

Chapitre DIX-HUIT

COSMOLOGIE RELATIVISTE

1. Rôle de la Relativité générale en cosmologie. - La cosmologie a pour objet de décrire l'Univers dans son ensemble.

Le premier principe, indispensable pour pouvoir effectuer cette tâche, est celui qui suppose que les lois de la physique sont les mêmes partout dans l'univers (régularité dans l'espace) et ont toujours été les mêmes (régularité dans le temps). Notons que cela ne suppose pas que les constantes fondamentales, comme la constante de la gravitation universelle G , aient partout la même valeur et soient effectivement constante. Leurs variations pourraient être prises en compte dans une loi plus générale valable partout. La variation de G pourrait être décrite par une loi de la gravitation prenant en compte le principe de MACH. Toute variation des lois pouvant être prise en compte dans une loi plus générale, on voit que ce principe revient à dire qu'il existe dans l'univers des régularités permettant de le décrire par une structure mathématique.

Pour nous, nous supposerons, ce qui est effectivement un principe non trivial, que les lois de la physique des particules et la Relativité générale ont toujours été valables et sont valables partout dans l'univers. En particulier, nous supposerons que G , C , h , sont constantes et ont la même valeur partout.

Nous savons qu'il existe quatre interactions fondamentales. Deux de ces interactions : l'interaction forte et l'interaction faible sont à très courtes portées. L'interaction électromagnétique met en jeu des charges positives et des charges négatives. De part l'invariance de la charge électrique et sa quantification, une charge positive compense toujours exactement une charge négative, quel que soit l'état de ces deux charges. Ceci permet à la matière d'être neutre à grande échelle. Cette interaction disparaît donc totalement à une telle échelle. L'interaction électromagnétique joue encore un rôle dans la structure des étoiles, essentiellement par des effets magnétiques, et peut être dans la structure des galaxies. Par contre, il est admis qu'en ce qui concerne l'interaction des galaxies entre elles dans un amas ou un superamas, ou en ce qui concerne l'interaction

des amas et superamas entre eux, seule la gravitation intervient, tout au moins actuellement. Il est possible en effet que les autres interactions soient intervenues antérieurement dans la formation de ces structures, dans la formation des murs de galaxies par exemple.

À l'échelle de l'univers, la vitesse de la lumière peut être considérée comme très petite. La mécanique classique correspond à la limite $C \rightarrow +\infty$. Elle est donc inappropriée.

Résumons nous : l'interaction à considérer est la gravitation. Elle doit être prise en compte dans le cadre de la Théorie de la relativité. La théorie adéquate pour décrire l'univers dans son ensemble est donc la Relativité générale. Si nous supposons que les effets quantiques sont actuellement négligeables à grande échelle, le fait que nous ne disposions pas d'une théorie quantique de la gravitation ne doit pas être gênant.

2. Description de l'univers. - À l'échelle de l'univers, les galaxies jouent le rôle d'atomes isolés. Ces atomes interagissent uniquement par la gravitation. Nous considérerons donc l'image d'un univers rempli d'un gaz dont les atomes ou les molécules sont les galaxies. Les amas ou superamas de galaxies constituent alors des fluctuations de densité analogues, bien que d'un type différent, aux fluctuations de densité des gaz usuels. Nous traiterons ce gaz comme un fluide parfait homogène, l'élément de volume infiniment petit considéré étant grand devant la distance moyenne des galaxies. La formule (17,1) s'applique donc.

L'espace-temps dans son ensemble est une variété différentiable. Le problème que nous nous posons est de trouver un système de coordonnées valable globalement sur toute cette variété. En particulier, est-il possible de trouver un temps d'univers u^0 valable partout et définissant une simultanéité globale ? Nous allons voir qu'il existe une solution mathématique à ce problème, les *coordonnées de Gauss*. Cette solution est applicable concrètement moyennant certains postulats physiques. Nous allons décrire dans le paragraphe suivant ce système de coordonnées, puis nous verrons comment construire effectivement ces coordonnées à partir de notre position d'observateur de l'univers.

3. Les coordonnées de GAUSS. - Considérons l'espace-temps de la Relativité générale le plus quelconque ; c'est à dire que nous ne lui attribuons aucune propriété particulière. Nous avons donc une variété riemannienne à 4 dimensions, la signature de la métrique étant : $(1, -1, -1, -1)$ (voir le § 1 du chapitre 10).

Considérons une hypersurface S à trois dimensions de cet espace. Nous supposons que tout vecteur n^α perpendiculaire à S vérifie :

$$g_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta > 0 \quad (18,1)$$

Un tel vecteur est donc du genre temps. Nous dirons que la surface S est du genre espace.

Sur la surface S , nous définissons un système de trois coordonnées u^1, u^2, u^3 , permettant de repérer les points : $P(u^1, u^2, u^3)$.

Depuis chaque point P sur la surface, nous pouvons tracer la géodésique perpendiculaire à S en P . Ces géodésiques forment un champ de courbes ne se coupant pas dans un voisinage \mathcal{V} de P , en supposant la surface suffisamment régulière. Nous choisissons un sens de parcours sur ces géodésiques. Cela est fait par continuité à partir de l'orientation de l'une d'entre elles. Nous définissons ainsi une *flèche du temps*, c'est à dire que nous aurons *avant* S et *après* S . Étant donné un point M de l'espace-temps appartenant à ce voisinage, il passe une et une seule de ces géodésiques par M . Celle-ci est issue d'un point P de S . Nous définissons alors les coordonnées de M par :

$$u^i(M) = u^i(P) \quad ; \quad u^0(M) = \varepsilon \int_P^M \sqrt{ds^2} \quad (18,2)$$

$\varepsilon = +1$ si M est dans la région après ; $\varepsilon = -1$ si M est dans la région avant (fig. 18.1).

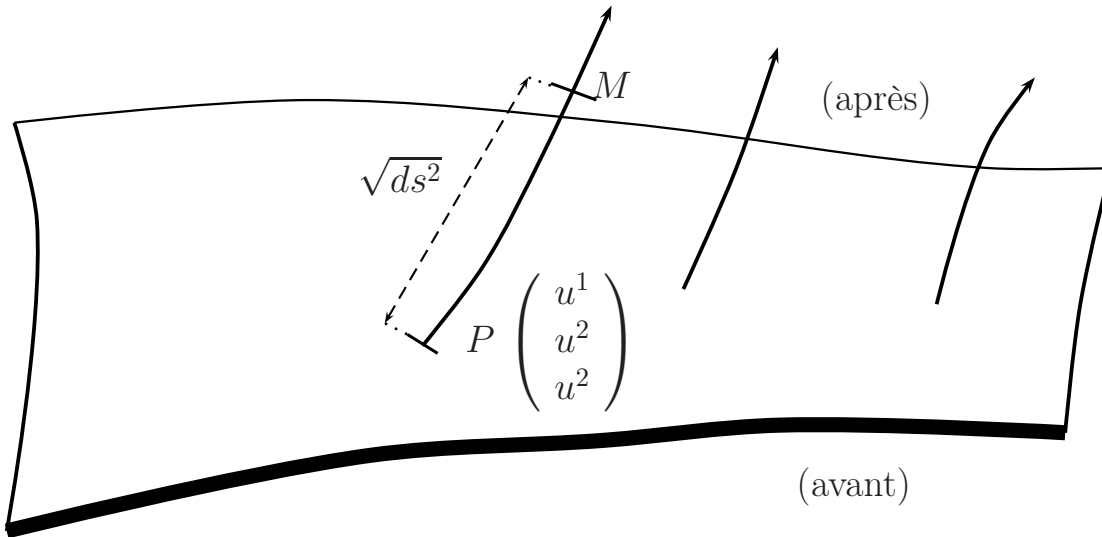


Fig. 18.1

Puisque nous avons des géodésiques du genre temps, compte tenu de (18,1), elles peuvent être effectivement parcourues par des particules matérielles. Nous pouvons donc bien avoir recours à l'image donnée au §9 du chapitre 12. Nous avons un fluide en mouvement. Nous pouvons supposer que les points du fluide parcourent bien les géodésiques dans le sens choisi. Comme indiqué au paragraphe mentionné, un point du fluide qui se déplace vérifie bien $u^i = Cte$.

Par construction, et en supposant la surface suffisamment régulière, lorsqu'on prend deux points suffisamment voisins de S , les deux géodésiques correspondantes viennent se confondre. Cela assure que deux points voisins ont des trajectoires pratiquement identiques dans l'espace-temps. Ils s'accompagnent donc et ont une vitesse nulle l'un par rapport à l'autre. Cela a d'ailleurs été supposé vrai pour tout système de coordonnées suffisamment régulier au § 12 du chapitre 12. Dans le cas présent, la régularité supposée de la construction, donc du système de coordonnées correspondant, fait qu'en tout point P de S , il existe un plan tangent unique à S (donc un vecteur n^α unique).

Au § 9 du chapitre 12, le mouvement du fluide était supposé quelconque, dans la mesure où il pouvait être effectivement suivi par des particules matérielles. Ici, puisque les trajectoires sont des géodésiques de l'espace-temps, les particules du fluide sont en mouvement de chute libre.

Compte tenu de (18,2) nous avons $du^0 = Cd\tau$. Au facteur C près, la coordonnée u^0 est donc le temps réel mesuré par une horloge étalon accompagnant le fluide. (12,21) donne alors $g_{00} = 1$.

Exprimons maintenant l'orthogonalité de la géodésique passant par P à la surface S au moyen des coordonnées u^α . Un vecteur tangent à la géodésique est :

$$a^\alpha = \begin{pmatrix} a^0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Un vecteur quelconque de la surface S est :

$$b^\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix}$$

$$g_{\alpha\beta} a^\alpha b^\beta = 0 \quad \text{donne} \quad g_{0i} a^0 b^i = 0$$

$$\text{Soit :} \quad g_{0i} = 0 \quad (18,3)$$

Compte tenu de (12,29), nous voyons que la simultanéité définie par u^0 est identique à la simultanéité locale pour un observateur immobile dans le fluide.

Ces propriétés sont résumées dans la forme de l'élément linéaire sur la surface S :

$$ds^2 = (du^0)^2 + g_{ij} du^i du^j$$

Montrons maintenant que l'élément linéaire a cette forme dans tout le voisinage \mathcal{V} . L'équation des géodésiques :

$$\frac{d^2 u^\alpha}{dp^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{du^\beta}{dp} \frac{du^\gamma}{dp} = 0$$

avec $\alpha = i$ donne, puisque $\frac{d^2 u^i}{dp^2} = 0$ et $\frac{du^i}{dp} = 0$ ($u^i = Cte$ sur une géodésique) :

$$\Gamma_{00}^i = 0$$

$$\frac{1}{2} g^{i\lambda} (g_{0\lambda,0} + g_{\lambda 0,0} - g_{00,\lambda}) = 0$$

Nécessairement $\lambda \neq 0 \Rightarrow \lambda = j$ et $g_{00,j} = 0$ puisque $g_{00} = 1 = Cte$. Donc il vient :

$$g^{ij} g_{0j,0} = 0$$

Le système étant de KRAMER ($\det g^{ij} \neq 0$) :

$$\frac{\partial g_{0j}}{\partial u^0} = 0$$

Partant de la valeur nulle sur la surface S , les termes g_{0j} sont constants sur les géodésiques donc dans tout \mathcal{V} , donc sont nuls partout dans \mathcal{V} . Ainsi, dans tout \mathcal{V} , l'élément linéaire a la forme :

$$ds^2 = (du^0)^2 + g_{ij}(u^0, u^1, u^2, u^3) du^i du^j$$

Toute hypersurface $u^0 = Cte$ est donc normale au faisceau des géodésiques et joue un rôle identique à la surface S du départ. Une telle hypersurface correspond à un état de l'espace à un moment donné du temps d'univers u^0 . Le temps d'univers définit donc une simultanéité globale (dans tout \mathcal{V}). La durée séparant les deux moments correspondant aux hypersurfaces S_1 et S_2 est égale à $u_2^0 - u_1^0$, durée du temps propre écoulé en commun sur chaque géodésique.

Ainsi, les coordonnées de GAUSS permettent de concilier la structure de l'espace-temps de la Relativité générale avec la vision intuitive d'un espace à trois dimensions dont l'existence s'écoule dans un temps universel.

Il faut bien remarquer que nous avons démontré l'existence de coordonnées de GAUSS localement dans toute région de la variété. L'existence globale dans toute la variété d'un système unique de coordonnées de GAUSS n'est pas assurée.

Deux géodésiques peuvent au bout d'un certain temps se couper par exemple. On arriverait à la contradiction d'un point unique ayant deux valeurs différentes pour ses coordonnées d'espace (fig. 18.2).

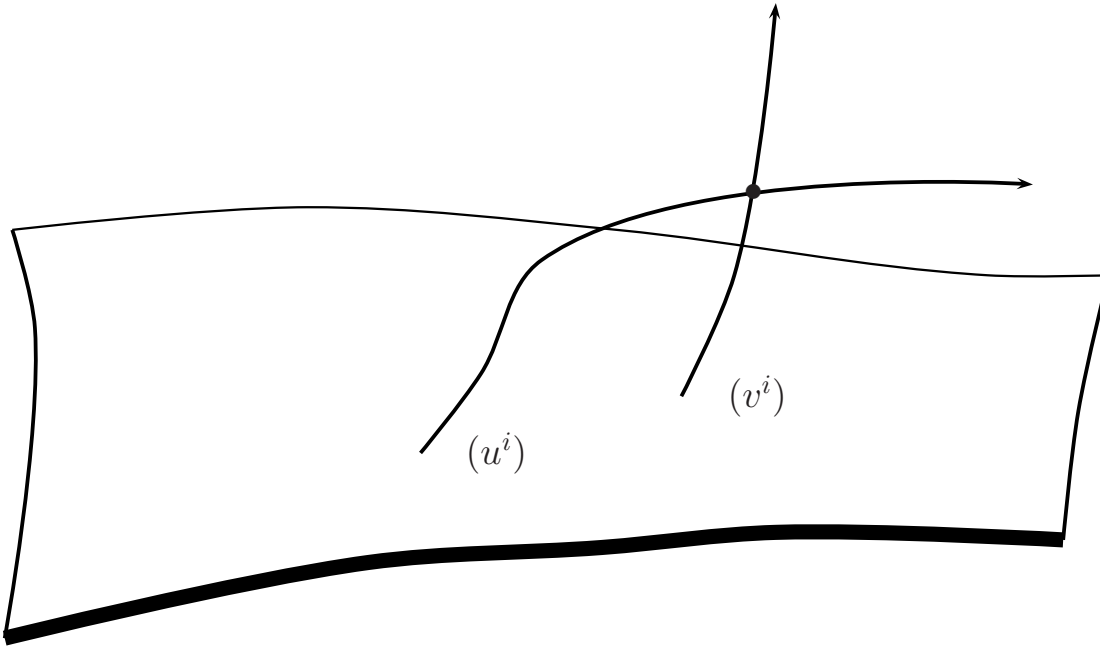


Fig. 18.2

Nous avons des coordonnées de GAUSS sur une variété dès que les lignes coordonnées, pour la variation d'une coordonnée particulière, sont des géodésiques, la variation de la coordonnée sur ces lignes étant égale à la longueur ou à la pseudo longueur de l'arc correspondant. Ainsi, les coordonnées latitudes et longitudes sur la sphère, sont des coordonnées de GAUSS. Les lignes $\theta = Cte$ sont les méridiens qui sont des grands cercles, donc des géodésiques. La variation de la latitude α sur ces grands cercles est proportionnelle à la longueur de l'arc correspondant ($l = R\alpha$), R étant le rayon de la sphère.

4. Le postulat de WEYL. - Il stipule que l'on peut effectivement trouver dans l'espace-temps de notre univers des coordonnées de GAUSS globales, c'est à dire valables partout. Il suppose de plus que les géodésiques correspondantes sont les trajectoires des galaxies traitées comme des points matériels.

Il est donc possible d'avoir une coordonnée de temps que nous noterons t commune pour toutes les galaxies. Ce temps sera appelé *temps cosmique*. Il correspond au temps propre mesuré par chaque observateur dans sa galaxie. On suppose que les effets sur l'écoulement du temps par décalage vers le rouge dus à la gravitation, ou par des effets de vitesse, sont négligeables au poste d'observation considéré dans la galaxie. La simultanéité définie par le temps cosmique est identique à la simultanéité locale dans une région où les galaxies

sont pratiquement immobiles les unes par rapport aux autres. Nous arrivons donc à :

$$ds^2 = C^2 dt^2 + g_{ij} du^i du^j \quad (18, 4)$$

Notons que seule l'hypothèse de globalité est vraiment fondamentale. Elle suppose que l'espace-temps ne présente pas de situation pathologique. Compte tenu du fait que l'on suppose que les galaxies ne sont sensibles qu'à l'interaction gravitationnelle, elles sont effectivement en chute libre et décrivent des géodésiques. Il est clair que chaque observateur dans sa galaxie peut mesurer son temps propre au moyen d'une horloge étalon. La synchronisation des horloges de proche en proche entre galaxies voisines en faibles mouvements les unes par rapport aux autres, au moyen de signaux lumineux, ne présente pas de difficulté. Cette synchronisation définit un temps cosmique commun pour toutes ces galaxies. Si l'on ajoute un moyen quelconque de repérage des galaxies au moyen de trois coordonnées, on a bien construit localement un système de coordonnées de GAUSS dans lequel les géodésiques correspondantes sont les trajectoires des galaxies. On arrive bien à la vision locale de l'existence de l'espace contenant ces galaxies, existence s'écoulant dans le temps. Le postulat de WEYL suppose qu'on peut élargir cette vision à l'univers dans sa totalité.

5. Le principe cosmologique. - Il suppose que l'espace à 3 dimensions, correspondant à l'hypersurface S des coordonnées de GAUSS, dont l'existence est assurée par le postulat de WEYL, est homogène et isotrope, quelle que soit l'époque considérée. Cette homogénéité et cette isotropie se réfère au contenu de matière de l'univers.

