

Chapitre DIX-SEPT

LA SOLUTION INTÉRIEURE DE SCHWARZSCHILD

1. Introduction. - Après avoir étudié la solution de SCHWARZSCHILD en espace vide dans le chapitre précédent, nous allons étudier maintenant la *solution intérieure de Schwarzschild*. Celle-ci est une solution en espace non vide de l'équation du champ, donc à l'intérieur de la matière et avec les mêmes symétries que la solution de SCHWARZSCHILD en espace vide. Notre but est en effet de résoudre l'équation du champ complète (13,17), donc en espace non vide et en prenant en compte le tenseur d'impulsion-énergie du système. De plus, nous ferons cela dans le cas où l'approximation linéaire n'est pas valable. Nous allons ainsi découvrir dans un calcul complet les effets de la non linéarité de l'équation du champ.

Nous étudierons la solution à symétrie sphérique et constante dans le temps de façon à simplifier les équations par des considérations de symétrie. Pour le tenseur d'impulsion-énergie, nous prendrons la forme (8,22) correspondant à un fluide parfait. Toutes ces approximations sont justifiées pour l'intérieur des étoiles qui ont atteint le stade final de leur évolution : naines blanches et étoiles à neutrons.

Une naine blanche est une étoile dans laquelle la température joue un rôle négligeable. Les noyaux des atomes sont intacts, mais tous les électrons sont délocalisés dans un gaz dont la pression est due à la dégénérescence quantique liée au principe d'incertitude de HEISENBERG. Les effets de transfert de chaleur et de viscosité sont supposés jouer un rôle négligeable, d'où la possibilité d'utiliser le tenseur d'impulsion-énergie d'un fluide parfait.

Les étoiles à neutrons ou pulsars, résidus des supernovae sont encore plus massives et les effets liés à la relativité y joueront un rôle crucial. Elles sont le stade final d'évolution des étoiles géantes. Cette fois-ci, il n'y a plus que des neutrons dont la dégénérescence quantique est à l'origine de la pression soutenant l'étoile. Là encore, la viscosité, la température et les transferts de chaleurs jouent

un rôle négligeable et nous pourrions prendre le tenseur d'impulsion-énergie d'un fluide parfait.

Nous aboutirons alors au résultat crucial qu'il existe une masse limite au delà de laquelle un collapse sans fin est inévitable, tout état d'équilibre étant impossible.

Pour avoir des équations relativement simples, nous prendrons un modèle où la masse volumique est supposée constante, ce qui n'est pas si loin de la réalité pour les étoiles à neutrons dont la matière est pratiquement incompressible.

2. Calcul des composantes du tenseur d'impulsion-énergie. - Les considérations de symétrie du chapitre précédent sont identiques à celles variables ici et nous avons encore avec les mêmes coordonnées la forme (16,2) de l'élément linéaire :

$$ds^2 = A(dx^0)^2 - B dr^2 - r^2 (d\alpha^2 + \cos^2\alpha d\theta^2)$$

Nous préférons utiliser ici la coordonnée $x^0 = Ct$ pour avoir la même homogénéité pour toutes les coordonnées dans les formules qui suivent.

Nous reprenons donc l'expression (12,11) du tenseur d'impulsion-énergie d'un fluide parfait :

$$T^{\alpha\beta} = -p g^{\alpha\beta} + (\rho C^2 + p) U^\alpha U^\beta \quad (17,1)$$

$$\text{Avec : } \quad g^{\alpha\beta} U^\alpha U^\beta = 1$$

Cette relation est déduite de (4,5) avec (11,7) et (11,8).

Ici, seule la coordonnée U^0 est non nulle, la situation étant constante dans le temps.

$$g^{\alpha\beta} U_\alpha U_\beta = g_{00}(U^0)^2 = A(U^0)^2 = 1$$

$$U^0 = \frac{1}{\sqrt{A}} \quad ; \quad U_0 = g_{00} U^0 = \sqrt{A}$$

$g^{\alpha\beta}$ étant diagonal et seule U^0 étant non nulle, nous voyons sur l'expression (17,1) que le tenseur d'impulsion-énergie est diagonal.

$$\begin{aligned} T^{00} &= -\frac{p}{A} + (\rho C^2 + p) \frac{1}{A} = \rho \frac{C^2}{A} \\ T^{rr} &= \frac{p}{B} \quad ; \quad T^{\alpha\alpha} = \frac{p}{r^2} \quad ; \quad T^{\theta\theta} = \frac{p}{r^2 \cos^2\alpha} \\ T_{00} &= g_{00} g_{00} T^{00} = \rho C^2 A \quad ; \quad T_{rr} = pB \\ T_{\alpha\alpha} &= pr^2 \quad ; \quad T_{\theta\theta} = pr^2 \cos^2\alpha \end{aligned}$$

$$T^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \frac{\rho C^2}{A} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{p}{B} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{p}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{p}{r^2 \cos^2 \alpha} \end{pmatrix} \quad T_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \rho C^2 A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & pB & 0 & 0 \\ 0 & 0 & pr^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & pr^2 \cos^2 \alpha \end{pmatrix}$$

3. Nouvelle forme de l'équation du champ. - Nous allons maintenant mettre l'équation du champ sous une forme plus pratique pour la résoudre effectivement :

$$R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R = -\frac{8\pi G}{C^4}T^{\alpha\beta}$$

$$g_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}R = -\frac{8\pi G}{C^4}g_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}$$

