolé dans l'espace, et trois horloges étalons : La première (temps t) est située immobile et loin de l'astre ; la deuxième (temps τ_i) est posée sur la surface de l'astre ; la troisième (temps τ_c) a une orbite circulaire au voisinage de la surface de l'astre.

1. Calculez τ_i en fonction de t .
2. Calculez τ_c en fonction de t .
3. Montrez que le résultat de la question 2 permet de retrouver le rayon de la trajectoire circulaire de la lumière autour d'un trou noir.
4. Calculez la période de rotation du satellite autour de l'astre, et montrez que l'on retrouve le résultat newtonien.
5. Vérifiez le résultat de la question 4 en considérant un photon.
6. Montrez que pour r_s faible, le lien entre τ_i et τ_c est celui donné par la Relativité restreinte.

16.12

Montrez que l'on peut retrouver le résultat de la question 4 de l'exercice 16.11 en considérant les ondes de matière de de BROGLIE (exercice 4.1 et 12.3 et § 15 de ce chapitre).

16.13

On considère une particule matérielle maintenue sur une orbite circulaire parcourue à vitesse constante autour d'un trou noir.

1. Calculez la force gravitationnelle subie par cette particule.
2. Montrez que l'on peut interpréter cette force comme la somme de la force d'attraction universelle de NEWTON indépendante de la vitesse et de la force centrifuge.
3. Montrez que sur l'orbite circulaire de la lumière, la force centrifuge est nulle ; et que, plus près encore de l'astre, la force centrifuge propulse le mobile vers l'astre au lieu de l'en écarter. Montrez qu'un accroissement de la vitesse orbitale renforce l'"attraction" de la force centrifuge.
4. Conclusion ?

16.14

(non corrigé).

1. Montrez, en partant de (16,7), que l'accélération de gravité \mathbf{g} ressentie par un observateur fixe local de coordonnée r à distance d'un trou noir, et mesurant les quantités avec ses horloges et longueurs étalons locales, vaut :

$$g = \frac{d^2 l}{dt_l^2} = - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{rC^2}}} \frac{GM}{r^2}$$

avec $dt_l = \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} dt$ et $dl = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}} dr$

et devient donc infinie lorsque l'on s'approche de l'horizon. $\mathbf{F} = -m\mathbf{g}$ est la force qu'il faut appliquer à la masse m pour l'empêcher de tomber dans le trou. On voit que, au niveau de l'horizon, plus rien ne peut empêcher une telle chute.

2. On considère l'exemple de la chute libre depuis l'infini du § 16, et on veut montrer dans ce cas particulier qu'un observateur fixe local vérifie la formule :

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt_l} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v_l^2}{C^2}}} \mathbf{g}$$

avec

$$P = \frac{mv_l}{\sqrt{1 - \frac{v_l^2}{C^2}}} \quad ; \quad v_l = \frac{dl}{dt_l} = C \sqrt{\frac{r_s}{r}}$$

(exercice 16.3).

Pour cela, on utilisera également l'équation (16,30) ainsi que :

$$dt_l = \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} dt \quad ; \quad \text{avec} \quad \frac{dP}{dt_l} = \frac{dP}{dr} \frac{dr}{dt} \frac{dt}{dt_l}$$

Le fait que la force de gravitation soit :

$$\mathbf{F} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}} \mathbf{g}$$

montre que, en Relativité générale, c'est bien la masse-énergie $\frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}}$ qui est couplée à la gravitation.

3. Montrez que lorsque $\mathbf{v}_l \perp \mathbf{g}$, on obtient : $\gamma = \frac{dv_l}{dt_l} = g$.

4. Montrez que, pour un objet tombant verticalement, la relation entre \mathbf{P} et \mathbf{g} donne : $\gamma = g(1 - \frac{v_l^2}{C^2})$, l'accélération γ est donc nulle lorsque $v_l = C$.

5. Retrouvez la relation précédente en partant de (16,7).

16.15

(non corrigé).

Montrez, à l'aide des équations (16,11) et (16,14), que le demi-angle du cône qui contient les directions des particules de masses nulles pouvant s'échapper du trou noir est de $\alpha = 3\sqrt{3} \frac{l}{4} r_s$. l est la hauteur, mesurée en distance propre, des particules considérées au dessus de l'horizon. On pourra tout d'abord montrer que si $J \geq 3\sqrt{3} \frac{r_s}{2}$, les particules ne peuvent s'échapper, $\frac{dr}{dp}$ s'annulant.