L'observation astronomique justifie cette homogénéité et cette isotropie. Il est clair que la répartition des étoiles dans le ciel n'est pas isotrope et suggère la structure de notre galaxie. Les étoiles se font plus rares dans des directions hors du plan de notre galaxie. Par contre, la répartition des galaxies dans le ciel n'indique pas de concentrations particulières dans certaines directions du ciel, hormis la répartition de ces galaxies en amas et superamas. Il est admis maintenant que l'univers a une structure alvéolaire, les superamas de galaxies étant répartis sur les parois de ces alvéoles (murs de galaxies). Ces alvéoles seraient la dernière structure existante dans la hiérarchie des structures. Au delà, l'univers peut être considéré comme homogène et isotrope. Le diamètre des alvéoles, de l'ordre de 300 millions d'années lumières, donne l'ordre de grandeur des dernières structures avant d'atteindre l'homogénéité.

Le rayonnement fossile à $2,7 K$, qui est le résidu de la boule de feu primordiale, est également extrêmement isotrope sans l'être totalement. et montre la très

grande homogénéité et isotropie de l'univers à ses débuts.

En fait, il y a également une anisotropie dipolaire de ce rayonnement indiquée par un décalage vers le bleu dans une direction (température maximale) et un décalage vers le rouge dans la direction opposée (température minimale). Cela est facilement interprété par le mouvement de la Terre par rapport au référentiel de GAUSS précédemment décrit, et correspondant à une fluctuation locale de vitesse. Les mesures indiquent une vitesse de 390 km/s de la Terre par rapport au référentiel de GAUSS.

Le Soleil tourne autour du centre de la Voie lactée à la vitesse de 220 km/s . La Terre parcourt son orbite à 30 km/s . Il en résulte que le centre de la Voie lactée a une vitesse de 600 km/s , dont 100 km/s vers la galaxie d'ANDROMÈDE. L'amas de la Vierge, dont notre galaxie est à la périphérie, est supposé se déplacer à 400 km/s vers les amas de galaxie de l'Hydre et du Centaure.

Mentionnons le résultat récent des mesures du satellite Cobe ayant trouvé les très faibles inhomogénéités du rayonnement fossile qui sont la trace des inhomogénéités à l'origine de la formation des amas de galaxies.

L'hypothèse d'homogénéité et d'isotropie à grande échelle de l'univers est liée à l'hypothèse qu'au début de son histoire son entropie est très faible :

L'homogénéité du gaz primordial après le Big Bang correspond à la faible entropie de l'univers à ce moment là. La progressive condensation gravitationnelle des faibles inhomogénéités en galaxies, étoiles, puis finalement trous noirs, correspond en effet à une augmentation de l'entropie de l'univers. L'attraction gravitationnelle, toujours attractive entre deux masses, à en effet cet aspect curieux qu'un ensemble de masses rassemblées a une entropie supérieure aux même masses dispersées à l'infini ; de l'énergie gravitationnelle s'est en effet nécessairement transformée en chaleur interne, ou en rayonnement de photons fortement entropique, lors du rassemblement.

Ainsi, on peut montrer que l'entropie d'un trou noir est énorme par rapport à l'entropie de la même masse dispersée en un nuage diffus d'hydrogène par exemple.

Supposer l'univers homogène à grande échelle correspond ainsi à lui assigner une faible entropie permettant aux structures complexes comme la vie d'apparaître.

Cela correspond à la possibilité de séparer le tenseur de courbure en une partie fonction uniquement du tenseur de RICCI et une autre partie appelée tenseur de WEYL. A cause de l'équation du champ, en espace vide seul le tenseur de WEYL est non nul. Il décrit les effets de marée au voisinage d'un astre et il lui

correspond une forte entropie (forte entropie d'un trou noir où les effets de marée sont importants). Le tenseur de RICCI est maximal dans le cas d'un tenseur d'impulsion-énergie uniforme. Il correspond à l'attraction gravitationnelle effective et il lui correspond une faible valeur de l'entropie (faible valeur de l'entropie du gaz d'hydrogène). On attribue ainsi directement une entropie à l'ensemble des gravitons constituant un champ gravitationnel.

Le principe cosmologique peut s'exprimer en disant que toutes les positions dans l'espace sont équivalentes. Sous cette forme, il est une extension à tout l'univers du *principe de Copernic*. Le premier pas fut en effet franchi par COPERNIC lorsqu'il se rendit compte que la Terre n'est qu'une planète parmi d'autres dans le système solaire. Un autre pas fut franchi lorsqu'on découvrit que le Soleil n'est qu'une étoile parmi toutes les étoiles de notre galaxie. Enfin, le dernier pas qui correspond au principe cosmologique consiste à dire que l'univers est rempli de galaxies analogues à la notre dont la répartition à grande échelle (> 300 millions d'années lumières) est homogène et isotrope. Aucune position n'est privilégiée au delà de cette échelle. En résumé, nous n'occupons pas une position privilégiée, et il n'existe pas de position privilégiée.

6. Utilisation du principe de MACH. - Le principe de MACH suppose que les propriétés d'inertie des corps sont complètement déterminées par la distribution de matière dans l'univers. La géométrie de l'espace-temps (déterminant les propriétés d'inertie), donc également celle de l'espace, sont donc déterminées de cette manière, en accord avec le principe de MACH et la description géométrique de l'interaction gravitationnelle par la Relativité générale.

En accord avec le principe de MACH, et compte tenu du principe cosmologique imposant la distribution de matière, nous demanderons donc que la géométrie de l'espace soit homogène et isotrope, comme cette répartition de matière.

7. La métrique de ROBERTSON-WALKER. - Reprenons l'expression (18,4) de l'élément linéaire. L'hypothèse d'homogénéité se traduit par le fait qu'il existe des coordonnées d'espace u^i telles que g_{ij} ne dépende pas de la position et ne dépende que du temps cosmique t , par l'intermédiaire d'un facteur d'échelle $f(t)$:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = 0$$

$$g_{ij} du^i du^j = f(t) h_{ij} du^i du^j \quad \text{avec} \quad h_{ij} = Cte$$

Notons que h n'a rien à voir avec la signification que ce symbole avait dans le chapitre sur l'approximation linéaire de l'équation du champ, ou dans le chapitre sur l'énergie gravitationnelle.

Le raisonnement fait au § 2 du chapitre 16 s'applique tel quel ici : il est donc possible d'utiliser des coordonnées polaires r, α, θ autour du point d'observation de façon à avoir :

$$h_{ij} du^i du^j = -B dr^2 - C r^2 d\alpha^2 - D r^2 \cos^2 \alpha d\theta^2$$

Le raisonnement fait dans le paragraphe cité et menant à $C = D$, ainsi que la redéfinition de la variable r qui permet de prendre $C = D = 1$, sont valables ici, compte tenu de l'isotropie de l'espace. On obtient donc :

$$g_{ij} du^i du^j = -f(t) (B(r) dr^2 + r^2 d\alpha^2 + r^2 \cos^2 \alpha d\theta^2)$$

Nous notons $B(r)$ pour rappeler que, compte tenu de l'isotropie, la fonction B ne dépend que de la variable r . L'homogénéité de la métrique implique que la courbure scalaire R de l'espace doit être constante.

Nous allons faire le calcul de R en prenant $f(t) = 1$. Une redéfinition de la variable r à l'instant t permet quelle que soit la situation d'obtenir cela.

Pour calculer cette courbure scalaire de l'espace, nous utilisons l'élément linéaire (12,26) avec (12,28), en tenant compte de (18,3).

Nous pouvons alors utiliser les résultats du § 4 du chapitre 16 pour le calcul du tenseur de RICCI. les symboles de CHRISTOFFEL ne faisant pas intervenir la variable t de ce dernier paragraphe sont identiques à ceux que nous obtenons ici avec l'expression de $d\sigma^2$. Le changement de signe du tenseur métrique ne change pas les symboles de CHRISTOFFEL qui font intervenir les produits du tenseur métrique avec ses dérivées partielles. Il en résulte que $R_{rr}, R_{\alpha\alpha}, R_{\theta\theta}$ sont donnés par les expressions trouvées au § 4 en enlevant les termes contenant A . On obtient :

$$R_{rr} = -\frac{B'}{rB} \quad ; \quad R_{\alpha\alpha} = -1 + \frac{1}{B} - \frac{rB'}{2B^2} \quad ; \quad R_{\theta\theta} = \cos^2 \alpha R_{\alpha\alpha}$$

La courbure scalaire R de l'espace à trois dimensions vaut :

$$R = \gamma^{rr} R_{rr} + \gamma^{\alpha\alpha} R_{\alpha\alpha} + \gamma^{\theta\theta} R_{\theta\theta} = \frac{1}{B} \left(-\frac{B'}{rB} \right) + \frac{2}{r^2} \left(-1 + \frac{1}{B} - \frac{rB'}{2B^2} \right) = -\frac{2B'}{rB^2} + \frac{2}{r^2 B} - \frac{2}{r^2}$$

Or :

$$\frac{2}{r^2} \left(1 - \left(\frac{r}{B} \right)' \right) = \frac{2}{r^2} - \frac{2}{r^2} \left(\frac{1}{B} - \frac{rB'}{B^2} \right) = \frac{2}{r^2} - \frac{2}{r^2 B} + \frac{2rB'}{r^2 B^2}$$

$$R = -\frac{2}{r^2} \left(1 - \left(\frac{r}{B} \right)' \right) \quad ; \quad \left(\frac{r}{B} \right)' = 1 + \frac{Rr^2}{2}$$

A étant une constante, $\frac{r}{B} = r + \frac{Rr^3}{6} + A$ et :

$$B = \frac{1}{1 + \frac{Rr^2}{6} + \frac{A}{r}}$$

B doit être continu pour $r = 0$, donc $A = 0$.

$$d\sigma^2 = \frac{1}{1 + \frac{Rr^2}{6}} dr^2 + r^2 d\alpha^2 + r^2 \cos^2\alpha d\theta^2$$

Pour $R \neq 0$, changeons de nouveau de variable r et posons :

$$r_1^2 = \frac{|R|}{6} r^2$$

$$r_1 dr_1 = \frac{|R|}{6} r dr \quad ; \quad r_1^2 dr_1^2 = \left(\frac{|R|}{6}\right)^2 r^2 dr^2 \quad ; \quad dr^2 = \frac{6}{|R|} dr_1^2$$

Avec : $k = -\frac{R}{|R|}$

$$d\sigma^2 = \frac{6}{|R|} \left(\frac{dr_1^2}{1 - k r_1^2} + r_1^2 d\alpha^2 + r_1^2 \cos^2\alpha d\theta^2 \right)$$

Cet élément linéaire est bien de la forme (18,5) ($d\sigma^2 = -g_{ij} du^i du^j$) avec $f(t) = \frac{6}{|R(t)|}$. On voit que c'est la courbure scalaire de l'espace qui variera en fonction du temps. Supprimant l'indice 1 pour la variable r , et posant :

$S^2(t) = \frac{6}{|R(t)|}$, il vient :

$$ds^2 = C^2 dt^2 - S^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - k r^2} + r^2 d\alpha^2 + r^2 \cos^2\alpha d\theta^2 \right) \quad (18,6)$$

Avec $k = 0$ ou ± 1 . La courbure scalaire vaut alors :

$$R = -\frac{6k}{S^2} \quad (18,7)$$

C'est la *métrique de Robertson-Walker*, obtenue uniquement avec des considérations de symétrie, et sans tenir compte de l'équation du champ. N'importe quel point de l'espace peut bien sûr être choisi comme origine de la coordonnée r , et la métrique est toujours de la forme (18,6).

Une galaxie donnée a des coordonnées r , α , θ fixées, en accord avec le fait qu'on a des coordonnées de GAUSS. Sa distance à la galaxie origine varie par l'intermédiaire du facteur $S(t)$, donc en liaison avec la courbure scalaire de l'espace.

$S(t)$ établit l'échelle de la géométrie de l'espace et est appelé le *facteur d'échelle de l'univers* ou : *facteur d'échelle cosmique*.

Nous verrons au paragraphe 10 que S est le rayon de l'espace à trois dimensions dans le cas où, la courbure étant positive, il est une hypersphère. S sera pris homogène à une longueur et k et r seront pris sans dimensions (voir formule (18,8) et (18,10)).

Construisons un triangle dans l'espace vide au moyen de ficelles tendues de longueurs fixées. Si $k \neq 0$, la somme des angles de ce triangle est différente de 180° et varie avec le temps. Les propriétés géométriques de l'espace vide varient donc en liaison avec la distance de deux galaxies données. On peut dire que l'espace emporte dans sa déformation les galaxies. Ainsi, on peut prendre l'image d'un ballon de baudruche que l'on gonfle et sur lequel on a peint des points. Au fur et à mesure que la membrane se tend, les points s'éloignent les uns des autres. Il ne faut pas cependant prendre cette image au pied de la lettre, car contrairement à la membrane du ballon, l'espace vide ne donne pas de référence d'immobilité. Si deux galaxies s'éloignent l'une de l'autre, il faut dire effectivement qu'elles sont en mouvement l'une par rapport à l'autre, sans parler d'un mouvement de l'espace qui emporterait les galaxies. Un tel mouvement n'existe pas. Mais effectivement, en relation avec la distance variable de ces deux galaxies, les propriétés géométriques de l'espace vide varient. D'ailleurs, on peut renverser l'image, et faire jouer un rôle moteur aux galaxies plutôt qu'à l'espace. On peut dire que ce sont les galaxies qui créent la structure de l'espace, en accord avec le principe de MACH. Le mouvement des galaxies les unes par rapport aux autres entraîne alors une modification de la structure de l'espace vide. La propriété fondamentale est que la géométrie de l'espace et son contenu de matière, sont inextricablement reliés.

Ayant ainsi obtenu la forme générale de la métrique, nous allons dans les paragraphes 8 à 15 en étudier les différentes conséquences. À partir du paragraphe 16 nous tiendrons compte en plus de l'équation du champ de la Relativité générale de façon à avoir la connaissance précise de la fonction $S(t)$.

8. Étude de la géométrie de l'espace pour $k = 0$: le modèle d'EINSTEIN-DE SITTER. - La courbure scalaire est nulle. En posant :

$$\begin{cases} x = S r \cos \alpha \cos \theta \\ y = S r \cos \alpha \sin \theta \\ z = S r \sin \alpha \end{cases} \quad (18, 8)$$

S étant constant, on obtient : $d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$.

Nous avons la structure d'espace affine sur un espace euclidien à 3 dimensions. À grande échelle, la géométrie usuelle s'applique. (18,6) donne :

$$ds^2 = C^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

L'espace-temps est globalement de MINKOWSKI, et la Relativité restreinte s'applique partout à grande échelle.

9. Étude du cas $k = -1$. - La courbure scalaire est non nulle. L'espace n'est pas plat. Nous voyons sur l'élément linéaire qu'il n'y a pas de limitations pour la variable r qui peut aller à l'infini. L'espace peut donc être infini.

Cependant, il n'est pas exclu qu'il soit fini, des valeurs différentes de r correspondant en fait au même point physique. Donnons une image pour nous rendre compte de cette possibilité :

Le plan euclidien est plat et doublement infini. Replions le sur lui-même de façon à former un cylindre de rayon R (fig. 18.3).

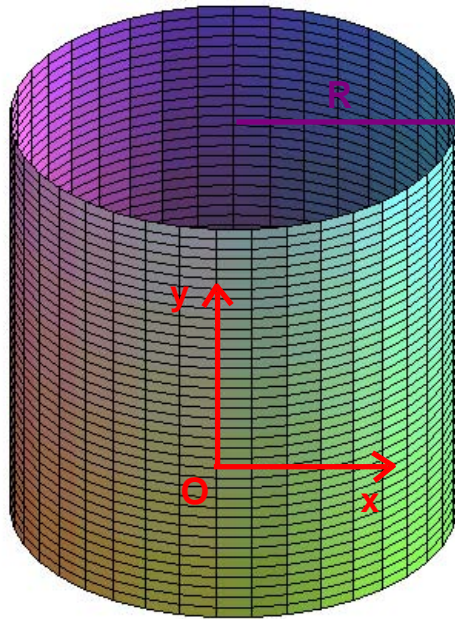


Fig. 18.3

Le repère xOy est tracé sur la surface du cylindre.

Les points d'abscisse x et $x + 2\pi R$ sont identiques. L'espace n'est plus qu'une fois infini. L'espace obtenu est pourtant encore plat du point de vue de la métrique. Il est même possible, bien qu'on ne puisse pas l'immerger dans l'espace à trois dimensions, d'imaginer un espace euclidien plat fini, en identifiant également les points d'ordonnées y et $y + n\lambda$, λ étant une constante et n un nombre entier variable. Un tel espace correspond à ce qui se produit sur l'écran de certains jeux vidéos où un objet disparaissant à droite (ou en haut) de l'écran réapparaît instantanément à gauche (en bas) premier dessin sur la figure 18.4.

On voit que dans un tel cas, une galaxie donnée peut être vue dans plusieurs directions différentes. Sur le deuxième dessin de la figure 18.4, la répétition est faite pour une seule dimension, comme dans le cas du cylindre précédemment mentionné.

On peut également visualiser ce phénomène comme un univers constitué d'un motif spatial périodique, la corrélation (à distance!) étant totale d'une période à l'autre, dont en fait l'étendue réelle, en ce qui concerne l'information de structure, est donc constituée d'une seule période. Même les êtres vivants seraient totalement corrélés et auraient la conscience d'une existence unique.



Fig. 18.4

Après cette digression, notons que pour cette valeur de k , un cercle de circonférence $L = 2\pi rS$ a pour rayon :

$$r_c = S \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1+r^2}} < rS$$

Nous avons donc : $L > 2\pi r_c$. Ceci est la caractéristique d'un espace à courbure négative. La courbure scalaire est en effet positive, et nous avons vu dans l'étude des variétés différentiables que ce que nous appelons la courbure de l'espace est opposée à la courbure scalaire, donc ici négative.

$$\mathcal{R} = -R = -\frac{6}{S^2} \quad (18,9)$$

Notons que le signe de k donne le signe de la courbure de l'espace.