On sait (équation (5,41)) que les matrices $g_{\alpha\beta}$ et $g^{\alpha\beta}$ sont inverses l'une de l'autre. $g_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}$ est la trace de leur produit, la matrice unité et vaut donc 4. Il vient :

$$R - 2R = -\frac{8\pi G}{C^4}T^{\alpha}_{\alpha}$$

$$R = \frac{8\pi G}{C^4}T^{\lambda}_{\lambda}$$

$$R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\frac{8\pi G}{C^4}T^{\lambda}_{\lambda} = -\frac{8\pi G}{C^4}T^{\alpha\beta}$$

et donc :

$$R^{\alpha\beta} = -\frac{8\pi G}{C^4}\left(T^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}T^{\lambda}_{\lambda}\right) \quad (17, 2)$$

4. Écriture des différentes composantes de l'équation du champ : loi de force. - Tout d'abord, nous évaluons T^{λ}_{λ} :

$$T^{\lambda}_{\lambda} = g_{00}T^{00} + g_{11}T^{11} + g_{22}T^{22} + g_{33}T^{33} = \rho C^2 - 3p$$

Puis, nous utilisons l'équation (17,2) :

$$R_{00} = -\frac{8\pi G}{C^4}\left(\rho C^2 A - \frac{1}{2}A(\rho C^2 - 3p)\right) = -\frac{4\pi G}{C^4}(\rho C^2 + 3p)A$$

$$R_{rr} = -\frac{8\pi G}{C^4}\left(pB + \frac{1}{2}B(\rho C^2 - 3p)\right) = -\frac{4\pi G}{C^4}(\rho C^2 - p)B$$

$$R_{\alpha\alpha} = -\frac{8\pi G}{C^4}\left(pr^2 + \frac{r^2}{2}(\rho C^2 - 3p)\right) = -\frac{4\pi G}{C^4}(\rho C^2 - p)r^2$$

Et, tout de suite :

$$R_{\theta\theta} = -\frac{4\pi G}{C^4}(\rho C^2 - p)r^2 \cos^2 \alpha$$

Compte tenu des valeurs obtenues pour les différentes composantes du tenseur $R_{\alpha\beta}$ au § 4 du chapitre 16 et qui sont valables ici et en notant que $R_{tt} = C^2 R_{00}$, le système différentiel obtenu est :

$$-\frac{A''}{2B} + \frac{1}{4} \frac{A'}{B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{1}{r} \frac{A'}{B} = -\frac{4\pi G}{C^4} (\rho C^2 + 3p) A \quad (17,3)$$

$$\frac{A''}{2A} - \frac{A'}{4A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{B'}{rB} = -\frac{4\pi G}{C^4} (\rho C^2 - p) B \quad (17,4)$$

$$-1 + \frac{r}{2B} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) + \frac{1}{B} = -\frac{4\pi G}{C^4} (\rho C^2 - p) r^2 \quad (17,5)$$

Nous n'écrivons pas l'équation en θ , identique à celle en α multipliée par $\cos^2\alpha$.

5. Équation dynamique. - Elle s'écrit :

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$$

Nous laissons le lecteur vérifier que lorsque l'indice variable α vaut 0, α , θ , on obtient une équation identiquement nulle. Il reste :

$$T^{r\beta}{}_{;\beta} = T^{r0}{}_{;0} + T^{rr}{}_{;r} + T^{r\alpha}{}_{;\alpha} + T^{r\theta}{}_{;\theta} = 0$$

Nous avons (9,34) :

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\gamma} = T^{\alpha\beta}{}_{,\gamma} + T^{\alpha h} \Gamma_{h\gamma}^{\beta} + T^{h\beta} \Gamma_{h\gamma}^{\alpha}$$

Nous noterons encore avec un prime toutes les dérivées par rapport à la variable r . Compte tenu de (16,3), nous avons :

$$\begin{aligned} T^{r0}{}_{;0} &= T^{rr} \Gamma_{r0}^0 + T^{00} \Gamma_{00}^r = \frac{p}{B} \frac{A'}{2A} + \frac{\rho C^2}{A} \frac{A'}{2B} \\ T^{rr}{}_{;r} &= T^{rr}{}_{,r} + 2 T^{rr} \Gamma_{rr}^r = \frac{p'}{B} - \frac{pB'}{B^2} + 2 \frac{p}{B} \frac{B'}{2B} \\ T^{r\alpha}{}_{;\alpha} &= T^{rr} \Gamma_{r\alpha}^{\alpha} + T^{\alpha\alpha} \Gamma_{\alpha\alpha}^r = \frac{p}{B} \frac{1}{r} + \frac{p}{r^2} \left(-\frac{r}{B} \right) \\ T^{r\theta}{}_{;\theta} &= T^{rr} \Gamma_{r\theta}^{\theta} + T^{\theta\theta} \Gamma_{\theta\theta}^r = \frac{p}{B} \frac{1}{r} + \frac{p}{r^2 \cos^2\alpha} \left(-\frac{r}{B} \cos^2\alpha \right) \end{aligned}$$

Il vient :

$$\frac{pA'}{2A} + \frac{\rho C^2 A'}{2A} + p' = 0$$

$$p' = -\frac{A'}{2A} (p + \rho C^2) \quad (17,6)$$

Lorsque l'approximation newtonienne s'applique :

$$A = 1 + \frac{2\phi}{C^2} \simeq 1 \quad \text{et} \quad A' = \frac{2\phi'}{C^2} = \frac{2g}{C^2}$$

Il vient :

$$\frac{dp}{dr} = -g \left(\rho + \frac{p}{C^2} \right) \quad (17,7)$$

Nous retrouvons bien l'équation (8,31). Nous renvoyons à la discussion faite à ce sujet au § 16 du chapitre 8.

Si l'on examine maintenant le système complet d'équations : (17,3), (17,4), (17,5), (17,6), nous remarquons que nous avons 4 équations pour 3 inconnues : A , B , p . Le système n'est donc pas indépendant. En effet, la loi de force contient la loi dynamique. Les trois équations de la loi de force doivent donc permettre de retrouver l'équation (17,6). Nous allons le vérifier dans le paragraphe suivant.

6. La loi de force contient la loi dynamique. - Effectuons la somme des équations (17,3) divisée par A et (17,4) divisée par B :

$$-\frac{B'}{rB^2} - \frac{1}{r} \frac{A'}{AB} = -\frac{8\pi G}{C^4} (\rho C^2 + p) \quad (17,8)$$

Ajoutons maintenant membre à membre les équations (17,8) et (17,5) multipliée par 2 et divisée par r^2 . Le terme en p du deuxième membre disparaît, et il reste :

$$\rho C^2 = -\frac{C^4}{8\pi G} \left(-\frac{B'}{rB^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2 B} \right) \quad (17,9)$$

De (17,8) et (17,9) on déduit p :

$$\frac{8\pi G}{C^4} p = \frac{1}{r} \frac{A'}{AB} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2 B} \quad (17,10)$$

Les premiers membres de (17,4) divisée par B et de (17,5) divisée par r^2 sont égaux. Cette équation nous sera utile :

$$\frac{A''}{2AB} - \frac{A'^2}{4A^2B} - \frac{A'B'}{4AB^2} - \frac{B'}{rB^2} = -\frac{1}{r^2} + \frac{1}{2rB} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) + \frac{1}{r^2 B} \quad (17,11)$$

(17,10) nous permet de calculer p' :

$$\frac{8\pi G}{C^4} p' = -\frac{1}{r^2} \frac{A'}{AB} + \frac{A''}{rAB} - \frac{A'^2}{rA^2B} - \frac{A'B'}{rAB^2} + \frac{2}{r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{B'}{B^2} - \frac{2}{r^3 B} \quad (17,12)$$

On reconnaît dans la somme du troisième terme et du quatrième terme le premier membre de l'équation (17,8) multiplié par $\frac{A'}{A}$. Le reste vaut :

$$-\frac{2}{r} \left(\frac{A'}{2rAB} - \frac{A''}{2AB} - \frac{1}{r^2} + \frac{B'}{2rB^2} + \frac{1}{r^2 B} \right)$$

L'équation (17,11) nous montre que cela vaut :

$$-\frac{2}{r} \left(-\frac{A'^2}{4A^2B} - \frac{A'B'}{4AB^2} \right) = \frac{A'^2}{2rA^2B} + \frac{A'B'}{2rAB^2}$$

On retrouve la moitié de l'opposé du troisième terme plus le quatrième terme de (17,12). Finalement :

$$\frac{8\pi G}{C^4} p' = -\frac{A'^2}{2rA^2B} - \frac{A'B'}{2rAB^2}$$

Enfin, compte tenu de (17,8) :

$$p' = -\frac{A'}{2A} (\rho C^2 + p)$$

Cela était bien l'équation cherchée.

7. Bilan des équations. - Nous faisons maintenant un tableau des équations qui nous seront utiles pour résoudre le problème. (17,9) donne :

$$\rho = -\frac{C^2}{8\pi G} \left(-\frac{B'}{rB^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{1}{B} \right) \quad (17, 13)$$

(17,10) donne :

$$p = \frac{C^4}{8\pi G} \left(\frac{1}{r} \frac{A'}{AB} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2 B} \right) \quad (17, 14)$$

(17,11) donne :

$$\frac{1}{r^2 B} = \frac{1}{r^2} + \frac{A''}{2AB} - \frac{A'^2}{4A^2B} - \frac{A'B'}{4AB^2} - \frac{B'}{rB^2} + \frac{1}{2rB} \left(\frac{B'}{B} - \frac{A'}{A} \right) \quad (17, 15)$$

(17,8) donne :

$$p + \rho C^2 = \frac{C^4}{8\pi G} \left(\frac{B'}{rB^2} + \frac{A'}{rAB} \right) \quad (17, 16)$$

(17,14) donne :

$$\frac{A'}{AB} = \frac{8\pi G}{C^4} rp + \frac{1}{r} - \frac{1}{rB} \quad (17, 17)$$

Enfin rappelons :

$$p' = -\frac{A'}{2A} (p + \rho C^2) \quad (17, 6)$$

7. L'équation de TOLMAN-OPPENHEIMER-VOLKOV. - Il s'agit de la généralisation relativiste de l'équation d'équilibre hydrostatique newtonienne pour une étoile. Définissons tout d'abord la fonction $m(r)$ par :

$$B = \frac{1}{1 - \frac{2Gm}{rC^2}} \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \frac{2Gm}{rC^2} = \frac{1}{B} \quad (17, 18)$$

En supposant la fonction $m(r)$ continue à la surface de l'étoile, on a alors automatiquement la continuité de la fonction B , m prenant à la surface et à l'extérieur, la valeur correspondant à la solution extérieure de SCHWARZSCHILD et correspondant à la masse totale de l'astre.