10. Étude pour $k = +1$. - L'espace est à courbure positive. $L < 2\pi r_c$. La géométrie est du même type que celle de la surface d'une sphère de l'espace à 3 dimensions où les cercles ont effectivement une circonférence inférieure à 2π multiplié par la longueur de leur rayon (fig. 18.5).

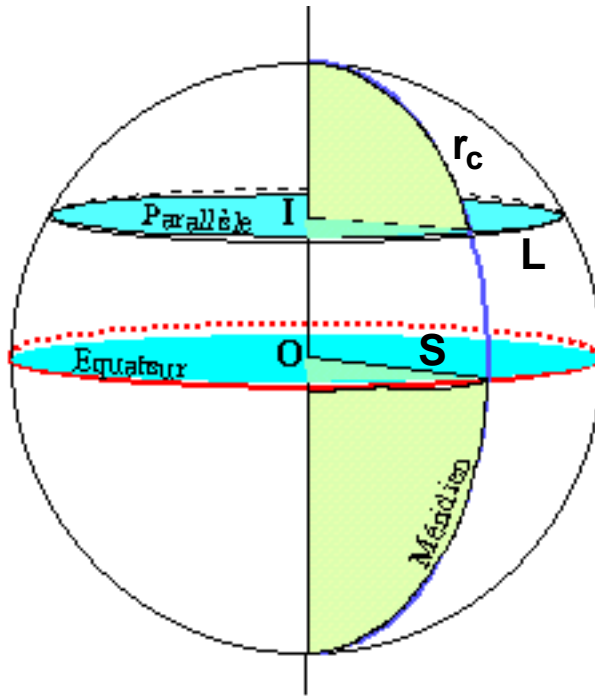


Fig. 18.5

Le grand cercle équatorial a pour circonférence $L = 2\pi S$, S étant le rayon de la sphère. Le rayon du cercle sur la sphère est :

$$r_c = \frac{1}{4} (2\pi S) = \frac{\pi}{2} S$$

$$L = 4r_c < 2\pi r_c$$

Le dénominateur dans le facteur de dr^2 s'annule pour $r = 1$. S'agit-il d'un mauvais choix des coordonnées où d'une limitation de l'espace lui-même? Posons :

$$r = \cos \psi \quad (18, 10)$$

$$\frac{1}{1-r^2} = \frac{1}{1-\cos^2\psi} = \frac{1}{\sin^2\psi} \quad ; \quad dr^2 = \sin^2\psi \, d\psi^2$$

$$d\sigma^2 = S^2 (d\psi^2 + \cos^2\psi \, d\alpha^2 + \cos^2\psi \cos^2\alpha \, d\theta^2) \quad (18, 11)$$

Posons :

$$\begin{cases} x = S \cos \psi \cos \alpha \cos \theta \\ y = S \cos \psi \cos \alpha \sin \theta \\ z = S \sin \psi \end{cases} \quad (18, 12)$$

Il est facile de vérifier que, S étant constant :

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2$$

x, y, z, w peuvent toutes varier de $-S$ à S . De plus : $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = S^2$.

L'espace à trois dimensions a donc la structure de la surface d'une hypersphère dans un espace euclidien à 4 dimensions. Les coordonnées S, ψ, α, θ sont les coordonnées polaires de l'espace euclidien à 4 dimensions. Il est facile de trouver le domaine de variation des coordonnées ψ, α, θ :

Tout d'abord, ψ varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$ de façon à ce que w varie de $-S$ à $+S$. w ainsi fixé, nous avons une section de l'hypersphère par un hyperplan. Nous retrouvons une sphère ordinaire de rayon $S \cos \psi = S r$. Nous savons alors que α varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$ et θ de 0 à 2π .

$r = 0$ correspond à $\psi = \frac{\pi}{2}$ par exemple. Nous avons le pôle nord. $r = 1$ correspond à $\psi = 0$, c'est l'équateur, et nous voyons que ψ peut aller jusqu'à $-\frac{\pi}{2}$ donnant le même domaine de variation pour r alors que nous avons d'autres points de l'espace !

Nous avons donc un mauvais choix de coordonnées. Avec la coordonnée ψ , il n'y a pas de singularités. La coordonnée r est adaptée uniquement pour des points qui ne sont pas situés au delà de l'équateur si nous nous considérons comme au pôle.

La formule (18,6) nous montre, par les coefficients de $d\alpha^2$ et de $d\theta^2$, que la coordonnée r est telle que la surface d'une sphère centrée sur l'origine est égale à $4\pi S^2 r^2$. Pour le rayon maximal d'une telle sphère, donc pour la distance maximale à nous, la surface vaut 0 ; on a le point situé exactement aux antipodes. C'est le point, qui est unique, le plus éloigné de nous dans l'espace. Au delà de la distance qui correspond à l'équateur par rapport à nous, la coordonnée r décroît en effet pour s'annuler aux antipodes.

Nous voyons que l'espace, surface de l'hypersphère de l'espace euclidien à 4 dimensions, est dans ce cas fini est sans bornes. Nous allons maintenant calculer son volume.

11. Volume de l'espace pour $\mathbf{k} = +1$. - Nous utilisons les coordonnées polaires de l'espace à 4 dimensions. Posons $\gamma = \det \gamma^{ij}$; (18,11) donne :

$$\sqrt{\gamma} = \sqrt{S^2 S^2 \cos^2 \psi S^2 \cos^2 \psi \cos^2 \alpha} = S^3 \cos^2 \psi |\cos \alpha|$$

(10,18) donne :

$$d\mathcal{V} = \sqrt{\gamma} d\psi d\alpha d\theta$$

$$\mathcal{V} = S^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^2 \psi d\psi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos \alpha d\alpha \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$\mathcal{V} = S^3 \left(\frac{\pi}{2} \right) (2) (2\pi)$$

$$\mathcal{V} = 2\pi^2 S^3 \quad (18, 13)$$

La plus grande distance possible dans un tel univers, est celle pour aller aux antipodes. Fixons α et θ à 0, ψ varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$ et :

$$L = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} S d\psi = \pi S \quad (18, 14)$$

La formule est la même que pour une sphère ordinaire. On a une demi-circonférence.

12. La loi de HUBBLE. - Nous allons maintenant déduire quelques conséquences cosmologiques de la métrique de ROBERTSON-WALKER indépendamment de la forme explicite de la fonction $S(t)$. Considérons une galaxie de coordonnées r_1 , $\alpha = \theta = 0$. Sa distance à la galaxie origine à l'instant t est :

$$d(t) = S(t) \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = S(t) f(r_1)$$

Sa vitesse par rapport à la galaxie origine vaut alors :

$$v = \dot{d} = \dot{S} f(r_1) = \frac{\dot{S}}{S} d = H d$$

$$v = H d \quad ; \quad \text{avec} \quad H = \frac{\dot{S}}{S} \quad (18, 15)$$

H est la *constante de HUBBLE*. La loi précédente nous montre que la vitesse d'éloignement (ou de rapprochement) des galaxies est proportionnelle à leur distance. Cette loi est une loi rigoureuse, quelle que soit la distance, cette distance correspondant à la métrique de l'espace, au temps cosmique t .

Pour d suffisamment grand, il est donc possible d'avoir $v > C$. Il n'y a pas là de contradiction. La Relativité restreinte affirme que deux référentiels galiléens ne peuvent pas aller à une vitesse supérieure à celle de la lumière l'un par rapport à l'autre. En Relativité générale, il n'existe que des référentiels galiléens locaux. Cette interdiction n'est donc vraie que localement pour le mouvement l'une par rapport à l'autre de deux particules voisines. D'ailleurs, les horloges étalons mesurant le temps cosmique considérées ici, sont à des distances variables avec le temps les unes des autres, tandis que les horloges d'un référentiel galiléen sont à des distances fixes les unes des autres.

Ce que nous venons de dire nous fait comprendre qu'il n'y a pas de contradiction avec la Relativité restreinte lorsque l'on considère les périodes d'inflation juste après le Big Bang pendant lesquelles l'expansion de l'univers était prodigieusement rapide.

En astronomie, il y a chevauchement entre les différentes méthodes de mesure des distances, ce qui permet de les ajuster les unes aux autres en les exprimant en fonction de la distance étalon de l'espace, d .

Lorsque la distance est faible, la formule de l'effet DOPPLER relativiste s'applique, la Relativité restreinte étant valable. De plus, les vitesses sont faibles et on peut écrire (voir le début du § 17 du chapitre 16 pour la définition de z) :

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{C} = \frac{Hd}{C} \quad (18, 16)$$

$$z = \frac{\dot{S}}{S} \frac{d}{C} \quad (18, 17)$$

L'expérience confirme l'existence d'un décalage vers le rouge proportionnel à la distance, nous montrant que l'univers est en expansion. C'est HUBBLE en 1929 qui le premier étudia systématiquement le décalage vers le rouge des galaxies lointaines et établit la loi (18,16). Actuellement, la valeur admise de H est voisine de 70 km/(s Mpc) (voir le § 34 pour la définition d'un parsec).

13. Temps de parcours de la lumière, d'un point à un autre. - L'équation du mouvement d'une crête d'onde est :

$$0 = ds^2 = C^2 dt^2 - S^2 \frac{dr^2}{1 - kr^2}$$

$$\frac{C dt}{S(t)} = \pm \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad (18, 18)$$

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{C}{S(t)} dt = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = f(r_1) \quad (18, 19)$$

Il s'agit d'une onde radiale, partant de la distance r_1 au temps cosmique t_1 , et arrivant à l'origine au temps cosmique $t_0 > t_1$.

On voit sur la formule précédente, que si $S(t)$ est constant, le temps de parcours de la lumière est obtenu simplement par la formule :

$$C(t_0 - t_1) = d$$

D'une manière générale, la lumière va partout à la vitesse C mesurée avec le temps cosmique t qui est le temps propre local et des longueurs étalons.

Ainsi, une distance de 4 milliards d'années lumières par exemple veut dire que la lumière a voyagé pendant 4 milliards d'années :

$$t_1 - t_0 = 4 \text{ Ma.l.} \quad ; \quad t_1 - t_0 = \int_{t(r_0)}^{t(r_1)} dt$$

La formule (18,18) peut s'interpréter avec ce que nous venons de dire :

$$C = \frac{d\sigma}{dt} = \frac{S}{dt} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}$$

Si $S(t)$ croît par exemple, l'espace étant plus petit au début du parcours, la lumière franchit plus rapidement les bornes correspondant à des variations égales de la fonction $f(r)$. Ainsi la vitesse locale de la lumière est toujours C ; mais au début de sa progression, elle avance dans un univers plus petit donc en apparence plus rapidement. On ferait un raisonnement analogue si $S(t)$ décroît.

14. Formule générale pour le décalage vers le rouge. - Nous allons écrire la formule donnant le décalage vers le rouge pour des distances quelconques. Considérons une crête d'onde partant radialement de la coordonnée r_1 à l'instant t_1 et arrivant à l'origine à l'instant t_0 . La crête d'onde suivante part à l'instant $t_1 + \delta t_1$ et arrive à l'instant $t_0 + \delta t_0$. Nous avons :

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{C}{S(t)} dt = f(r_1) = \int_{t_0 + \delta t_0}^{t_1 + \delta t_1} \frac{C}{S(t)} dt$$

En soustrayant les deux égalités ci-dessus, et en notant que $S(t)$ ne varie pratiquement pas pendant le temps d'une oscillation d'une onde lumineuse, on obtient :

$$\begin{aligned} C \frac{\delta t_0}{S(t_0)} &= C \frac{\delta t_1}{S(t_1)} \\ \frac{\nu_0}{\nu_1} &= \frac{\lambda_1}{\lambda_0} = \frac{\delta t_1}{\delta t_0} = \frac{S(t_1)}{S(t_0)} \\ z &= \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{S(t_0)}{S(t_1)} - 1 > 0 \end{aligned} \tag{18, 20}$$

$$\text{Si :} \quad S(t_0) > S(t_1)$$

Ainsi, on a bien un décalage vers le rouge avec un univers en expansion. Montrons que la formule générale redonne bien (18,17) dans le cas de distances faibles :

$$z = \frac{S(t_0) - S(t_1)}{S(t_1)} = \frac{\dot{S}(t_0 - t_1)}{S(t_1)} = \frac{\dot{S}d}{SC} = H \frac{d}{c}$$

La Relativité restreinte s'applique partout localement. La formule précédente s'applique donc tout le long du chemin sur des morceaux de distances faibles. On obtient alors la formule générale du décalage vers le rouge par intégration des décalages élémentaires tout le long du chemin. On peut donc bien dire intuitivement que le décalage vers le rouge est dû à l'effet DOPPLER lié à la vitesse d'éloignement des galaxies les unes des autres. Cependant Il ne faut pas appliquer cette formule globalement. Il faut tenir compte du cheminement progressif de la lumière dans un univers de taille et d'expansion variable tout le long du trajet.

En Relativité restreinte, pour une vitesse quelconque, l'effet DOPPLER est donné par la formule (exercice 4.4) :

$$z = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{C}}{1 - \frac{v}{C}}} - 1$$

On peut donc associer au décalage vers le rouge une vitesse fictive, n'ayant rien à voir avec la valeur Hd , qui donnerait en Relativité restreinte la même valeur de z .

En conclusion des paragraphes 12, 13, 14, l'éloignement d'un objet astronomique peut être mesuré par la distance étalon d au temps cosmique t . Il peut être mesuré par le temps qu'à mis la lumière issue de l'objet pour nous parvenir. Cette durée de parcourt de la lumière est égale à la différence entre le temps cosmique t_1 au moment de l'émission et le temps cosmique t_0 au moment de la réception. En effet, partout où la lumière passe, son temps de parcourt sur des petites distances étalons est mesuré au moyen d'horloges étalons fixées par rapport aux galaxies locales et indiquant le temps cosmique t . Si l'on multiplie ce temps par C , on a la distance, appelée d_c , effectivement parcourue par cette lumière compte tenu du fait que l'univers est en expansion pendant la progression de la lumière. Enfin, l'éloignement de l'objet peut être repéré par son décalage vers le rouge z .

15. Autre interprétation du décalage vers le rouge. - Nous allons donner une autre interprétation intuitive de l'équation :

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{S(t_0)}{S(t_1)}$$

Prenons l'hypothèse $k = +1$ d'un univers fini. Nous pouvons envisager par la pensée une onde monochromatique qui fait perpétuellement le tour de l'univers. A chaque fois qu'elle passe à un endroit donné, au temps cosmique t , supposons que :

$$\lambda \propto S(t)$$

Si nous superposons cette onde avec une onde de même fréquence suivant exactement la même trajectoire, mais en sens inverse, nous obtenons une onde stationnaire. Au fur et à mesure que l'univers s'étend, sa longueur d'onde croît proportionnellement à cette extension. Cela veut dire que le nombre de longueurs d'ondes n est constant (fig. 18.6) et :

$$n = \frac{L}{\lambda} \propto \frac{S}{\lambda} = Cte$$

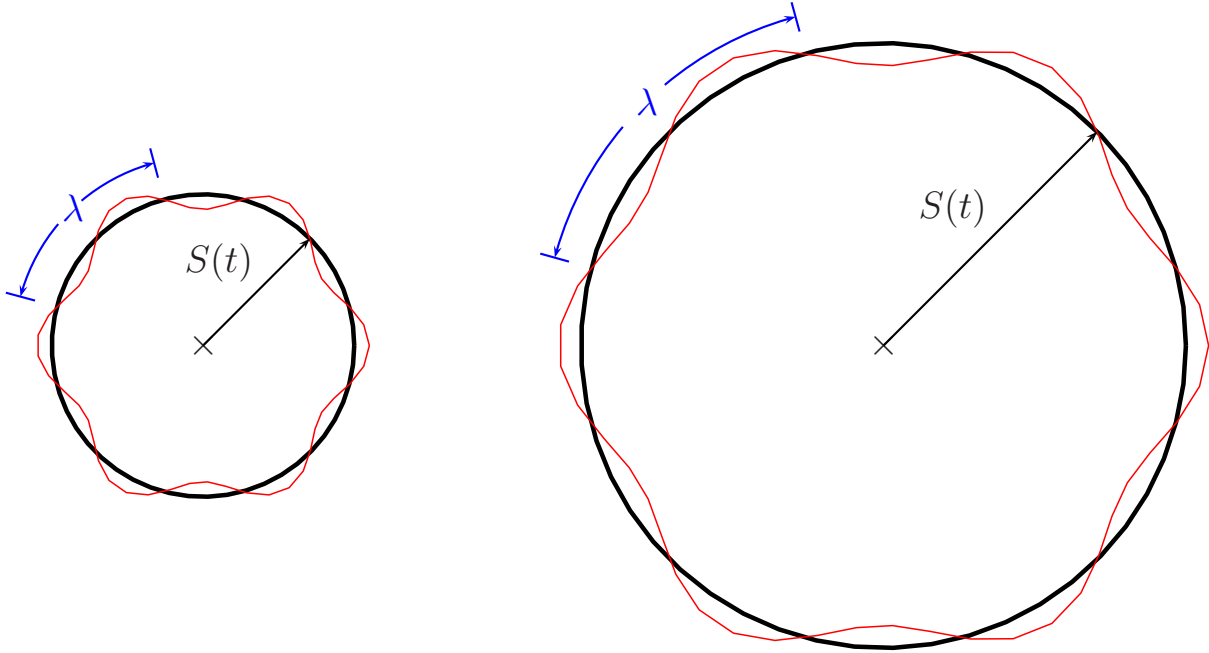
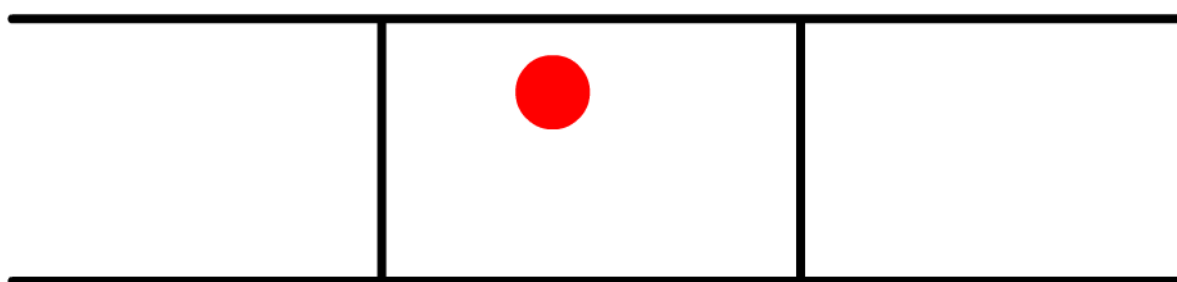
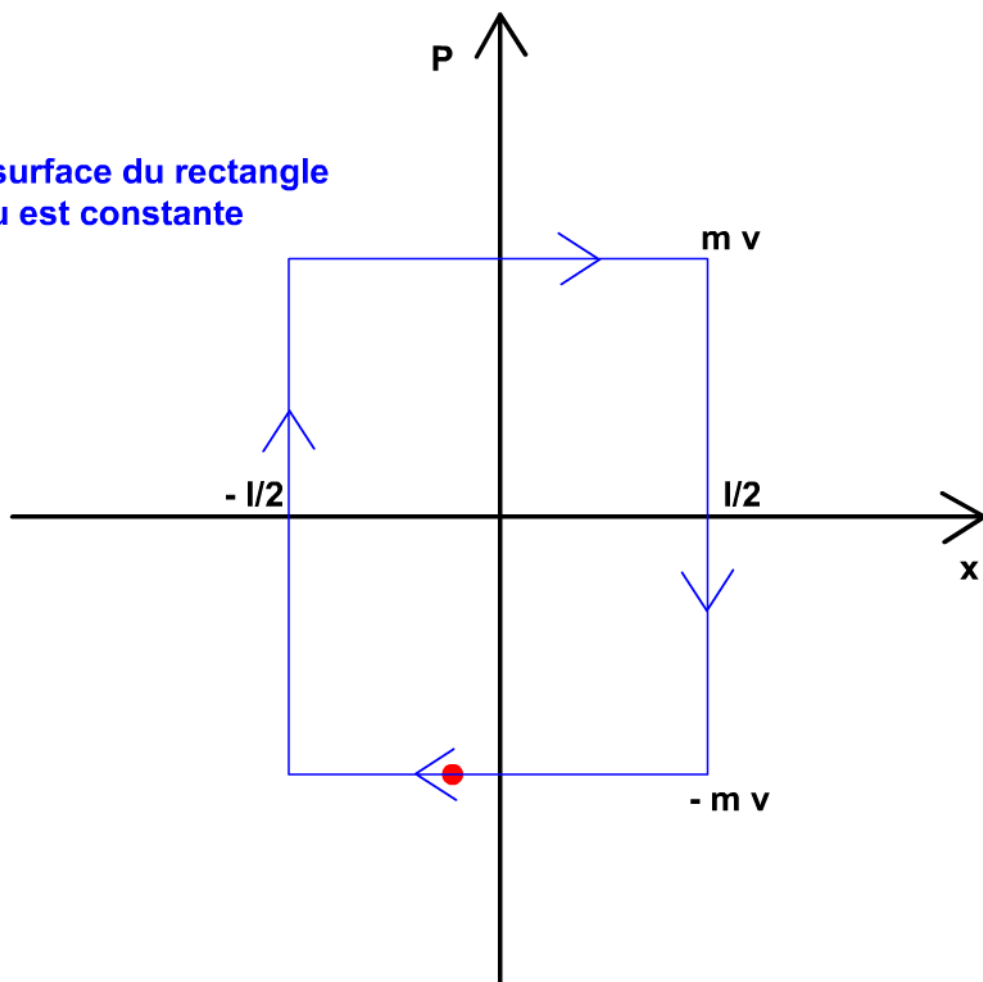


Fig. 18.6

Le nombre de longueurs d'ondes est ce qu'on appelle un *invariant adiabatique* (voir exercice 1.1). Une situation analogue est celle d'une onde lumineuse stationnaire entre deux parois parfaitement réfléchissantes. Si l'on écarte lentement les parois (d'une manière adiabatique), la longueur d'onde croît proportionnellement à l'espacement des parois : $\lambda \propto l$.

Cela est également vrai en Mécanique quantique classique pour une particule matérielle effectuant des rebonds parfaitement élastiques sur les parois d'une boîte (fig. 18.7).

La surface du rectangle bleu est constante



Curseur pour faire varier la longueur du tube

Fig. 18.7

$$\lambda = \frac{h}{P} = \frac{h}{mv} \propto l \quad \Rightarrow \quad vl = Cte$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{Cte}{l^2}$$

On sait que les états d'une telle particule sont en effet quantifiés, l'énergie étant donnée par la formule :

$$E = \frac{n^2 h^2}{8ml^2}$$

On démontre effectivement en Mécanique quantique (théorème adiabatique), que pour des variations lentes (adiabatiques) de l'hamiltonien le système reste dans l'état quantique défini par le nombre quantique n et $E \propto \frac{1}{l^2}$.

L'explication classique est que, quand la longueur du tube diminue lentement, à chaque fois que la particule heurte la paroi du tube, cette dernière vient à la rencontre de la particule et fait comme un smash au tennis, et augmente la vitesse de la particule.

La théorie des invariants adiabatiques se développe également en Mécanique newtonienne (cf exercice 1.1) pour les mouvements périodiques. La formule générale pour l'invariant adiabatique I est :

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint P dq$$

P est le moment conjugué de la variable q . Ici, $q = x$ et $P = mv$. $I = \frac{mvl}{\pi}$ (fig. 18.7).

Remarquons d'ailleurs que la relation $\lambda \propto S(t)$ est également vraie pour l'onde $\lambda = \frac{h}{P}$ de DE BROGLIE. La vitesse v d'une particule libre décroît donc, ce qui est évident puisqu'elle rattrape sans arrêt des points qui la fuient. En écrivant $v(x + dx) = v(x) - H dx$ et $\lambda = \frac{h}{mv}$, on peut d'ailleurs retrouver $\lambda(t) \propto S(t)$ (idem avec l'effet DOPPLER local pour la lumière).

Les propriétés thermodynamiques d'un gaz résultent de l'interprétation statistique du mouvement de ses particules constituantes. Il résulte de l'existence des invariants adiabatiques la propriété que les transformations adiabatiques laissent l'entropie constante. En effet, $S = k \ln \Omega$, Ω étant le nombre d'états quantiques réalisant la configuration macroscopique. Ω est bien constant dans une transformation adiabatique, puisque un état microscopique réalisant cette configuration reste invariant lors de la transformation, les nombres quantiques le caractérisant étant constants.

On peut donc interpréter le décalage vers le rouge en disant que lors de sa progression, l'onde se dilate au même rythme que l'univers.

Utilisons maintenant l'équation $E = h\nu$. N étant le nombre de photons, la densité volumique d'énergie ρC^2 du rayonnement vérifie :

$$\rho C^2 = \frac{Nh\nu}{\mathcal{V}} \propto \frac{Nh\nu}{S^3} \propto S^{-4}$$

Alors que la densité de matière vérifie : $\rho \propto S^{-3}$.

Avant d'aller plus avant dans les conséquences astronomiques des modèles d'univers, nous voulons la forme explicite de la fonction $S(t)$. Celle-ci est obtenue en écrivant les équations de la Relativité générale : équation du champ et équation dynamique. Les modèles cosmologiques où $S(t)$ est obtenu de cette façon sont appelés les *modèles de FRIEDMANN*.

16. Calcul des composantes du tenseur d'impulsion-énergie. - Dans toute la suite nous utiliserons t comme variable temporelle, ainsi les dérivées temporelles seront bien des dérivées par rapport à t sans introduire des puissances de C . Reprenons la formule (17,1) :

$$T_{\alpha\beta} = -pg_{\alpha\beta} + (\rho C^2 + p) U_\alpha U_\beta \quad (18, 21)$$

Pour une galaxie, les coordonnées de position sont fixées et $U^i = 0$, donc :

$$g_{\alpha\beta} U^\alpha U^\beta = g_{tt} (U^t)^2 = 1 \quad ; \quad g_{tt} = C^2 \quad \Rightarrow \quad U^t = \frac{1}{C} \quad ; \quad U_t = g_{tt} U^t = C$$

Avec $\alpha, \beta = t, r, \alpha, \theta$, nous avons alors :

$$T_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \rho C^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{pS^2}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & pS^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & pS^2 r^2 \cos^2 \alpha \end{pmatrix} ; \quad T^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p \frac{1-kr^2}{S^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{p}{r^2 S^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{p}{r^2 S^2 \cos^2 \alpha} \end{pmatrix}$$

17. Étude des équations. - Nous allons voir qu'il est plus simple d'utiliser l'équation du champ sous sa forme originale (13,17). Il nous sera en effet facile de calculer la courbure scalaire R .

À cause de l'isotropie, les composantes de l'équation du champ en $r - r$, $\alpha - \alpha$, $\theta - \theta$ sont proportionnelles et ne contribuent que pour une équation. Avec l'équation en $t - t$ et l'équation dynamique (dont seule la composante de temps est non triviale), nous avons trois équations. Mais nous savons que ces trois

équations ne sont pas indépendantes, l'identité de RICCI faisant que l'équation dynamique est contenue dans l'équation du champ. Ici, nous écrirons donc la composante en $t - t$ de l'équation du champ et l'équation dynamique.

18. Calcul des symboles de CHRISTOFFEL. - Nous noterons avec le symbole \sim au dessus, toutes les quantités (tenseur métrique, tenseur de courbure, tenseur de RICCI, courbure scalaire, symboles de CHRISTOFFEL) se référant à l'espace seul.

Nous avons donc :

$$ds^2 = C^2 dt^2 - \tilde{g}_{ij} du^i du^j$$

Les symboles de CHRISTOFFELS non nuls sont :

$$\Gamma_{ij}^t = \frac{1}{2C^2} (\tilde{g}_{ij,t}) = \frac{\dot{S}S}{C^2} \left(\frac{\tilde{g}_{ij}}{S^2} \right) = \frac{\dot{S}}{C^2 S} \tilde{g}_{ij}$$

$$\Gamma_{tj}^i = \frac{1}{2} g^{ii} (g_{ij,t}) = \frac{\dot{S}}{S} \delta^i_j$$

$$\Gamma_{jk}^i = \tilde{\Gamma}_{jk}^i$$

19. Calcul de \mathbf{R}_{tt} . - Reprenons l'expression de R_{tt} (§ 4 du chapitre 16) :

$$R_{tt} = \frac{\partial \Gamma_{t\lambda}^\lambda}{\partial t} - \frac{\partial \Gamma_{tt}^\lambda}{\partial \lambda} + \Gamma_{t\lambda}^\mu \Gamma_{\mu t}^\lambda - \Gamma_{tt}^\mu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda$$

$$\frac{\partial \Gamma_{t\lambda}^\lambda}{\partial t} = \frac{3\ddot{S}}{S} - \frac{3\dot{S}^2}{S^2}$$

$$\Gamma_{tj}^i \Gamma_{ti}^j = \frac{3\dot{S}^2}{S^2}$$

$$R_{tt} = \frac{3\ddot{S}}{S}$$

20. Calcul de \mathbf{R}_{ij} . - Rappelons l'expression de R_{ij} (équation (16,4)) :

$$R_{ij} = \frac{\partial \Gamma_{i\lambda}^\lambda}{\partial j} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^\lambda}{\partial \lambda} + \Gamma_{i\lambda}^\mu \Gamma_{\mu j}^\lambda - \Gamma_{ij}^\mu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda$$

Nous utilisons la notation abrégée $\frac{\partial}{\partial u^j} = \frac{\partial}{\partial j}$.

$$R_{ij} = \tilde{R}_{ij} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^t}{\partial t} + \Gamma_{it}^k \Gamma_{kj}^t + \Gamma_{il}^t \Gamma_{tj}^l - \Gamma_{ij}^t \Gamma_{tl}^l$$

Remarquons que (déjà utilisé au § 18) :

$$\frac{\partial \tilde{g}_{ij}}{\partial t} = 2S \dot{S} \frac{g_{ij}}{S^2} = \frac{2\dot{S}}{S} \tilde{g}_{ij}$$

$$R_{ij} = \tilde{R}_{ij} - \left(\ddot{S}S + \dot{S}^2 \right) \left(\frac{\tilde{g}_{ij}}{C^2 S^2} \right) + \frac{\dot{S}}{S} \frac{\dot{S}}{C^2 S} \tilde{g}_{ij} + \frac{\dot{S}}{C^2 S} \tilde{g}_{il} \frac{\dot{S}}{S} \delta^l_j - \frac{\dot{S}}{C^2 S} \tilde{g}_{ij} \frac{3\dot{S}}{S}$$

$$R_{ij} = \tilde{R}_{ij} - \tilde{g}_{ij} \left(\frac{\ddot{S}}{C^2 S} + \frac{2\dot{S}^2}{C^2 S^2} \right)$$

21. Calcul de la courbure scalaire. - Nous avons :

$$R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = g^{ii} R_{ii} + g^{tt} R_{tt}$$

$$g^{ii} R_{ii} = -\tilde{g}^{ii} R_{ii} = -\tilde{g}^{ii} \tilde{R}_{ii} + \tilde{g}^{ii} \tilde{g}_{ii} \left(\frac{\ddot{S}}{C^2 S} + \frac{2\dot{S}^2}{C^2 S^2} \right)$$

$$\tilde{g}^{ii} \tilde{R}_{ii} = \tilde{R} = -\frac{6k}{S^2} \quad ; \quad \tilde{g}^{ii} \tilde{g}_{ii} = 3$$

$$R = \frac{6k}{S^2} + \frac{3\ddot{S}}{C^2 S} + 3 \frac{\ddot{S}}{C^2 S} + \frac{6\dot{S}^2}{C^2 S^2}$$

22. Calcul de la composante de temps de l'équation d'EINSTEIN. -

Elle s'écrit :

$$R_{tt} - \frac{1}{2} g_{tt} R = -\frac{8\pi G}{C^4} T_{tt}$$

$$\frac{3\ddot{S}}{S} - \frac{1}{2} C^2 \left(\frac{6k}{S^2} + \frac{6\ddot{S}}{C^2 S} + \frac{6\dot{S}^2}{C^2 S^2} \right) = -8\pi G$$

$$\dot{S}^2 + k C^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho S^2 \quad (18, 22)$$

22. Équation dynamique. - À cause de l'homogénéité spatiale, seule la partie temporelle de cette équation est non triviale.

$$T^{t\beta}{}_{;\beta} = 0$$

$$T^{tt}{}_{;t} = T^{tt}{}_{,t} + T^{t\lambda}\Gamma_{\lambda t}^t + T^{\lambda t}\Gamma_{\lambda t}^t = \dot{\rho}$$

$$T^{tr}{}_{;r} = T^{tr}{}_{,r} + T^{t\lambda}\Gamma_{\lambda r}^r + T^{\lambda r}\Gamma_{\lambda r}^t = \rho \frac{\dot{S}}{S} + p \frac{\dot{S}}{C^2 S}$$

Attention, ci-dessous α est un angle et n'est pas un indice muet.

$$T^{t\alpha}{}_{;\alpha} = T^{t\alpha}{}_{,\alpha} + T^{t\lambda}\Gamma_{\lambda\alpha}^\alpha + T^{\lambda\alpha}\Gamma_{\lambda\alpha}^t = \rho \frac{\dot{S}}{S} + p \frac{\dot{S}}{C^2 S}$$

$$T^{t\theta}{}_{;\theta} = T^{t\alpha}{}_{;\alpha}$$

Nous obtenons donc :

$$\dot{\rho} + 3 \left(\rho + \frac{p}{C^2} \right) \frac{\dot{S}}{S} = 0 \quad (18, 23)$$

Soit :

$$\frac{d}{dt} (\rho C^2 S^3) + p \frac{d}{dt} (S^3) = 0 \quad (18, 24)$$

Nous pouvons donner une interprétation énergétique de cette formule. Considérons une surface fermée Σ dont tous les points ont des coordonnées r, α, θ fixées et invariables au cours du temps. Cette surface gonfle avec l'expansion de l'univers. L'élément de longueur étalon de la métrique de ROBERTSON-WALKER nous montre que le volume délimité par Σ est proportionnel à S^3 :

$$\Delta\mathcal{V} = \sqrt{\gamma} \delta r \delta \alpha \delta \theta = Cte S^3 \quad (\gamma_{ij} = \tilde{g}_{ij} \quad \text{et} \quad \gamma = \det \gamma_{ij})$$

En multipliant l'équation (18,24) par cette constante et par dt , elle s'écrit :

$$\delta E = -p \delta \mathcal{V} \quad (18, 25)$$

E est la masse-énergie totale contenue dans le volume $\Delta\mathcal{V}$, exceptée l'énergie gravitationnelle :

$$E = \rho C^2 \Delta\mathcal{V} \quad ; \quad \delta \mathcal{V} = \delta(\Delta\mathcal{V}) \quad (18, 26)$$

La variation de l'énergie totale du système inclus dans la surface Σ est égale au travail des forces de pression. Nous n'avons pas à prendre en compte dans ce bilan, ni l'énergie gravitationnelle, ni l'énergie cinétique d'expansion de l'univers. En effet localement, la matière est plongée dans un espace-temps de MINKOWSKI

et la gravitation peut être considérée comme nulle. De plus, dans le référentiel considéré lié aux galaxies en mouvement, la matière a un mouvement d'ensemble nul, donc une énergie cinétique macroscopique nulle. Le mouvement relatif des différents points de la surface lié à l'expansion de l'univers est en effet tellement faible, quand le volume $\Delta\mathcal{V}$ est suffisamment petit, qu'on peut le négliger.