Il vient, en dérivant l'équation de droite :

$$-\frac{B'}{B^2} = -\frac{2Gm'}{rC^2} + \frac{2Gm}{r^2C^2} = -\frac{2Gm'}{rC^2} + \frac{1}{r} - \frac{1}{rB}$$

(17,13) donne :

$$-\frac{2Gm'}{r^2C^2} = -\frac{8\pi G}{C^2} \rho$$

$$m' = 4\pi r^2 \rho \quad (17, 19)$$

m doit être nulle pour $r = 0$ de façon à éviter une discontinuité pour la métrique. Cela donne $B = 1$. Nous supposons qu'il est effectivement possible de choisir la coordonnée r de façon à avoir cela. Notons que cela correspond au fait qu'on a l'espace plat de MINKOWSKI au centre de l'astre où la gravitation est nulle. Un référentiel galiléen y est en effet immobile et en prenant des longueurs et des horloges étalons : $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$. Nous avons alors :

$$m = \int_0^r \rho 4\pi r^2 dr \quad (17, 20)$$

La masse totale de l'étoile est donnée par la formule (17,20) avec $r = r_0$, r_0 étant le rayon de l'étoile, exactement comme dans la théorie newtonienne. Cependant, il ne faut pas oublier que $4\pi r^2 dr$ n'est pas l'élément de volume, dr ne correspondant pas à la distance réelle radiale mesurée avec des règles étalons pour la variation de cette coordonnée et cette masse ne correspond donc pas à la masse totale de matière ayant servi à constituer l'étoile. Nous détaillerons cette question au paragraphe 11.

(17,6) et (17,17) donnent :

$$\begin{aligned}
p' &= \left(-\frac{4\pi G}{C^4} r B p - \frac{B}{2r} + \frac{1}{2r}\right) (p + \rho C^2) \\
p' &= -(p + \rho C^2) \frac{\frac{4\pi G}{C^4} r p + \frac{1}{2r} \left(\frac{2Gm}{rC^2}\right)}{1 - \frac{2Gm}{rC^2}} \\
p' &= -G \left(\rho + \frac{p}{C^2}\right) \frac{\frac{4\pi}{C^2} r^3 p + m}{r \left(r - \frac{2Gm}{C^2}\right)} \tag{17,21}
\end{aligned}$$

C'est l'équation de *Tolman-Oppenheimer-Volkov*. Cette équation est très utile pour la construction des modèles d'étoiles. En ce qui nous concerne, et puisque nous supposons $\rho = Cte$, nous nous servirons directement de l'équation (17,6) pour intégrer le système différentiel.

Supposons que nous soyons proche de l'approximation newtonienne. Le dénominateur est voisin de r^2 . $m \simeq \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$ et :

$$p' = -G \left(\rho + \frac{p}{C^2}\right) \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \left(\rho + \frac{3p}{C^2}\right)}{r^2} \tag{17,22}$$

On reconnaît l'équation que l'on obtient avec la mécanique newtonienne, mais la densité de masse gravitationnelle passive est remplacée par $\rho + \frac{p}{C^2}$ comme nous l'avons vu ci-dessus (équation (17,7)). D'autre part, le facteur à l'origine de l'attraction gravitationnelle est $\rho + 3\frac{p}{C^2}$ au lieu de ρ . Cela nous montre que les quatre composantes du tenseur d'impulsion-énergie, exprimées dans des coordonnées voisines de celles de MINKOWSKI, interviennent avec le même facteur pour créer l'attraction gravitationnelle. Comme nous l'avons vu au § 6 du chapitre 14 et au § 16 du chapitre 12, le tenseur se réduit en effet à sa forme diagonale avec :

$$T^{00} \simeq \rho C^2 \quad ; \quad T^{ii} \simeq p$$

9. Détermination de la métrique. - Nous allons maintenant intégrer complètement le système d'équations différentielles.

Puisque ρ est constant, (17,20) implique :

$$m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \tag{17,23}$$

(17,18) donne alors :

$$B = \frac{1}{1 - \frac{8\pi G \rho r^2}{3C^2}} = \frac{1}{1 - \frac{r^2}{\widehat{R}^2}} \quad (17, 24)$$

En posant :

$$\widehat{R}^2 = \frac{3C^2}{8\pi G \rho} \quad (17, 25)$$

Nous devons supposer que $r_0 < \widehat{R}$ de façon à ne pas avoir de discontinuité pour B . Nous reviendrons sur cette limitation au paragraphe suivant.

(17,6) donne alors :

$$\frac{p'}{p + \rho C^2} = -\frac{A'}{2A}$$

Soit :

$$\ln(p + \rho C^2) = -\frac{1}{2} \ln A + Cte$$

$$(p + \rho C^2) \sqrt{A} = K \quad (17, 26)$$

(17,16) donne alors :

$$\begin{aligned} \frac{K}{\sqrt{A}} &= \frac{C^4}{8\pi G} \left(\frac{B'}{rB^2} + \frac{A'}{rAB} \right) \\ \frac{rK}{\sqrt{A}} &= \frac{C^4}{8\pi G} \frac{B'}{B^2} + \frac{C^4}{8\pi G} \frac{A'}{AB} \end{aligned}$$

(17,24) donne alors :

$$\frac{rK}{\sqrt{A}} = -\frac{C^4}{8\pi G} \left(-\frac{16\pi G \rho r}{3C^2} \right) + \frac{C^4}{8\pi G} \frac{A'}{A} \left(1 - \frac{8\pi G \rho r^2}{3C^2} \right) = \frac{C^4}{4\pi G} \frac{r}{\widehat{R}^2} + \left(1 - \frac{r^2}{\widehat{R}^2} \right) \frac{2C^4}{8\pi G} \frac{A'}{2A}$$