Dans la formule générale :

$$dE = dW + dQ = -p d\mathcal{V} + dQ$$

Nous avons $dQ = 0$, ce qui veut dire que l'expansion de l'univers est adiabatique. Nous avons déjà rencontré cela dans le cas du rayonnement au § 15. Cela n'empêche pas qu'il y ait des créations locales d'entropie par une évolution interne des différentes parties de l'univers sous l'action des autres interactions que la gravitation.

Considérons deux cas limites. Tout d'abord celui où la matière est dominante, qui correspond à la période actuelle. Étudions des galaxies suffisamment voisines pour que la vitesse correspondant à l'expansion de l'univers soit négligeable. Le mouvement résiduel aléatoire des galaxies les unes par rapport aux autres est faible. C'est lui qui est à l'origine des termes de pression dans le tenseur d'impulsion-énergie. On a donc $p = 0$ et (18,24) donne :

$$\rho \propto \frac{1}{S^3}$$

Ce résultat qui est prévisible, a été donné au § 15.

L'autre cas limite qui est supposé régner au tout début de l'univers est celui où toutes les particules sont relativistes. On a un comportement analogue à celui d'un gaz de photons (§ 14 du chapitre 8). Dans un tel cas, on sait que :

$$p = \frac{1}{3} \rho C^2 \quad (18, 27)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\rho C^2 S^3) + \frac{1}{3} \rho C^2 \frac{d}{dt}(S^3) &= 0 \\ \dot{\rho} S^3 + 4\rho S^2 \dot{S} &= 0 \\ \frac{d}{dt}(\rho S^4) &= 0 \\ \rho &\propto S^{-4} \end{aligned}$$

Ce résultat a déjà été trouvé au § 15. Nous avons obtenu ici ce résultat avec une équation dynamique : (18,24) et une équation d'état : (18,27). Au § 15 nous

avons également utilisé une équation dynamique et une équation d'état pour obtenir le même résultat :

En effet, l'expression du décalage vers le rouge a été obtenue en supposant que la longueur d'onde λ est proportionnelle à S , ce qui est une équation dynamique. L'équation $E = h\nu$ reliée à $P = \frac{h\nu}{C}$ donne le quadrivecteur impulsion-énergie (4,9) et l'équation (8,7) à l'origine au § 22 du chapitre 8 du tenseur d'impulsion-énergie d'un gaz de photons, de trace nulle, donc vérifiant $u = 3p$. C'est donc bien une équation d'état.

24. Résolution des équations. - C'est FRIEDMANN un météorologiste russe, dans les années 1920, qui effectua le premier ce type de calcul.

Supposons tout d'abord que la matière soit prépondérante. A étant une constante, nous avons :

$$\rho = \frac{A}{S^3} \quad (18, 28)$$

L'équation (18,22) donne :

$$\dot{S}^2 - \frac{8\pi GA}{3S} = -kC^2 \quad (18, 29)$$

Traçons la courbe correspondant à la fonction potentiel (fig. 18.8) :

$$V(S) = -\frac{8\pi GA}{3S} \quad (18, 30)$$

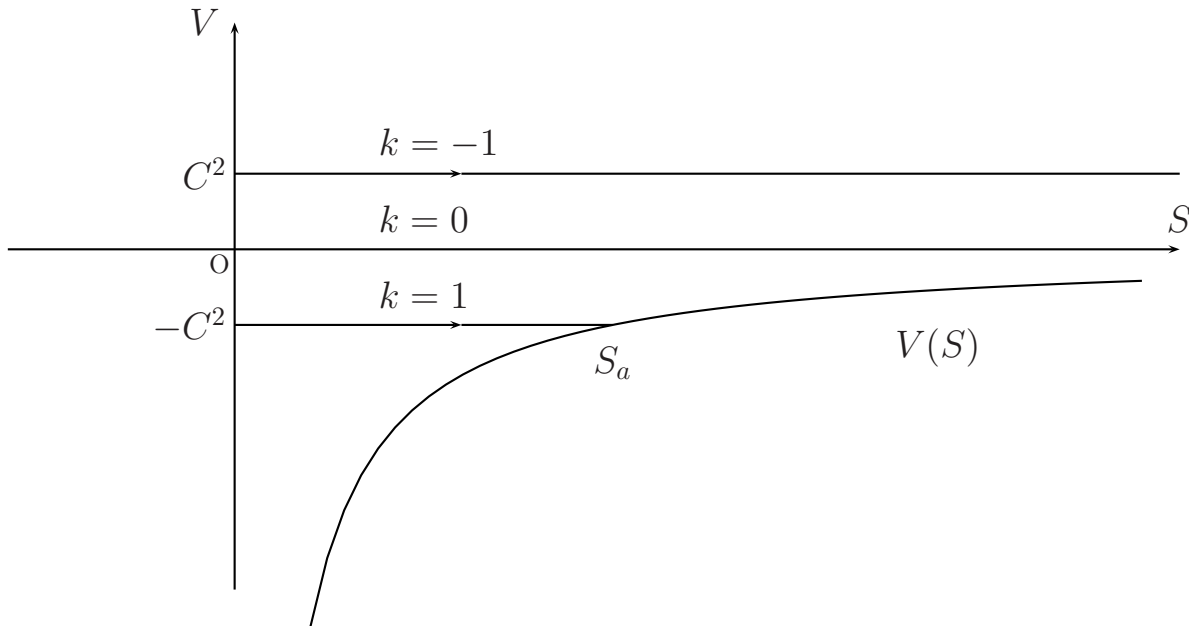


Fig. 18.8

Nous pouvons utiliser la méthode employée au § 13 du chapitre 16 pour résoudre l'équation (18,29).

On voit tout de suite qu'il n'y a pas de solutions avec $S = Cte$. Pour le seul point où $\dot{S} = 0$ avec $k = 1$, $\ddot{S} < 0$. Ainsi il ne peut pas y avoir d'univers statique. C'est cette impossibilité qui amena EINSTEIN à modifier l'équation du champ en introduisant la constante cosmologique Λ de façon à avoir une possibilité d'univers statique. EDDINGTON montra que cette solution est instable et ne présente donc pas d'intérêt physique. On est donc déjà conduit à la conclusion que l'univers dans son ensemble évolue avec le temps.

À l'époque actuelle, les observations nous indiquent que $\dot{S} > 0$. Le point correspondant à l'état de l'univers se déplace donc vers la droite sur l'une des trois horizontales $k = 1$, $k = 0$ ou $k = -1$. Il y a donc trois futurs possibles pour l'univers :

Pour $k = 1$, cas de l'univers à espace à courbure négative, l'expansion se poursuivra infiniment avec une vitesse ayant une limite finie.

Pour $k = 0$, cas de l'univers à espace euclidien, l'univers est en perpétuelle expansion, mais avec une vitesse tendant vers 0.

Pour $k = -1$, cas de l'univers fini à courbure positive, l'expansion s'arrête pour le rayon :

$$S_a = \frac{8\pi GA}{3C^2} \quad (18,31)$$

La figure 18.8 nous montre que $\ddot{S} < 0$. Il y a donc ensuite une phase de contraction.

Nous pouvons également envisager le passé de l'univers. En remontant le temps, il n'y a pas de possibilité pour \dot{S} de s'annuler. Les trois modèles d'univers débutent donc avec une singularité : $S = 0$; c'est le Big Bang.

En remontant le temps, S décroît donc. La densité de matière croît alors proportionnellement à $\frac{1}{S^3}$ tandis que la densité de radiation croit proportionnellement à $\frac{1}{S^4}$. Tel est le cas du rayonnement fossile actuellement à $2.7K$. Il existe donc une époque antérieure à laquelle le rayonnement devait être prépondérant. Pour cette période, nous devons utiliser : $\rho = \frac{B}{S^4}$. Les résultats qualitatifs précédemment trouvés ne sont pas changés. Le potentiel correspondant :

$$V(S) = -\frac{8\pi GB}{3S^2} \quad (18,32)$$

donne le même type de courbe. Nous arrivons donc encore à la conclusion que l'univers a commencé son existence à $S = 0$.

Posons nous la question de savoir si $S = 0$ a été obtenu en un temps fini dans le passé. Pour S suffisamment faible, kC^2 est négligeable dans l'équation (18,22)

et nous obtenons :

$$\dot{S}^2 = \frac{8\pi GB}{3S^2} \quad (18, 33)$$

$$\dot{S} = \sqrt{\frac{8\pi GB}{3}} \frac{1}{S}$$

$$\frac{1}{2} d(S^2) = \sqrt{\frac{8\pi GB}{3}} dt$$

$$S^2 = 2\sqrt{\frac{8\pi GB}{3}} t + Cte \quad (18, 34)$$

Nous avons donc effectivement $S = 0$ pour une valeur finie de t . Nous pouvons ajuster notre origine des temps de façon à avoir $S = 0$ à $t = 0$; c'est à dire $Cte = 0$.

$$S = \left(\frac{32\pi GB}{3}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{t} \quad (18, 35)$$

Nous voyons que \dot{S} est infinie pour $t = 0$. C'est la courbe connue de la fonction racine carrée qui démarre avec une tangente verticale (fig. 18.9). La vitesse d'expansion est donc infinie à l'origine. Nous avons vu au § 12 que ce fait n'est pas en contradiction avec la Relativité restreinte.

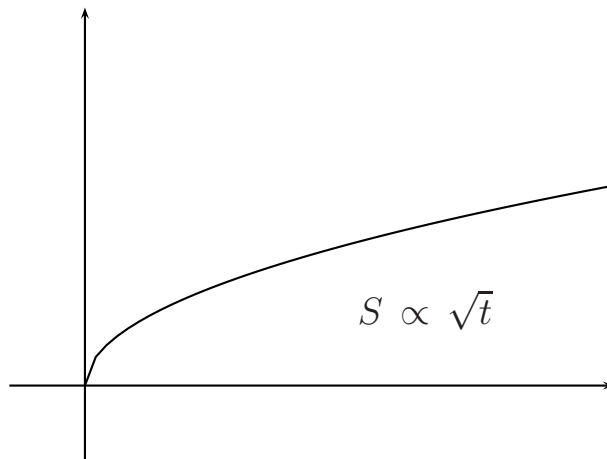


Fig. 18.9

En conclusion, nous arrivons, en remontant le temps, et en supposant les équations de la Relativité générale vraies, au fait que l'univers a débuté son existence par une singularité il y a un temps fini dans le passé. Le *théorème de Penrose et Hawking* démontre que l'on arrive à une singularité, il y a un temps fini dans le passé, dans tous les cas, quelle que soit l'asymétrie de l'univers. Quelle confiance peut on accorder à ce résultat ?

Ce qui est sûr, c'est que en remontant le temps avec les équations de la Relativité générale, on arrive à un moment où l'univers était extrêmement chaud et dense. On arrive alors nécessairement à un moment où il nous faudrait une théorie quantique de la gravitation pour décrire correctement les choses. Cela s'appelle *l'ère de Planck*.

À une telle époque, le temps lui même devient incertain ! En effet, en Relativité générale, une masse ralentit le temps autour d'elle. L'incertitude de localisation de masses importantes, liée aux relations d'incertitudes de HEISENBERG, mène inévitablement à une incertitude sur le temps.

L'idée d'un univers débutant son existence avec l'apparition du temps lui-même au temps 0 dans une gigantesque explosion, le Big Bang, a sans aucun doute une certaine validité.

25. Lien avec les paramètres observables. - Nous allons voir comment on peut **déterminer expérimentalement la valeur de k** . L'équation (18,22) donne :

$$\frac{\dot{S}^2}{S^2} + \frac{kC^2}{S^2} = \frac{8\pi G\rho}{3} \quad (18,36)$$

$$1 + k\frac{C^2}{S^2H^2} = \frac{\rho}{\rho_c} \quad (18,37)$$

$$\text{Avec} \quad \rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (18,38)$$

ρ_c est appelée la *masse volumique critique*, ou la *densité critique* de l'univers.

On déduit de (18,37) que :

$$\begin{cases} k = 1 & \rho > \rho_c \\ k = 0 & \rho = \rho_c \\ k = -1 & \rho < \rho_c \end{cases}$$

La mesure de la densité de matière présentement doit donc permettre, en déterminant ρ , de savoir dans quel type d'univers nous vivons.

Envisageons maintenant le cas actuel où la matière est prépondérante. Rappelons les équations (18,28) et (18,29) :

$$\begin{aligned} \dot{S}^2 + kC^2 &= \frac{8\pi G}{3} \frac{A}{S} \quad ; \quad \rho = \frac{A}{S^3} \\ 2\dot{S}\ddot{S} &= -\frac{8\pi GA\dot{S}}{3S^2} = -\frac{8\pi G}{3} \rho S\dot{S} \end{aligned}$$

$$\ddot{S} = -\frac{4\pi G}{3}\rho S$$

$$\text{Soit } q = -\frac{S\ddot{S}}{\dot{S}^2} \quad (18, 39)$$

q s'appelle le *paramètre de décélération*. Ce paramètre sans dimension est mesurable en étudiant les galaxies lointaines qui, observées à un moment où l'univers était plus jeune, sont vues avec une vitesse de récession supérieure à celle qu'elles ont maintenant.

$$-\frac{S\ddot{S}}{\dot{S}^2} = \frac{4\pi G}{3}\rho \frac{S^2}{\dot{S}^2} = q$$

$$\rho = \frac{3}{4\pi G}q H^2 = 2q\rho_c$$

$$\frac{\rho}{\rho_c} = 2q \quad (18, 40)$$

Ainsi, la mesure de q est un autre moyen de connaître la structure de notre univers. L'idéal est évidemment de mesurer avec précision H , ρ et q et de vérifier l'équation (18,40).

De l'équation (18,37), on déduit que quand $t \rightarrow 0$ $\rho \simeq \rho_c$. En effet : $S^2 H^2 = \dot{S}^2 \rightarrow \infty$ et l'équation devient $1 \simeq \frac{\rho}{\rho_c}$.

Il ne faut pas en tirer la conclusion que à un moment quelconque t nous n'avons pas le choix du rapport $\frac{\rho}{\rho_c}$. Ce qui se passe, c'est que pour arriver à une situation présente raisonnable avec un rapport $\frac{\rho}{\rho_c}$ ni extrêmement grand, ni extrêmement petit, il a fallu que ce rapport soit extrêmement voisin de 1 à un temps très proche du Big Bang. Autrement, l'univers serait déjà retombé sur lui-même avant l'époque présente, ou aurait une vitesse d'expansion qui rendrait le rapport $\frac{\rho}{\rho_c}$ extrêmement faible (voir § 39).

Pour mieux comprendre ce phénomène, considérons une masse ponctuelle M attirant une masse m , située à la distance r , où sa vitesse est $v(r)$.

$$-\frac{GM}{r} + \frac{1}{2}v^2(r) = Cte$$

$$-\frac{GM}{r} + \frac{1}{2}v_c^2(r) = 0$$

$v_c(r)$ est la vitesse de libération à la distance r .

On arrive à : $v^2 - v_c^2 = Cte$ et :

$$\frac{v^2(r)}{v_c^2(r)} - 1 = \frac{Cte}{v_c^2(r)}$$

Et, comme $v_c \rightarrow \infty$ quand $r \rightarrow 0$, $\frac{v(r)}{v_c(r)} \rightarrow 1$ quand $r \rightarrow 0$.

Une vitesse raisonnable pour une particule à la distance r suppose que la vitesse fût très proche de la vitesse de libération pour des distances très inférieures à r . On peut tirer une conclusion de tout cela : pour $k = 1$, un écart très faible de ρ à la valeur ρ_c très tôt après le Big Bang aurait donné un univers qui serait depuis longtemps retombé sur lui-même et nous n'existerions pas ! Pour $k = -1$, nous verrons au paragraphe 39 que $\frac{\rho}{\rho_c} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$ et nous pourrions déjà avoir à l'heure actuelle $\frac{\rho}{\rho_c} \simeq 10^{-12}$ par exemple. Or les valeurs expérimentales donnent, compte tenu des masses cachées de matière inconnue détectées par leur influence gravitationnelle, $\frac{\rho}{\rho_c}$ du même ordre de grandeur que 1 (voir exercice 18.4).

Reprenons l'analogie de la particule et de sa vitesse de libération : une comète par exemple, a une vitesse raisonnable au voisinage de la Terre, donc une vitesse extrêmement proche de la vitesse de libération près du Soleil. Mais cela est dû à la condition initiale très logique d'être quasi immobile dans le nuage de OORT très loin du Soleil. Dans le cas de l'univers, nous n'avons à priori rien pour nous expliquer la condition initiale correspondant au réglage fabuleux juste après le Big Bang où ρ était égal à ρ_c avec une précision fantastique. Les récentes théories supposant une *phase d'inflation* de l'univers juste après le Big Bang pourraient donner une telle explication. Une autre explication correspond à ce qu'on appelle le principe anthropique (DICKE 1961). Dans un autre cas, nous n'existerions pas pour observer l'univers ! L'univers serait en effet retombé sur lui-même trop tôt, ou au contraire, la vitesse d'expansion trop rapide aurait dilué la matière avant qu'elle n'arrive à se condenser en galaxies. Enfin, si $\rho = \rho_c$ à l'époque présente, les inhomogénéités même extrêmement faibles feront que certaines vastes régions de l'univers vérifieront $\rho < \rho_c$, tandis que d'autres vérifieront $\rho > \rho_c$ et le modèle simple de FRIEDMANN envisagé ne s'appliquerait éventuellement plus.

Dans les paragraphes suivants, nous allons montrer que l'on retrouve beaucoup des résultats précédents avec des calculs fait dans le cadre de la Mécanique newtonienne.

26. Pourquoi la Cosmologie newtonienne ? - Une question valable que l'on peut se poser est : pourquoi le ciel ne nous tombe-t-il pas sur la tête ? Pourquoi les objets célestes, le Soleil, la Lune, les étoiles, restent-ils immobiles dans les cieux. Les civilisations antiques, comme la Chine par exemple, se sont posées ce problème. Ce problème est d'ordre **cosmologique**, étudiant l'équilibre

des astres hors de notre planète.

Les grecs avaient trouvé une réponse à cette question en imaginant la sphère céleste rigide soutenant les étoiles fixes.

La Mécanique newtonienne répond déjà partiellement puisqu'elle explique, par la loi de la gravitation universelle, pourquoi la Lune reste à distance fixe de la Terre en tombant perpétuellement vers cette dernière. NEWTON lui-même essaya d'envisager des modèles cosmologiques basés sur sa Mécanique ; et cela n'est pas hors de propos, car dans la "banlieue" terrestre, les champs de gravitation ne sont pas si forts, et les vitesses si proches de celle de la lumière, qu'il faille utiliser absolument la Relativité générale.

La Cosmologie newtonienne consiste en effet à extrapoler ces études locales valables (la région du système solaire) et à essayer d'étudier l'évolution de l'univers dans son ensemble dans le cadre de la Mécanique newtonienne.

Nous avons vu au § 9 du chapitre 6 que le fait que les étoiles ne tombent pas sur la Terre est résolu par la structure plane de notre galaxie et sa rotation sur elle-même. Par contre, la répartition des galaxies autour de la notre ne présente pas de structure plane. Il faut donc trouver une autre solution. Nous avons vu, avec la Relativité générale, que Celle-ci est l'expansion de l'univers.

Nous verrons au § 30 que la cosmologie basée sur la Mécanique newtonienne peut être justifiée. Elle a le mérite d'être très simple. C'est pourquoi nous abordons son étude au paragraphe suivant.

27. Difficulté de la Cosmologie newtonienne. - Envisageons tout d'abord un univers constitué d'une répartition infinie de matière homogène et isotrope dans un espace euclidien. Nous supposons qu'il existe un temps absolu et que la Mécanique newtonienne s'applique. Ce modèle semble de prime abord très proche de l'univers de FRIEDMANN avec $k = 0$. Cependant des difficultés conceptuelles apparaissent quant à la prédiction de son évolution futur.

Considérons un point M . À toute particule attirant M avec une certaine force dans une certaine direction correspond une particule attirant M avec la même intensité dans la direction opposée (fig. 18.10).

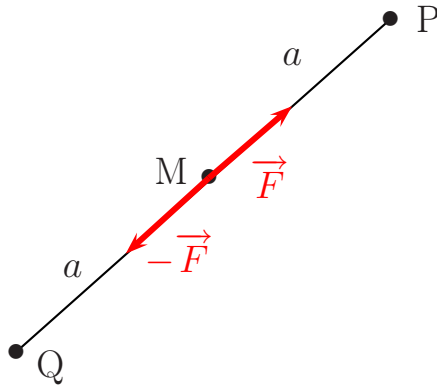


Fig. 18.10

On en déduit que le point M est nécessairement en équilibre. Ceci étant vrai pour tout point M , l'univers est statique.

Effectuons maintenant un autre raisonnement. Considérons un point O quelconque et un point M à la distance S de O . La répartition de matière possède la symétrie de révolution autour de O . Un théorème simple de Mécanique newtonienne montre que la matière à l'extérieur de la sphère Σ de centre O et de rayon S n'a aucune influence sur M , tandis que toute la matière située à l'intérieur de Σ attire M comme le ferait une masse unique égale à la masse totale intérieure à Σ et située en O . Le point M doit donc accélérer vers le point O , résultat en contradiction avec le résultat précédent. De plus, le point O ayant été choisi d'une manière quelconque, la répartition de matière étant à symétrie sphérique autour de tout point, on en arrive à la contradiction que le point M accélère vers tout point.

Que conclure de cela ? Simplement que le formalisme mathématique de la Mécanique newtonienne est incapable de déterminer l'évolution du modèle d'univers considéré. Le concept de force avec sommation infinie sur toutes les forces pour avoir la résultante est inadéquat.

Le formalisme de la Relativité générale redonne dans les cas usuels le concept de force et les calculs usuels avec sommation des forces de la Mécanique newtonienne. Cependant, ce formalisme est plus puissant, car dans le cas de la cosmologie où la répartition de matière est infinie, il permet de calculer sans ambiguïté et sans utiliser le concept de force là où la Mécanique newtonienne est impuissante.

Nous voyons sur ce cas que le formalisme de la Relativité générale est plus puissant et plus vaste que celui de la Mécanique newtonienne. La Relativité générale

résout le problème de l'accélération de M vers tout point O grâce au principe d'équivalence et à la Relativité de l'accélération! Tout dépend du référentiel choisi. Elle seule peut intégrer ce principe dans une structure mathématique cohérente.

Un moyen d'échapper, en Mécanique newtonienne, au problème précédent est de supposer une quantité finie de matière, dont la répartition est à symétrie sphérique autour d'un point O , le reste de l'univers étant constitué d'espace vide. Ce modèle est, d'un point de vue physique, très artificiel et peut satisfaisant (que signifie cette espace vide s'étendant à l'infini, au delà de la matière), de telle manière que nous voyons qu'il n'existe pas de cosmologie newtonienne satisfaisante. Poursuivons cependant notre étude dans ce cas, au paragraphe suivant, puisqu'elle est possible.

28. La Cosmologie newtonienne. - Calculons dans ce cadre, la masse volumique critique ρ_c . Reprenons la situation de la sphère Σ (rayon S) et du point M sur sa surface dans le cadre d'un modèle dynamique. La masse volumique critique correspond au cas où la sphère Σ se dilate à l'infini, le point M ayant une vitesse limite nulle. Pendant toute cette phase d'expansion, l'attraction des masses intérieures à la sphère est équivalent à celle d'une masse unique égale à la somme des masses intérieures et placée au centre de la sphère. On est donc ramené au cas d'un point matériel de masse m attiré par une force centrale, le potentiel valant $-\frac{GMm}{r}$.

$$-\frac{GMm}{S} + \frac{1}{2}mv_c^2 = 0$$

avec : $v_c = HS$; $M = \frac{4}{3}\pi\rho_c S^3$

$$-\frac{G}{S}\frac{4}{3}\pi\rho_c S^3 + \frac{1}{2}H^2 S^2 = 0$$

$$-G\frac{8}{3}\pi\rho_c + H^2 = 0$$

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

On trouve exactement la valeur donnée par la Relativité générale. Est-ce une coïncidence fortuite, ou la Mécanique newtonienne a t'elle une justification limite? Nous allons répondre à cette question dans le paragraphe suivant.

Plus généralement, trouvons les équations de la Cosmologie newtonienne :

$$\frac{r}{r_0} = \frac{S}{S_0}$$

S étant un paramètre égal à la distance à l'origine d'un point particulier dont on suit l'évolution. r est la distance à l'origine d'un point quelconque. l'indice 0 veut dire que les quantités sont prises à l'instant t_0 .

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM}(t) &= \overrightarrow{OM}(t_0) \frac{S(t)}{S(t_0)} \quad ; \quad \|\overrightarrow{OM}\| = r \\ V(t) &= -\frac{4}{3}\pi r^3 \rho(t) \frac{Gm}{r} = -\frac{4}{3}\pi m G r^2 \rho(t) = -\frac{4}{3}\pi m G \rho(t) r_0^2 \frac{S^2}{S_0^2} \\ T &= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 = \frac{1}{2} m r_0^2 \frac{\dot{S}^2}{S_0^2} \\ E &= \frac{1}{2} m \frac{r_0^2}{S_0^2} \left(\dot{S}^2 - \frac{8\pi G}{3} \rho S^2 \right) \\ \dot{S}^2 - \frac{8\pi G}{3} \rho S^2 &= \frac{2ES_0^2}{mr_0^2}\end{aligned}\tag{18, 41}$$

Le paramètre S n'est ici déterminé qu'à une constante multiplicative près, la constante au second membre, et a donc une valeur absolue quelconque. Ainsi, le second membre a également une valeur absolue quelconque, seul son signe est important. On peut alors choisir le paramètre S_0 de façon à avoir :

$$\frac{2ES_0^2}{mr_0^2} = -kC^2\tag{18, 42}$$

On retrouve l'équation (18,22) donnée par la Relativité générale.

$k = +1$ correspond bien à $E < 0$ et à un univers retombant sur lui même au bout d'un certain temps. De même, pour $k = 0$, et $k = -1$, on retrouve bien $E = 0$ et $E > 0$ et la dynamique est la même que celle trouvée en Relativité générale.

Ce que la Mécanique newtonienne ne nous donne pas, bien sûr, c'est la valeur exacte de S , donc la valeur exacte de E , S étant le facteur d'échelle cosmique.

Encore une fois, tout ce que nous venons de trouver résulte-t-il d'une coïncidence, où la Cosmologie newtonienne peut-elle être justifiée comme cas limite ?

29. Retour au théorème de BIRKHOFF. - Nous avons déjà mentionné le théorème de BIRKHOFF au §7 du chapitre 16 et au §11 du chapitre 17. Rappelons ici ce théorème :

Le théorème de BIRKHOFF affirme que la solution de SCHWARZSCHILD est la solution de l'équation du champ en espace vide pour un système à symétrie sphérique.

Ce théorème est très puissant : nous n'avons même pas besoin d'imposer de retrouver l'espace-temps de MINKOWSKI à l'infini ! Il suffit de supposer, en accord

avec le principe de MACH, que la métrique est également à symétrie sphérique, comme la répartition des masses. Nous n'avons pas besoin non plus de supposer que l'état du système est indépendant du temps. Ainsi, un collapse gravitationnel donne, à l'extérieur, la métrique de SCHWARZSCHILD, donc une métrique indépendante du temps, dans la mesure où durant le collapse, la symétrie sphérique est conservée.

Nous pouvons également appliquer le théorème de BIRKHOFF au champ gravitationnel à l'intérieur d'une cavité sphérique vide placée au centre d'un système possédant la symétrie sphérique. Dans un tel cas, la métrique est également donnée par la solution de SCHWARZSCHILD. Mais, puisque le point $r = 0$ est ici en espace vide, il ne peut y avoir de singularité, et nécessairement, la constante d'intégration MG doit être nulle.

Le théorème de BIRKHOFF a donc pour corollaire que la métrique à l'intérieur d'une cavité sphérique vide au centre d'un système à symétrie sphérique doit être la métrique de l'espace-temps plat de MINKOWSKI! Ce corollaire est l'analogue en Relativité générale du fameux résultat de la Mécanique newtonienne selon lequel le champ gravitationnel à l'intérieur d'une sphère massique creuse est nul. En superposant de telles coquilles massiques, on arrive bien au résultat que le champ est nul à l'intérieur d'une cavité sphérique au centre d'un système à symétrie sphérique.

L'importance du théorème de BIRKHOFF vient du fait que c'est un théorème local qui ne dépend pas des conditions imposées à la métrique pour $r \rightarrow \infty$, à part la symétrie sphérique. Nous avons en effet vu ci-dessus que nous n'avons pas besoin de supposer que l'on retrouve la métrique de MINKOWSKI à l'infini.

Ainsi, l'espace doit être plat à l'intérieur d'une cavité sphérique au centre d'un système à symétrie sphérique, même si le système est l'univers entier. Nous allons voir dans le paragraphe suivant que ce résultat nous permet de justifier la Cosmologie newtonienne.

Mais nous pouvons déjà ici justifier qualitativement le traitement newtonien du système solaire : l'ensemble des astres situés hors du système solaire constitue un système à symétrie sphérique. Supposons tout d'abord qu'il n'y ait rien à l'emplacement du système solaire. La métrique est donc celle de MINKOWSKI et pour de faibles vitesses et de faibles masses, la Mécanique newtonienne s'applique donc. Mettons en place (par la pensée), le Soleil et les planètes, nous pouvons traiter ce problème par la Mécanique newtonienne en première approximation et en ne tenant compte que de l'interaction des astres appartenant au système solaire entre eux. Ce que nous venons de dire ici est justifié rigoureusement au paragraphe suivant.

Le théorème de BIRKHOFF justifie également l'obtention de la métrique de SCHWARZSCHILD au chapitre 16, le reste de l'univers en dehors de la région étudiée entourant l'astre étant supposée à symétrie sphérique.

30. Justification de la Cosmologie newtonienne. - Soit $S_1 \ll S$, S étant le facteur d'échelle cosmique. Considérons la sphère Σ_1 de centre O (point quelconque choisi arbitrairement) et de rayon S_1 . Si l'intérieur de cette sphère est vide, le théorème de BIRKHOFF entraîne que, dans cet intérieur, l'espace-temps est de MINKOWSKI avec $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$.

si nous plaçons maintenant à l'intérieur de cette sphère de la matière, nous pouvons, dans la mesure où le champ gravitationnel créé par cette matière est faible, considérer que la métrique est :

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$$

$h_{\alpha\beta}$ est la perturbation due à la matière ajoutée, et $|h_{\alpha\beta}| \ll 1$.

La condition $S_1 \ll S$ a été posée de façon à avoir suffisamment peu de matière à l'intérieur de Σ_1 pour que le champ gravitationnel créé par celle-ci soit effectivement faible.

Nous sommes donc dans le cas de l'approximation linéaire de la Relativité générale. Si nous supposons en plus que les vitesses des particules placées à l'intérieur de la sphère sont faibles devant celle de la lumière, nous sommes dans le cas où l'approximation linéaire de la Relativité générale redonne la Mécanique newtonienne.

Les actions gravitationnelles à l'intérieur de Σ_1 correspondent à la présence de $h_{\alpha\beta}$ qui est créé uniquement par la matière à l'intérieur de Σ_1 . Autrement dit, la matière à l'intérieur de Σ_1 agit gravitationnellement sur elle-même, mais ne subit aucune autre influence gravitationnelle. Elle évolue donc comme si elle était placée dans un univers vide.

Nous arrivons donc au modèle suivant : une région remplie de matière possédant la symétrie de révolution autour d'un point O et limitée par une sphère Σ_1 de rayon S_1 . L'évolution de cette matière peut être traitée en appliquant la Mécanique newtonienne et en considérant toute cette matière comme isolée dans un espace vide, puisqu'elle ne subit aucune autre influence gravitationnelle.

Lorsque l'univers grandit, la Relativité générale nous assure que S_1 et S croissent tout deux en restant proportionnels. La Relativité générale nous assure donc que l'étude newtonienne de la région intérieure à Σ_1 permet de calculer l'évolution de tout l'univers. Il ne faut pas être surpris de cela. L'univers restant au cours de son évolution homogène et isotrope, il est clair que l'étude de l'évolution d'une petite région permet de connaître l'évolution globale de tout l'univers.

Cependant, ce résultat justifie complètement la cosmologie newtonienne traitée au § 28.

Remarquons que l'application de la Mécanique newtonienne à la région intérieure à Σ_1 permet de retrouver l'équation (18,24) correspondant à la conservation de l'énergie, en tenant compte là de la Relativité restreinte par $E = m C^2$. Les deux équations fondamentales permettant de calculer l'évolution de l'univers sont donc retrouvées par la Cosmologie newtonienne, Celle-ci étant justifiée par la Relativité générale.

Cependant, bien que la Cosmologie newtonienne permettent de retrouver les équations d'EINSTEIN (18,22) et (18,24), elle est bien évidemment incomplète. Tout d'abord, nous avons besoin de la Relativité générale pour justifier la Cosmologie newtonienne! Ensuite, nous n'avons pas accès avec cette cosmologie à la valeur exacte de S . Nous ne pouvons suivre qu'une grandeur qui lui est proportionnelle.

Enfin, de nombreux phénomènes physiques liés à l'expansion de l'univers et à sa structure à grande échelle, comme le décalage vers le rouge, ne peuvent être traités correctement que dans le cadre de la Relativité générale.

31. Détermination expérimentale de la constante de HUBBLE et du paramètre de décélération. - Le problème que nous nous posons maintenant est celui de la détermination des **distances des galaxies** pour lesquelles la structure à grande échelle de l'univers a une influence. C'est à dire que l'expansion de l'univers au cours du temps et sa géométrie spatiale doivent être prises en compte pour évaluer correctement ces distances.

Actuellement, la seule méthode vraiment efficace est de comparer la luminosité apparente des galaxies à leur luminosité absolue supposée connue. Les galaxies utilisées pour ce repérage sont les galaxies les plus brillantes des amas, galaxies elliptiques de type E , qui sont supposées toutes avoir la même luminosité absolue. Cette luminosité absolue est déterminée par la connaissance par une autre méthode de leur distance pour des galaxies proches du même type.

La détermination de la distance pour des objets aussi lointains avec cette méthode, n'est pas directe. Elle passe nécessairement par l'utilisation d'un modèle d'univers (ici la métrique de ROBERTSON-WALKER avec un modèle pour l'évolution de $S(t)$) permettant d'avoir accès, avec la méthode précédente, et l'utilisation du décalage vers le rouge z , à la connaissance de la constante de HUBBLE H et du paramètre de décélération q . Ces valeurs étant alors connues, la valeur du décalage vers le rouge, ou ce qui revient au même, de ce que nous appellerons la *distance lumineuse* d_L , donnent ensuite la distance.

Mais la détermination de H et q est bien sûr utile pour elle-même, pour l'étude de la structure de notre univers et la connaissance de son évolution futur et la relation **luminosité apparente, luminosité absolue, décalage vers le rouge** est actuellement la meilleur méthode pour leurs déterminations.

32. Distance lumineuse. - Voyons donc maintenant comment sont effectués les calculs :

Considérons une source de luminosité absolue L . L est la puissance totale émise par la source et rayonnée dans l'angle solide 4π . Soit t_1 le temps cosmique d'émission de la lumière, et t_0 le temps cosmique de sa réception. Chaque photon émis par la source avec l'énergie $h\nu_1$ est décalé vers le rouge jusqu'à l'énergie $h\nu_1 \frac{S(t_1)}{S(t_0)}$. De plus, les photons émis à des intervalles de temps δt_1 sont reçus à des intervalles de temps :

$$\delta t_0 = \delta t_1 \frac{S(t_0)}{S(t_1)}$$

La puissance totale émise, vue du point d'observation est donc :

$$P = L \frac{S^2(t_1)}{S^2(t_0)} \quad (18, 43)$$

Remarquons que cette double influence de la variation de l'énergie des photons et de leur débit est tout à fait analogue à ce qui se passait dans l'exercice 8.3 et l'exercice 8.4.