Posons :

$$y = \sqrt{A} \frac{C^4}{8\pi G} \quad ; \quad (\sqrt{A})' = \frac{A'}{2\sqrt{A}}$$

$$rK = 2y \frac{r}{\widehat{R}^2} + \left(1 - \frac{r^2}{\widehat{R}^2} \right) 2y'$$

$$\left(1 - \frac{r^2}{\widehat{R}^2}\right) y' + \frac{r}{\widehat{R}^2} y = \frac{rK}{2}$$

Nous avons une solution particulière :

$$y = \frac{1}{2} K \widehat{R}^2$$

Réolvons l'équation sans second membre :

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} &= -\frac{r}{\widehat{R}^2 \left(1 - \frac{r^2}{\widehat{R}^2}\right)} \\ \ln \frac{y}{L} &= \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{r^2}{\widehat{R}^2}\right) \\ y &= L \sqrt{1 - \frac{r^2}{\widehat{R}^2}} \end{aligned}$$

La solution générale est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation sans second membre :

$$\sqrt{A} = \frac{8\pi G}{C^4} \left(\frac{1}{2} K \widehat{R}^2 + L \sqrt{1 - \frac{r^2}{\widehat{R}^2}} \right)$$

Nous avons donc, λ et μ étant deux nouvelles constantes :

$$\sqrt{A} = \lambda + \mu \sqrt{1 - \frac{r^2}{\widehat{R}^2}} \quad (17, 27)$$

$$\lambda = \frac{4\pi G}{C^4} K \widehat{R}^2 \quad (17, 28)$$

(17,26) donne alors :

$$p + \rho C^2 = \frac{C^4}{4\pi G \widehat{R}^2} \lambda \frac{1}{\lambda + \mu \sqrt{1 - \frac{r^2}{\widehat{R}^2}}} \quad (17, 29)$$

Nous avons déjà une condition à la limite qui est que la pression soit nulle à la surface de l'étoile :

$$\rho C^2 = \frac{C^4}{4\pi G \widehat{R}^2} \frac{\lambda}{\lambda + \mu \sqrt{1 - \frac{r_0^2}{\widehat{R}^2}}}$$

D'une manière évidente : $\rho \frac{4\pi G}{C^2} \frac{3C^2}{8\pi G \rho} = \frac{3}{2}$ donc $\frac{4\pi G \rho}{C^2} = \frac{3}{2\widehat{R}^2}$.

Il vient :

$$\frac{3}{2}\lambda + \frac{3}{2}\mu\sqrt{1 - \frac{r_0^2}{\widehat{R}^2}} = \lambda$$

soit :

$$\lambda = -3\mu\sqrt{1 - \frac{r_0^2}{\widehat{R}^2}} \quad (17, 30)$$

Nous déterminons la constante d'intégration μ en demandant que la métrique de SCHWARZSCHILD intérieure soit identique à la métrique de SCHWARZSCHILD extérieure à la surface de l'astre. La masse totale correspondant à la solution extérieure de SCHWARZSCHILD est :

$$M = \frac{4}{3}\pi r_0^3 \rho \quad (17, 31)$$

Ceci venant de la continuité de B à la surface, de (17,18) et de (17,23). (17,27) donne alors avec (17,30) :

$$\begin{aligned} \sqrt{A} &= \mu \left(-3\sqrt{1 - \frac{r_0^2}{\widehat{R}^2}} + \sqrt{1 - \frac{r^2}{\widehat{R}^2}} \right) \quad (17, 32) \\ A &= \mu^2 \left(3\sqrt{1 - \frac{r_0^2}{\widehat{R}^2}} - \sqrt{1 - \frac{r^2}{\widehat{R}^2}} \right)^2 \end{aligned}$$

La continuité avec la solution de SCHWARZSCHILD exprimée par (16,5) donne alors :

$$A(r_0) = \mu^2 4 \left(1 - \frac{r_0^2}{\widehat{R}^2} \right) = 1 - \frac{2GM}{r_0 C^2} \quad (17, 33)$$

(17,31) donne :

$$\frac{2GM}{r_0 C^2} = \frac{2G\frac{4}{3}\pi r_0^2 \rho}{C^2} = \frac{8\pi G\rho r_0^2}{3C^2} = \frac{r_0^2}{\widehat{R}^2} \quad (17, 34)$$

Il vient :

$$\mu^2 4 \left(1 - \frac{r_0^2}{\widehat{R}^2} \right) = 1 - \frac{r_0^2}{\widehat{R}^2} \quad ; \quad \text{et} \quad \mu = \pm \frac{1}{2}$$

(17,26) implique $K > 0$, donc $\lambda > 0$ et :

$$\mu = -\frac{1}{2} \quad (17, 35)$$

Finalement avec (17,24) :

$$ds^2 = \left(\frac{3}{2} \sqrt{1 - \frac{r_0^2}{\widehat{R}^2}} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{r^2}{\widehat{R}^2}} \right)^2 C^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{\widehat{R}^2}} - r^2 (d\alpha^2 + \cos^2\alpha d\theta^2) \quad (17,36)$$

Cet élément linéaire constitue la solution de SCHWARZSCHILD intérieure, avec :

$$\widehat{R}^2 = \frac{3C^2}{8\pi G\rho} \quad \text{et} \quad r_0 < \widehat{R} \quad (17,37)$$