Cette puissance, rayonnée dans l'angle solide 4π , est dispersée, au temps cosmique t_0 , sur une surface qui vaut :

$$s = 4\pi d^2 = 4\pi (S(t_0) r_1)^2 \quad (18, 44)$$

La luminosité apparente l est la puissance reçue par unité de surface du miroir collecteur, donc :

$$l = \frac{LS^2(t_1)}{4\pi S^4(t_0) r_1^2} \quad (18, 45)$$

Dans un espace euclidien, la luminosité apparente d'une source au repos à la distance d serait $l = \frac{L}{4\pi d^2}$. Nous pouvons donc définir la distance lumineuse d_L d'une source comme égale à :

$$d_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi l}} \quad (18, 46)$$

La formule (18,45) peut donc s'écrire :

$$r_1 = \frac{S(t_1)}{S^2(t_0)} d_L \quad (18,47)$$

D'autre part, rappelons (18,19) :

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{C}{S(t)} dt = f(r_1)$$

d_L étant mesurée expérimentalement, nous avons donc deux équations à deux inconnues r_1 et t_1 , la fonction $S(t)$ étant supposée connue !

$$\text{et } d = S(t_0) f(r_1) = S(t_0) \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad (18,48)$$

La détermination des distances à partir de la comparaison luminosité apparente, luminosité absolue, passe donc bien par la connaissance de la dynamique de l'univers, c'est à dire par la connaissance de la croissance de $S(t)$ (pour des distances suffisamment faibles, cela correspond à la connaissance de H et de q).

Elle passe également par la connaissance de k , donc de la géométrie de l'espace à 3 dimensions. Cependant, pour r_1 faible, $f(r_1) = r_1$ et la connaissance de k n'est pas nécessaire.

Pour r_1 suffisamment petit, les formules (18,48) et (18,47) donnent bien :

$$d \simeq S(t_0)r_1 = S(t_0) \frac{S(t_1)}{S^2(t_0)} d_L = \frac{S(t_1)}{S(t_0)} d_L \simeq d_L$$

Rappelons ici que nous pouvons mesurer l'éloignement de l'objet par la distance étalon d ; par le temps qu'il a mis sa lumière pour nous rejoindre : $t_0 - t_1$, ou la distance correspondante en années lumières par exemple : $d_c = C(t_0 - t_1)$. On peut prendre également le décalage vers le rouge $z = \frac{[S(t_0) - S(t_1)]}{S(t_1)}$.

Nous avons enfin la distance lumineuse d_L .

33. Relation décalage vers le rouge distance lumineuse. - Rappelons les formules :

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{C}{S(t)} dt = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad (18,19)$$

$$z = \frac{S(t_0)}{S(t_1)} - 1 \quad (18,20)$$

$$d_L = r_1 \frac{S^2(t_0)}{S(t_1)} = r_1 S(t_0) (1 + z) \quad (18,49)$$

À l'heure actuelle, la courbe $d_L(z)$ est déterminée expérimentalement avec une bonne précision uniquement pour les faibles valeurs du décalage vers le rouge z . Nous sommes donc concernés par le cas où $C(t_0 - t_1)$, r_1 et z sont faibles. Nous pouvons donc réaliser le programme du paragraphe précédent en utilisant des développements limités :

$$S(t) = S(t_0) + (t - t_0)\dot{S}(t_0) + \frac{(t - t_0)^2}{2}\ddot{S}(t_0) \quad (18,50)$$

$$\begin{aligned} \text{avec : } \dot{S}(t_0) &= H_0 S(t_0) \\ \ddot{S}(t_0) &= -q_0 \frac{\dot{S}^2(t_0)}{S(t_0)} = -q_0 H_0^2 S(t_0) \end{aligned}$$

$$S(t_1) = S(t_0) \left(1 + (t_1 - t_0)H_0 - \frac{(t_1 - t_0)^2}{2}q_0 H_0^2 + \dots \right) \quad (18,51)$$

L'utilisation de (18,51) dans (18,20) donne, en divisant en puissance croissante 1 par le développement limité de $\frac{S(t_1)}{S(t_0)}$ ($t = t_1 - t_0$) :

$$\begin{aligned} 1 &= \left(1 + tH_0 - \frac{t^2}{2}q_0 H_0^2 + \dots \right) \left(1 - tH_0 + \left(1 + \frac{q_0}{2} \right) t^2 H_0^2 + \dots \right) \\ z &= H_0(t_0 - t_1) + \left(1 + \frac{q_0}{2} \right) H_0^2(t_0 - t_1)^2 + \dots \end{aligned} \quad (18,52)$$

Inversons maintenant cette relation c'est à dire trouvons le développement limité de $t_0 - t_1$ en fonction de z :

$$t_0 - t_1 = a + bz + cz^2 + \dots$$

$$\begin{aligned} z &= H_0 a + H_0 bz + H_0 cz^2 + \left(1 + \frac{q_0}{2} \right) H_0^2 a^2 + \left(1 + \frac{q_0}{2} \right) H_0^2 2abz \\ &\quad + \left(1 + \frac{q_0}{2} \right) H_0^2 b^2 z^2 + \left(1 + \frac{q_0}{2} \right) H_0^2 2acz^2 \end{aligned}$$

$$a = 0 \quad ; \quad H_0 b = 1 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{1}{H_0}$$

$$H_0 c + \left(1 + \frac{q_0}{2} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -\frac{1}{H_0} \left(1 + \frac{q_0}{2} \right)$$

$$t_0 - t_1 = \frac{1}{H_0} \left(z - \left(1 + \frac{q_0}{2} \right) z^2 + \dots \right) \quad (18,53)$$

$$d_c = \frac{C}{H_0} \left(z - \left(1 + \frac{q_0}{2} \right) z^2 + \dots \right) \quad (18,54)$$

Trouvons maintenant, en utilisant (18,19), le développement limité de r_1 en fonction du temps de vol de la lumière $t_0 - t_1$. Tout d'abord, (18,52) donne :

$$\frac{1}{S(t_1)} = \frac{1}{S(t_0)} \left(1 + H_0(t_0 - t_1) + \left(1 + \frac{q_0}{2} \right) (t_0 - t_1)^2 H_0^2 \right)$$

Puis, en intégrant ce développement limité grâce à l'équation (18,19) :

$$r_1 + O(r_1)^2 = \frac{C}{S(t_0)} \left((t_0 - t_1) + \frac{1}{2} H_0(t_0 - t_1)^2 + \dots \right)$$

Nous avons ainsi, négligeant $O(r_1)^2$, le développement limité de r_1 en fonction de $t_0 - t_1$. Remplaçant $t_0 - t_1$ par son expression (18,53) en fonction de z , nous obtenons :

$$r_1 = \frac{C}{S(t_0)H_0} \left(z - \frac{1}{2}(1 + q_0)z^2 + \dots \right) \quad (18, 55)$$

Remarquons que pour $k = 0$ ou r_1 suffisamment petit, $d \simeq S(t_0)r_1$.

$$d \simeq \frac{C}{H_0} \left(z - \frac{1}{2}(1 + q_0)z^2 + \dots \right) \quad (18, 56)$$

Au premier ordre, on retrouve bien :

$$d \simeq \frac{Cz}{H_0} \quad ; \quad \text{qui est (18,54)}$$

Dans le cas général, la formule (18,49) donne alors :

$$\begin{aligned} d_L &= \frac{C}{H_0}(1 + z) \left(z - \frac{1}{2}(1 + q_0)z^2 + \dots \right) \\ d_L &= \frac{C}{H_0} \left(z + \frac{1}{2}(1 - q_0)z^2 + \dots \right) \end{aligned} \quad (18, 57)$$

Et, on a bien $d_L \simeq \frac{Cz}{H_0} = d$ au premier ordre.

$$\begin{aligned} l &= \frac{L}{4\pi d_L^2} \quad ; \quad d_L^2 = \frac{C^2 z^2}{H_0^2} (1 + (1 - q_0)z) \\ l &= \frac{L}{4\pi} \frac{H_0^2}{C^2} \frac{1}{z^2} (1 + (q_0 - 1)z) \end{aligned} \quad (18, 58)$$

l , L , et z étant connus tous les 3 pour différentes galaxies, la relation précédente permet effectivement de calculer la constante de HUBBLE H_0 et le paramètre de décélération q_0 . (18,54) permet alors d'avoir accès à d_c , et (18,56) à d .

Considérons le cas général, lorsque les distances sont telles que l'utilisation des développements limités n'est plus possible. Posons nous la question de savoir si la connaissance de l , L et z pour différentes galaxies permet de calculer la fonction $S(t)$ dont la connaissance permet de calculer les distances (cf § 32). Les équations sont (18,19), (18,20) et (18,49). La réponse est négative. Pour résoudre le problème, il est nécessaire d'utiliser les équations dynamiques (18,22) et (18,24). Revenons maintenant, dans le paragraphe suivant, à l'équation (18,58) que nous allons transformer en faisant intervenir les magnitudes relatives et absolues.

34. Magnitude apparente, et magnitude absolue. - Pour caractériser la luminosité apparente et la luminosité absolue, on préfère utiliser une échelle logarithmique. Cette échelle repose sur une propriété physiologique de l'oeil : la sensation varie comme le logarithme de l'excitation (loi de FLESCHER). Toutes les sensations obéissent d'ailleurs à une telle loi, en particulier les sensations auditives. On mesure donc également les sons avec une échelle logarithmique, d'où l'unité le décibel. Cette propriété des sensations permet aux organes des sens de pouvoir détecter sans problèmes les phénomènes dans une vaste gamme d'intensités.

Historiquement, la première échelle d'éclat des étoiles fut définie par HIPPARQUE. Les étoiles visibles à l'oeil nu étaient classées en 6 catégories, les étoiles les plus brillantes étant celles de première magnitude.

En 1856, N^r POGSON vérifia la découverte de HERSCHEL : une étoile de 1⁰ magnitude est à peu près 100 fois plus brillante qu'une étoile de 6⁰ magnitude. On put ainsi quantifier mathématiquement l'échelle. Un intervalle de 5 magnitudes correspond à un éclat multiplié par 100 donc :

$$5 = m_6 - m_1 = k \lg \frac{l_6}{l_1} = k \lg \frac{1}{100} = -2k \quad \Rightarrow \quad k = -2.5$$

$$\text{et :} \quad m = -2.5 \lg l + C$$

m est la *magnitude apparente* correspondant à la luminosité apparente l . La valeur de la constante C est fixée en attribuant une magnitude à une étoile donnée. Elle a été choisie de telle sorte que les magnitudes s'accordent au mieux à celles introduites par HIPPARQUE.

Suivant le type de récepteur qui mesure l'éclat apparent de l'étoile, on ne mesure pas exactement la même quantité d'énergie, le récepteur ayant une sensibilité dépendant de la fréquence. De ce fait, on définit autant de systèmes de magnitudes que l'on utilise de systèmes récepteurs différents.

Dans le système des magnitudes visuelles, la constante C a été fixée en attribuant la magnitude 6.55 à l'étoile λ de la constellation de la Petite Ourse. Cette étoile a été choisie parce qu'elle est proche du pôle, donc visible par tous les observateurs de l'hémisphère nord où étaient concentrés la plupart des observatoires dans la période où a débuté l'astrophysique. On l'a préféré à l'étoile polaire parce que celle-ci est d'éclat variable. On arrive alors à :

$$l = 2.52 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{-2.5m} \text{ W/m}^2 \quad (18, 59)$$

$$m = -2.5 \lg l - 19 \quad (18, 60)$$

La *magnitude absolue* M est la magnitude apparente qu'aurait l'étoile si sa distance était égale à 10 pc.

Rappelons qu'un *parsec* est la distance au système solaire et perpendiculairement à celui-ci vu de laquelle l'angle entre la direction du Soleil et celle de la Terre est égal à 1".

$$\pi r d = 180 \times 60 \times 60''$$

$$\alpha = \frac{\pi}{180 \times 60 \times 60} = \frac{1.5 \cdot 10^{11}}{d}]$$

La distance Terre-Soleil, qui est égale par définition à une *unité astronomique* (u.a.) vaut en effet $1.5 \cdot 10^{11} m$. Finalement :

$$1 \text{ pc} = d = 3.09 \cdot 10^{16} m \quad (18, 61)$$

Rappelons que *une année lumière* (a.l.) vaut :

$$1 \text{ a.l.} = 2.998 \cdot 10^8 \times 365.25 \times 24 \times 3600 m$$

$$1 \text{ a.l.} = 9.46 \cdot 10^{15} m \quad (18, 62)$$

$$\text{Donc} \quad 1 \text{ pc} \simeq 3.27 \text{ a.l.} \quad (18, 63)$$

$$l = \frac{L}{4\pi d^2}$$

$$M = m_{10 \text{ pc}} = -2.5 \lg l - 19 = -2.5 \lg L + 2.5 \lg 4\pi + 5 \lg d_{10 \text{ pc}} - 19$$

avec $d_{10 pc} = 3.09 \cdot 10^{17}$

$$M = -2.5 \lg L + 71.2 \quad (18,64)$$

$$L = 3.02 \cdot 10^{28} \cdot 10^{-\frac{2}{5}M} W \quad (18,65)$$

La différence $m - M$ porte le nom de *module de distance*. Le module de distance est nul, par définition, pour une distance de $10pc$.

$$m - M = -2.5 \lg l - 19 + 2.5 \lg L - 71.2$$

$$m - M = 2.5 \lg \frac{L}{l} - 90.2 \quad (18,66)$$

On peut également écrire, grâce à (18,46) vraie pour toute distance, et d_L étant exprimée en mètre :

$$m - M = 2.5 \lg 4\pi d_L^2 - 90.2$$

$$m - M = 5 \lg d_L - 87.45 \quad (18,67)$$

Après cet intermède, nous pouvons maintenant traduire la relation (18,58) en module de distance.

$$m - M = 2.5 \lg \left(\frac{4\pi C^2 z^2}{H_0^2 (1 + (q_0 - 1)z)} \right) - 90.2$$

Sachant que $\lg(1 + u) = \frac{1}{\ln 10} \ln(1 + u) \simeq \frac{u}{\ln 10}$ pour $u \ll 1$

$$m - M = -87.45 + 5 \lg(Cz) - 5 \lg H_0 + 1.086(1 - q_0)z$$

Si on exprime H_0 en km/(s Mpc) et Cz en km/s :

$$\begin{aligned} H_{0 \text{ nouveau}} &= H_{0 \text{ ancien}} \times 3.09 \cdot 10^{19} \\ Cz_{0 \text{ nouveau}} &= Cz_{0 \text{ ancien}} \times 10^{-3} \end{aligned}$$

$$m - M = 25 - 5 \lg H_0 + 5 \lg(Cz) + 1.086(1 - q_0)z \quad (18,68)$$

35. Résultats expérimentaux. - Nous présentons ici les résultats expérimentaux correspondants à l'étude théorique précédente.

Pour avoir accès à la valeur de H_0 à partir de la formule (18,68), il suffit de l'appliquer à un seul objet pour lequel le terme en q_0 est négligeable, donc pour lequel $z \leq 0.1$. Pour avoir accès à q_0 , il faut étudier la courbe correspondant à la formule pour différentes valeurs de z supérieures à 0.1 de façon à ce que le terme en q_0 ne soit plus négligeable.

Comme nous l'avons dit au § 31, les objets considérés sont les galaxies elliptiques de type E .

Lorsqu'on étudie un amas dont toutes les galaxies sont à peu près à la même distance, on considère que les galaxies les plus brillantes de cet amas ont la même magnitude absolue que la galaxie $NGC\ 4472 = M49$, la galaxie elliptique la plus brillante de l'amas de la Vierge. Sa magnitude absolue est supposée être : $M = -21.7$.

On peut mentionner ici que la distance de l'amas de la Vierge est calculée grâce aux amas globulaires. On considère que les plus brillants amas globulaires de la galaxie $M87$ (très riche en amas globulaires) ont la même luminosité absolue que l'amas globulaire $B282$, le plus brillant de la galaxie d'Andromède $M31$. On trouve alors pour $M87$ une distance d'environ 50 millions d'années lumières.

Différentes corrections sont à prendre en compte. Nous ne citons que les principales : tout d'abord, les appareils de détections ne sont sensibles qu'à certaines fréquences du spectre électromagnétique. Seule la luminosité dans ces fréquences est mesurée. Compte tenu du décalage vers le rouge, cela correspond à une mesure de la luminosité dans une autre gamme de fréquence pour la galaxie émissive. Nous n'entrerons pas ici dans le détail de la modification correspondante de la formule.

Il faut prendre en compte l'absorption de la lumière par les gaz et les poussières du plan de notre galaxie. L'absorption par les régions situées entre les galaxies est supposée négligeable.

Enfin, plus on regarde loin, plus on regarde des galaxies jeunes. Il est possible que les galaxies les plus brillantes n'aient pas une luminosité constante au cours de leur évolution. On peut penser qu'elles sont plus brillantes au début de leur vie quand elles donnent naissance à beaucoup de grosses étoiles à vies brèves. D'un autre côté, on sait que les galaxies se rencontrent parfois et peuvent fusionner en donnant naissance à des galaxies de plus en plus grosses. Dans ce cas, on a l'effet inverse, plus on regarde loin plus on a des galaxies faibles.

Il faut également mentionner l'effet *Scott* : lorsqu'on observe des amas très lointains, on peut sans s'en rendre compte sélectionner ceux qui ont les galaxies les plus brillantes. Lorsqu'on regarde plus loin, les objets considérés auront donc une plus grande luminosité absolue.