Nous avons supposé $r_0 < \widehat{R}$ de façon à ne pas avoir de discontinuité pour B donné par (17,24) et correspondant à la solution intérieure de SCHWARZSCHILD. En ce qui concerne la solution extérieure :

$$B(r) = \frac{1}{1 - \frac{2GM}{rC^2}} = \frac{1}{1 - \frac{r_0^3}{r\widehat{R}^2}}$$

La condition de non discontinuité est ici :

$$\frac{r_0^3}{r\widehat{R}^2} < 1 \quad \text{soit} \quad r > \frac{r_0^3}{\widehat{R}^2} \quad \forall r \geq r_0$$

Soit : $r_0 < \widehat{R}$ et nous retrouvons la même condition ! La condition de non discontinuité pour la métrique intérieure est donc identique à la condition de non discontinuité pour la métrique extérieure, ces deux métriques étant identiques à la surface de l'étoile.

10. Calcul de la pression. - Nous nous servons de l'équation (17,26). Tout d'abord, il nous faut calculer K ; (17,28) avec (17,25), (17,30) et (17,35) donnent :

$$K = \frac{\lambda C^4}{4\pi G\widehat{R}^2} = \frac{3}{2} \sqrt{1 - \frac{r_0^2}{\widehat{R}^2}} \frac{C^4}{4\pi G} \frac{8\pi G\rho}{3C^2}$$

$$K = \rho C^2 \sqrt{1 - \frac{r_0^2}{\widehat{R}^2}} \quad (17,38)$$

Puis :

$$(p + \rho C^2) \left(\frac{3}{2} \sqrt{1 - \frac{r_0^2}{\widehat{R}^2}} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{r^2}{\widehat{R}^2}} \right) = \rho C^2 \sqrt{1 - \frac{r_0^2}{\widehat{R}^2}}$$

$$p = \rho C^2 \frac{-\sqrt{1 - \frac{r_0^2}{\widehat{R}^2}} + \sqrt{1 - \frac{r^2}{\widehat{R}^2}}}{+3\sqrt{1 - \frac{r_0^2}{\widehat{R}^2}} - \sqrt{1 - \frac{r^2}{\widehat{R}^2}}} \quad (17, 39)$$

Avec :

$$M = \frac{4}{3} \pi r_0^3 \rho$$

Nous devons vérifier que le dénominateur ne s'annule pas, ce qui donnerait une pression infinie. Sa valeur minimale est obtenue pour $r = 0$. Cela correspond à la pression maximale au centre de l'étoile.

$$3 \sqrt{1 - \frac{r_0^2}{\widehat{R}^2}} > 1$$

$$1 - \frac{r_0^2}{\widehat{R}^2} > \frac{1}{9} \quad ; \quad \frac{r_0^2}{\widehat{R}^2} < \frac{8}{9} \quad ; \quad r_0 < \frac{2\sqrt{2}}{3} \widehat{R} \quad (17, 40)$$

Cette condition est plus sévère que $r_0 < \widehat{R}$.

Exprimons la condition précédente en faisant intervenir la masse de l'étoile.

$$r_0^2 \frac{8\pi G \rho}{3C^2} < \frac{8}{9} \quad ; \quad \frac{r_0^2 G}{3C^2} \frac{6M}{r_0^3} < \frac{8}{9}$$

$$\frac{MG}{r_0 C^2} < \frac{4}{9} \quad (17, 41)$$

La Relativité générale nous apporte ce résultat nouveau qu'il y a une limite à la masse d'une étoile de rayon donné au delà de laquelle tout état d'équilibre est impossible, un tel état d'équilibre conduisant à une pression infinie au centre de l'étoile.

On peut montrer que cette limite existe et est donnée par la formule ci-dessus pour tout modèle d'étoile et sans supposer que la masse volumique est constante.

Nous avons déjà mentionné au § 17 du chapitre 8 que cela vient fondamentalement du fait que le gradient de pression dans un champ de pesanteur donné est supérieur à celui donné par la Mécanique newtonienne et du fait que la pression ainsi créée attire elle-même gravitationnellement ; voir également le commentaire au dessous de l'équation (17,22). Une telle limite n'existe pas en Mécanique newtonienne où la pression reste toujours finie au centre quels que soient la masse et le rayon de l'étoile.

Nous pouvons enfin exprimer la condition (17,41) en faisant intervenir la masse totale de l'étoile et sa masse volumique. Il vient pour la masse limite :

$$r_0^3 > \frac{M^3 G^3}{C^6} \left(\frac{9}{4}\right)^3 \quad ; \quad \frac{3M}{4\pi\rho} > \frac{729 M^3 G^3}{64 C^6} \quad ; \quad M^2 < \frac{3 \times 64 C^6}{4 \pi 729 \rho G^3}$$

$$M^2 < \frac{16 C^6}{243 \pi \rho G^3} \quad (17, 42)$$

La condition exprimant que le rayon de SCHWARZSCHILD soit inférieur au rayon de l'étoile trouvée au § 8 du chapitre 7 donnait (7,6) :

$$M^2 < \frac{3 C^6}{32 \pi \rho G^3} \quad (17, 43)$$

La comparaison des équations (17,42) et (17,43) qui est moins contraignante montre qu'il ne peut pas exister de trou noir en équilibre. Il y a effondrement de l'astre à cause de l'impossibilité de réaliser une pression infinie au centre avant que l'horizon de SCHWARZSCHILD n'existe réellement à l'extérieur de l'astre.

Les astres les plus compacts qui existent sont les étoiles à neutrons. Une telle étoile a une masse volumique : $\rho \sim 10^{15} \text{ g/cm}^3$. (17,42) donne alors $M < 7 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ soit $M < 3.6 M_\odot$.

Une étude précise tenant compte de la structure complète de l'étoile à neutron et de la dégénérescence quantique des neutrons donne en fait une masse limite de 2.5 masses solaires ; au delà on a donc un trou noir en effondrement permanent.

Il peut paraître curieux d'avoir ainsi un tel effondrement sans fin de la matière. Cela heurte notre sens commun de la matière constituée d'entités élémentaires incompressibles. Cependant en physique moderne, les particules élémentaires sont considérées comme ponctuelles et rien ne s'oppose à leur rapprochement dans un volume aussi petit qu'on veut. De toute façon, à cause du phénomène de contraction des longueurs, dans le trou noir on peut dire que la matière a de la place. Ajoutons que vu de l'extérieur, le collapse n'est jamais achevé.

Examinons maintenant comment se forment les étoiles à neutrons ou pulsars :

La limite de la masse d'une naine blanche imposée par le fait que le gaz d'électrons dégénérés puisse soutenir l'étoile est $M < 1.4 M_\odot$. Elle est appelée masse de *Chandrasekhar*. Lorsqu'une étoile s'effondre et lorsque sa masse est supérieure à la masse de Chandrasekhar, le cœur qui a la structure d'une naine blanche s'écroule brutalement et devient une étoile à neutron incompressible tandis que les couches extérieures sont éjectées par un phénomène de rebond sur ce cœur rigide dans une gigantesque explosion. On a alors une supernovae.

Ce phénomène s'accompagne de nombreuses réactions nucléaires fabricant les atomes lourds. Il y a également émission de rayonnement électromagnétique et de neutrinos.

Si la condition de stabilité du cœur de l'étoile à neutron n'est pas satisfaite, nous sommes assuré par la Relativité générale d'avoir un collapse sans fin et création d'un trou noir.

Il faudrait tenir compte pour une étude précise des équations d'état avec la Relativité générale, mais aussi des réactions nucléaires ayant lieu au moment de l'explosion et donnant naissances aux atomes lourds (plus lourds que le fer), comme l'uranium 238 et 235. On peut montrer alors que pour une certaine masse d'étoile, toute l'étoile est volatilisée par l'explosion en gaz éjectés et qu'il ne reste plus rien à l'emplacement de l'étoile.

11. Interprétation de la constance de la masse volumique ρ ; énergie gravitationnelle négative de formation de l'étoile. - Pour mesurer localement ρ , nous devons prendre un référentiel galiléen local dans lequel le système est macroscopiquement au repos. ρC^2 est alors l'énergie totale par unité de volume, énergie totale prenant en compte la matière et toutes les formes d'interaction autres que l'interaction gravitationnelle. Le volume est mesuré au moyen des règles étalons parfaitement indéformables du référentiel galiléen.

Nous avons toujours supposé que seule la vitesse avait un rôle dans la contraction des longueurs et la dilatation des temps et non l'accélération. Des règles étalons liées au système de coordonnées que nous avons choisi dans l'étoile, donc fixées par rapport à la matière de l'étoile, conviennent tout à fait pour mesurer le volume. Le référentiel galiléen considéré ci-dessus est en effet à l'instant considéré immobile par rapport à la matière de l'étoile, donc par rapport au système de coordonnées de l'étoile.

Par la pensée, nous pouvons détacher un petit morceau de volume à l'intérieur de l'étoile, délimité par des règles étalons parfaitement indéformables et l'amener à l'infini. Supposer que $\rho = Cte$ lors de cette manipulation, c'est supposer que la masse de cet élément de volume est constante, puisque l'élément de volume délimité par la matière indéformable servant d'étalon de longueur est lui-même constant. On peut supposer que la masse est constituée de la masse même de ces règles étalons.

Ainsi, nous arrivons à l'image tout à fait juste que l'étoile est obtenue par la juxtaposition d'éléments de volume constitués d'une matière pesante et parfaitement rigide pouvant servir d'étalon de longueur. $\rho = Cte$ peut s'interpréter en supposant que c'est la même matière parfaitement incompressible qui a servi à constituer toute l'étoile.

Si nous voulons connaître la masse totale de matière \mathcal{M} , puisée à l'infini, qui a servi à constituer l'étoile, il nous faut ajouter les masses $d\mathcal{M} = \rho dV$ de tous ces éléments de volume :

$$\mathcal{M} = \iiint \rho dV = \rho \iiint dV = \rho \mathcal{V}$$

dV peut être évalué à l'aide des coordonnées utilisées. En effet, la simultanéité définie par le temps d'univers t dans (17,36) correspond à la simultanéité locale. Dans l'équation (12,28) $\gamma_{ij} = -g_{ij}$. Les longueurs étalons peuvent donc être évaluées par :

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{\widehat{R}^2}} + r^2 (d\alpha^2 + \cos^2\alpha d\theta^2) \quad (17,44)$$

La formule (10,18) nous donne alors :

$$d\mathcal{V} = \sqrt{\gamma} dr d\alpha d\theta \quad (17,45)$$

Donc :

$$d\mathcal{V} = \frac{1}{1 - \frac{r^2}{\widehat{R}^2}} r^2 \cos\alpha dr d\alpha d\theta \quad (17,46)$$

$$\mathcal{V} = 4\pi \int_0^{r_0} \frac{r^2}{1 - \frac{r^2}{\widehat{R}^2}} dr$$

Dans le cas où l'on n'est pas trop éloigné de l'approximation newtonienne :

$$\frac{1}{1 - \frac{r^2}{\widehat{R}^2}} \simeq 1 + \frac{r^2}{2\widehat{R}^2}$$

$$\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi r_0^3 + 4\pi \int_0^{r_0} \frac{r^4}{2\widehat{R}^2} dr$$

Le deuxième terme vaut :

$$2\pi \frac{r_0^5}{5\widehat{R}^2} = \frac{2}{5}\pi r_0^5 \frac{8\pi G\rho}{3C^2}$$

$$\mathcal{V} \simeq \frac{4}{3}\pi r_0^3 + \frac{16\pi^2\rho G r_0^5}{15C^2}$$

$$\mathcal{M} \simeq M + \frac{16 \pi^2 \rho^2 G r_0^5}{15 C^2}$$

La masse de l'étoile mesurée par sa capacité d'attraction gravitationnelle : M (ou son inertie dans un arrière-plan de MINKOWSKI, ou sa capacité d'être attirée), est donc inférieure à la masse des constituants séparés ayant servi à la former. Nous devons interpréter $\Delta\mathcal{M} = \mathcal{M} - M$ comme la perte de masse due à l'énergie gravitationnelle lors de la formation de l'étoile à partir de ses constituants séparés.

$$\Delta E = \Delta\mathcal{M} C^2 = \frac{16\pi^2 \rho^2 G r_0^5}{15} \quad (17, 47)$$

Vérifions cette formule directement avec un calcul fait dans l'approximation newtonienne.

Pour un rayon r , la masse de l'étoile est :

$$\mathcal{M} \simeq \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$$

Ajoutons la masse $d\mathcal{M} = 4\pi r^2 dr \rho$ en l'amenant de l'infini. Elle part du potentiel 0 pour arriver au potentiel $-\frac{G\mathcal{M}}{r}$; d'où la perte d'énergie :

$$dE = \frac{G\mathcal{M} d\mathcal{M}}{r} = \frac{G}{r} \frac{4}{3} \pi r^3 \rho 4\pi r^2 dr \rho$$

$$dE = \frac{16\pi^2 G \rho^2 r^4}{3}$$

$$\Delta E = \int_0^{r_0} dE = \frac{16\pi^2 G \rho^2 r_0^5}{15}$$

La non linéarité de l'équation du champ permet bien de retrouver quantitativement le fait que des masses rapprochées attirent moins que la somme des attractions de ces masses séparées. La différence vérifie bien : $\Delta E = \Delta\mathcal{M} C^2$; E étant l'énergie gravitationnelle de liaison de la matière. La masse M qui apparaît dans la solution extérieure de SCHWARZSCHILD représente donc bien toute la masse-énergie contenue dans la source, y compris l'énergie gravitationnelle négative.

Notons que nous ne pouvons pas utiliser ici les résultats du chapitre 15, car comme nous l'avons vu au § 10, la séparation entre énergie gravitationnelle et autres formes d'énergie n'y est pas canonique.

Nous avons mentionné au §7 du chapitre 16 le théorème de BIRKOFF dont nous reparlerons au chapitre 18. Ce dernier affirme que pour un astre en train de s’effondrer en gardant la symétrie sphérique, nous avons à l’extérieur l’élément linéaire de SCHWARZSCHILD. Ainsi l’astre en train de s’effondrer est vu de l’extérieur comme un astre attirant gravitationnellement avec la masse **constante** M .

Nous pouvons interpréter cela : il y a de plus en plus d’énergie gravitationnelle négative, ce qui correspond à une contribution de plus en plus négative à M , mais simultanément, la matière acquiert de plus en plus d’énergie cinétique et nous avons vu que l’énergie cinétique contribue d’une manière positive à l’attraction gravitationnelle. La conservation de l’énergie totale somme de l’énergie potentielle gravitationnelle et de l’énergie cinétique assure la constance de M .

En ce qui concerne un astre immobile en équilibre (comme un astre en effondrement d’ailleurs), nous avons vu au §8 (équation(17,22)) que la pression à l’intérieur de l’astre attire. Or vu de l’extérieur, seule la masse attire compte tenu de la perte de masse par $\Delta E = \Delta \mathcal{M} C^2$. Comme pour un objet maintenu par d’autres interactions que l’interaction gravitationnelle, la contribution de la pression disparaît donc (voir §10 du chapitre 8). Mais ici, l’influence de la pression ne disparaît pas par la présence d’une pression négative, mais par la modification de la géométrie de l’espace modifiant le calcul des intégrales dans le calcul de l’influence gravitationnelle totale.

EXERCICE

17.1

On considère le modèle envisagé dans ce chapitre d’une sphère pleine homogène constituée d’une matière incompressible de masse volumique ρ .

1. Dans le cas limite où la pression est infinie au centre, calculez le décalage vers le rouge z d’une radiation émise au centre de l’étoile et reçue à l’infini.

2. Donnez l’interprétation du résultat dans le cadre de ce qui a été dit au §16 du chapitre 8.

3. Toujours dans le cas où la pression est juste infinie au centre, calculez le décalage vers le rouge d’une lumière émise à la surface de l’astre et reçue à l’infini.

4. Quelle conclusion peut-on en tirer en ce qui concerne les quasars dont le décalage vers le rouge peut atteindre plus de 4 ?