SANDAGE en 1970 sélectionna 41 amas de galaxies. Nous présentons (fig. 18.11) le résultat des mesures de z en fonction de la magnitude apparente m . Les différents effets perturbateurs ont été évalués. Les magnitudes absolues étaient toutes considérées égales à -21.7 . Sur la même figure, sont tracées les trois courbes théoriques correspondant à l'équation (18,68) pour $q = 0$; $q = 1$; $q = 2$. Les répartitions des points correspondent bien à l'équation (18,68) avec :

$$H_0 \simeq 75 \text{ km}/(\text{sec Mpc}) \quad \text{et} \quad q_0 \simeq 1.2 \pm 0.4$$

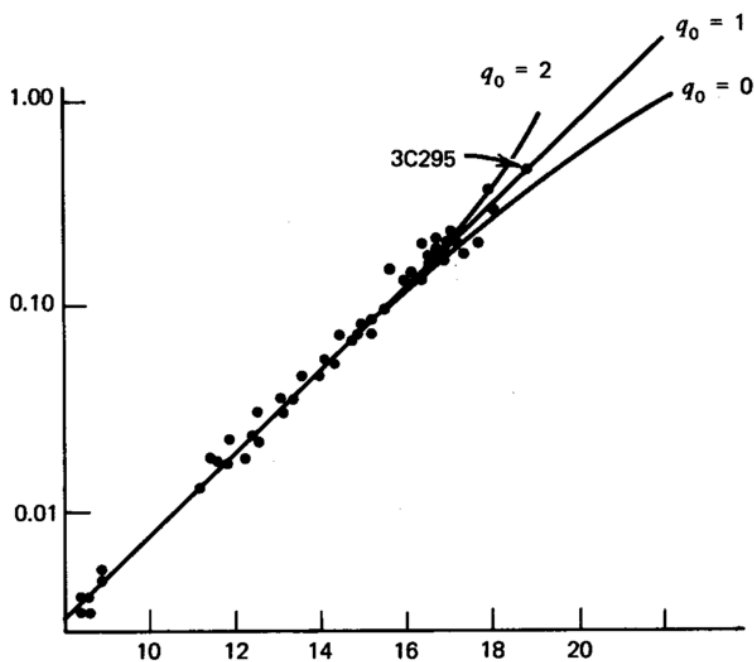


Fig. 18.11

À l'heure actuelle, il y a un consensus pour considérer que :

$$50 \text{ km}/(\text{s Mpc}) \leq H_0 \leq 130 \text{ km}/(\text{s Mpc}) \quad (18, 69)$$

et :

$$q_0 \simeq 1 \pm 0.5 \quad (18, 70)$$

Ceci place q_0 vraiment très proche de la valeur critique de $\frac{1}{2}$, et on ne peut pas conclure sur un espace ouvert ou fermé. Pour que q_0 soit actuellement si proche de cette valeur critique, il a fallu qu'il en soit extrêmement proche dans les époques antérieures et, pourquoi ne pas supposer qu'encore maintenant $q_0 \simeq 0.5$? Ceci revient à ne pas faire jouer à notre époque un rôle particulier. En effet, la valeur

$q_0 \simeq 0.5$ est la seule pour laquelle q_0 est constant au cours du temps (voir § 39). Nous examinerons de nouveau cette question au § 42.

36. L'ère de la matière dominante. - Nous allons détailler à partir de maintenant l'évolution et la structure de l'univers pour la phase dans laquelle la matière est dominante. Nous examinerons ensuite le lien avec les données d'observation.

Nous avons vu au § 23 que lorsque la matière (particules animées de vitesses faibles devant celle de la lumière) est dominante, $\rho \propto \frac{1}{S^3}$; tandis que lorsque les radiations (particules ultrarelativistes) sont dominantes, $\rho \propto \frac{1}{S^4}$. Nous avons également déjà vu ces relations au § 15.

Actuellement la densité d'énergie des formes connues de radiation est $\frac{1}{100}$ de celle de la masse au repos de la partie de la matière qui est animée d'une vitesse faible devant celle de la lumière (ce que nous appelons simplement la matière). En accord avec le fait que $\frac{\rho_{\text{radiation}}}{\rho_{\text{matière}}} \propto \frac{1}{S}$ (cela suppose que la matière est découplée des radiations), nous pouvons en conclure que l'expansion de l'univers a été commandée par son contenu de matière non relativiste au moins depuis la période où S était égal à $\frac{1}{100}$ de sa valeur actuelle (voir également le § 43).

Cette période est très antérieure à l'instant d'émission de la lumière par les objets les plus lointains que nous observons (en dehors du rayonnement fossile). En effet, d'après la formule (18,20) donnant le décalage vers le rouge en fonction de S , cette période correspond à un décalage vers le rouge de 100, alors que les objets les plus lointains que nous observons, les quasars, ont un décalage vers le rouge inférieur ou égal à 4.9!

Seule l'ère où la matière est dominante est donc accessible aux observations astronomiques d'objets individuels. Par contre, l'étude du rayonnement fossile donne des informations sur l'ère où les radiations étaient dominantes.

L'étude éventuelle dans le futur d'un rayonnement fossile de neutrinos ou d'ondes gravitationnelles pourrait donner d'autres informations sur cette ère de radiations, informations sur une période antérieure à celle correspondant au rayonnement électromagnétique fossile.

Pour pouvoir étudier quantitativement les modèles d'univers correspondant à l'ère de matière, nous allons avoir besoin de deux relations que nous développons au paragraphe suivant.

37. Pression et densité de l'univers actuel. - Nous pouvons écrire deux formules, vraies quelle que soit l'ère considérée, donnant la pression et la densité de l'univers actuel en fonction de k , S_0 , la constante de HUBBLE et le paramètre de décélération.

En remplaçant ρ_c par sa valeur, l'équation (18,37) nous donne, pour l'époque présente, notée avec l'indice 0 :

$$\begin{aligned}
1 + \frac{kC^2}{S^2 H^2} &= \frac{\rho}{\rho_c} \\
\frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_0 &= 1 + \frac{kC^2}{S_0^2 H_0^2} \\
\rho_0 &= \frac{3}{8\pi G} \left(\frac{kC^2}{S_0^2} + H_0^2 \right)
\end{aligned} \tag{18,71}$$

Rappelons (18,22) :

$$\begin{aligned}
\dot{S}^2 + kC^2 &= \frac{8\pi G}{3} \rho S^2 \\
\dot{S} \ddot{S} &= \frac{4\pi G}{3} \dot{\rho} S^2 + \frac{8\pi G}{3} \rho S \dot{S} \\
\frac{\ddot{S}}{\dot{S}^2} &= \frac{4\pi G}{3} \frac{\dot{\rho}}{\dot{S}} \left(\frac{S}{\dot{S}} \right)^2 + \frac{8\pi G}{3} \rho \frac{S}{\dot{S}^2}
\end{aligned} \tag{18,72}$$

Rappelons (18,23) :

$$\dot{\rho} + 3 \left(\rho + \frac{p}{C^2} \right) \frac{\dot{S}}{S} = 0$$

(18,72) donne, compte tenu de (18,23), (18,15) et (18,39) :

$$\begin{aligned}
-\frac{q_0}{S_0} &= \frac{4\pi G}{3} \left(-\frac{3}{S_0} \left(\rho_0 + \frac{p_0}{C^2} \right) \right) \frac{1}{H_0^2} + \frac{8\pi G}{3} \rho_0 \frac{1}{H_0^2} \frac{1}{S_0} \\
-q_0 &= -4\pi G \left(\rho_0 + \frac{p_0}{C^2} \right) \frac{1}{H_0^2} + \frac{8\pi G}{3} \rho_0 \frac{1}{H_0^2} \\
-q_0 &= -\frac{4\pi G}{3} \frac{\rho_0}{H_0^2} - \frac{4\pi G p_0}{C^2 H_0^2}
\end{aligned}$$

(18,71) donne :

$$\begin{aligned}
-q_0 &= -\frac{1}{2} - \frac{kC^2}{2H_0^2 S_0^2} - \frac{4\pi G}{C^2} \frac{p_0}{H_0^2} \\
\frac{4\pi G}{C^2 H_0^2} p_0 &= q_0 - \frac{1}{2} - \frac{kC^2}{2H_0^2 S_0^2} \\
p_0 &= \frac{C^2}{8\pi G} H_0^2 (2q_0 - 1) - \frac{kC^4}{8\pi G S_0^2}
\end{aligned}$$

$$p_0 = -\frac{C^2}{8\pi G} \left(\frac{kC^2}{S_0^2} + H_0^2 (1 - 2q_0) \right) \quad (18,73)$$

Jusqu'à présent, nous étions dans le cas général. Envisageons maintenant ce qui se passe dans l'ère de matière dominante.

$p_0 \simeq 0$; (18,73) donne alors :

$$\frac{kC^2}{S_0^2} = H_0^2 (2q_0 - 1) \quad (18,74)$$

Et (18,71) donne :

$$\rho_0 = \frac{3}{8\pi G} (2q_0 H_0^2) = 2q_0 \rho_c \quad (18,75)$$

Formule déjà trouvée dans le cas où la matière est prépondérante au § 25 (formule (18,40)).

La connaissance de H_0 et q_0 permet en principe de calculer ρ_0 par (18,75). La valeur de q_0 donne la valeur de k ; (18,74) donne alors accès à S_0 .

Actuellement, la valeur de k est inconnue, et la valeur numérique de S est donc également inconnue.

Le terme en H_0^2 dans (18,71) est de toute manière prépondérant.

Il est donc très difficile d'avoir accès au facteur d'échelle de l'univers S_0 qui est pour l'instant totalement inconnu. Cependant, cet accès donnant connaissance de la "*dimension caractéristique de l'univers*" est théoriquement possible. Dans le cas où l'espace n'est pas plat, cet accès est en principe possible en construisant un immense triangle avec trois droites (ficelles tendues!) et en mesurant l'écart de la somme des angles à 180^0 . On a alors la courbure scalaire de l'espace donc S d'après la formule (18,7). On a également k (somme des angles $>$ ou $<$ 180^0 , suivant que $k > 0$ ou $k < 0$). Remarquons que la détermination de S expérimentalement n'a un sens physique que pour $k \neq 0$. Autrement, une redéfinition de la variable r change S . Si $k \neq 0$ la valeur de k égale à ± 1 impose r , et S devient mesurable.

38. Résolution des équations. - Nous allons déterminer ici la fonction $S(t)$ pour l'univers de matière.

Partons de (18,36) :

$$\dot{S}^2 + kC^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho S^2$$

$$\text{Avec : } \quad \rho = \rho_0 \left(\frac{S}{S_0} \right)^{-3}$$

$$\frac{kC^2}{S_0^2} = H_0^2 (2q_0 - 1)$$

$$\frac{8\pi G \rho_0}{3} = 2q_0 H_0^2$$

Il vient :

$$\dot{S}^2 + S_0^2 H_0^2 (2q_0 - 1) = \frac{8\pi G}{3} \rho_0 \left(\frac{S}{S_0} \right)^{-3} S^2$$

$$\dot{S}^2 + S_0^2 H_0^2 (2q_0 - 1) = 2q_0 H_0^2 \frac{S^{-1}}{S_0^{-3}}$$

$$\left(\frac{\dot{S}}{S_0} \right)^2 + (2q_0 - 1) H_0^2 = 2q_0 H_0^2 \frac{S_0}{S}$$

$$\left(\frac{\dot{S}}{S_0} \right)^2 = H_0^2 \left(1 - 2q_0 + 2q_0 \frac{S_0}{S} \right)$$

$$\frac{\dot{S}}{S_0} = \pm H_0 \left(1 - 2q_0 + 2q_0 \frac{S_0}{S} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (18, 76)$$

$$dt = \pm \frac{1}{H_0} d \left(\frac{S}{S_0} \right) \left(1 - 2q_0 + 2q_0 \frac{S_0}{S} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (18, 77)$$

$$t = \frac{1}{H_0} \int_0^{\frac{s}{s_0}} \left(1 - 2q_0 + \frac{2q_0}{x} \right)^{-\frac{1}{2}} dx \quad (18, 78)$$

En prenant $t = 0$ origine des temps, pour $S = 0$. L'âge actuel de l'univers est donc :

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^1 \left(1 - 2q_0 + \frac{2q_0}{x} \right)^{-\frac{1}{2}} dx$$

Nous allons maintenant examiner ce que donne l'équation (18,78) suivant les 3 valeurs de k .

$$\text{(A)} \quad q_0 = \frac{1}{2}, \quad k = 0, \quad \rho = \rho_c$$

$$t = \frac{1}{H_0} \int_0^{\frac{S}{S_0}} \left(\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{H_0} \int_0^{\frac{S}{S_0}} \sqrt{x} dx$$

$$H_0 t = \frac{2}{3} \left(\frac{S}{S_0}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (18, 79)$$

$$S = S_0 \left(\frac{3H_0 t}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \quad (18, 80)$$

Cette fonction est constamment croissante. Il n'y a pas de limite à l'expansion de l'univers, $t \rightarrow \infty \Rightarrow S \rightarrow \infty$. L'âge t_0 de l'univers vaut :

$$\left(\frac{3H_0 t_0}{2}\right) = 1$$

$$t_0 = \frac{2}{3} \frac{1}{H_0} \quad (18, 81)$$

$$(B) \quad q_0 > \frac{1}{2}, \quad 1 - 2q_0 < 0$$

Cherchons la valeur maximale possible de x :

$$1 - 2q_0 + \frac{2q_0}{x} = 0$$

$$x_m = \frac{2q_0}{2q_0 - 1}$$

$$\text{Donc} \quad 0 \leq x_m \leq \frac{2q_0}{2q_0 - 1}$$

Au delà, lorsque t croît, x doit décroître et il faut prendre le signe $-$ devant l'intégrale.

Pour calculer explicitement l'intégrale, effectuons le changement de variable suivant :

$$1 - \cos \theta = \frac{2q_0 - 1}{q_0} x$$

À $x = 0$ correspond $\cos \theta = 1$, $\theta = 0$. À $x = x_m$ correspond $1 - \cos \theta_m = 2$
 $\cos \theta_m = -1 \quad \theta_m = \pi$.

$$1 - 2q_0 + \frac{2q_0}{x} = 1 - 2q_0 + 2q_0 \frac{2q_0 - 1}{q_0} \frac{1}{1 - \cos \theta} = 1 - 2q_0 + \frac{4q_0 - 2}{1 - \cos \theta}$$

$$= \frac{-1 + 2q_0 - (1 - 2q_0) \cos \theta}{1 - \cos \theta} = (2q_0 - 1) \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta}$$

$$\sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} = \tan \frac{\theta}{2}$$

$$H_0 t = \int_0^{\theta\left(\frac{S(t)}{S_0}\right)} \frac{q_0}{2q_0 - 1} \sin \theta \, d\theta \frac{1}{\sqrt{2q_0 - 1}} \tan \frac{\theta}{2}$$

$$\tan \frac{\theta}{2} \sin \theta \, d\theta = (1 - \cos \theta) \, d\theta$$

$$H_0 t = \frac{q_0}{(2q_0 - 1)^{\frac{3}{2}}} [\theta - \sin \theta]_0^{\theta\left(\frac{S(t)}{S_0}\right)}$$

Nous avons donc pour :

$$1 - \cos \theta = \frac{2q_0 - 1}{q_0} \frac{S(t)}{S_0} \quad (18, 82)$$

la valeur de t qui est donnée par la formule :

$$H_0 t = \frac{q_0}{(2q_0 - 1)^{\frac{3}{2}}} (\theta - \sin \theta) \quad (18, 83)$$

Aux facteurs en q_0 près, il s'agit de l'équation paramétrique d'une cycloïde. La courbe $S(t)$ est une cycloïde déformée par la multiplication des coordonnées x et y par un facteur constant (fig. 18.12).

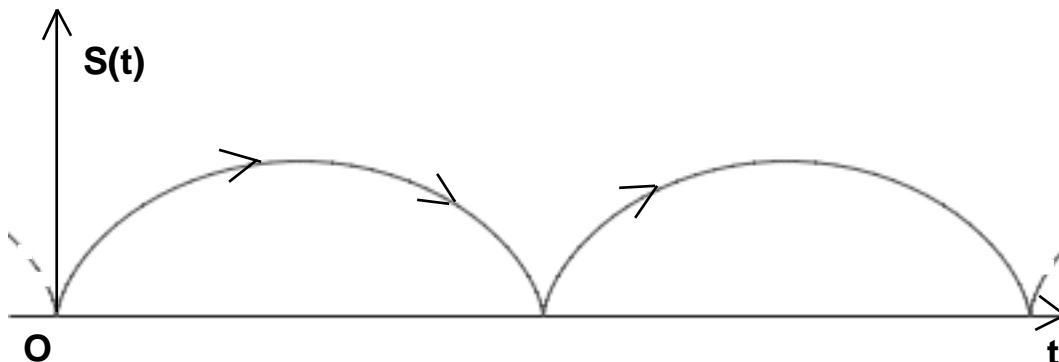


Fig. 18.12

La valeur maximale de $S(t)$ est obtenue pour $\theta = \pi$:

$$S(t) = \frac{2q_0}{2q_0 - 1} S_0$$

comme prévu par la valeur déjà trouvée de x_m .

Le temps t_m vaut :

$$t_m = \frac{q_0 \pi}{H_0 (2q_0 - 1)^{\frac{3}{2}}}$$

L'instant présent est déterminé par : $S(t_0) = S_0$ dans (18,82).

$$1 - \cos \theta_0 = \frac{2q_0 - 1}{q_0} = 2 - \frac{1}{q_0}$$

$$\cos \theta_0 = -1 + \frac{1}{q_0} \quad (18, 84)$$

Et l'âge de l'univers vaut donc :

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \frac{q_0}{(2q_0 - 1)^{\frac{3}{2}}} \left(\arccos \left(\frac{1}{q_0} - 1 \right) - \frac{1}{q_0} \sqrt{2q_0 - 1} \right) \quad (18, 85)$$

en effet :

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{\frac{2}{q_0} - \frac{1}{q_0^2}}$$

$$\sin \theta = \frac{1}{q_0} \sqrt{2q_0 - 1}$$

(C) $q_0 < \frac{1}{2}$; x peut alors être aussi grand qu'on veut.

Pour calculer l'intégrale donnant t , effectuons le changement de variable :

$$1 - \cosh \psi = \frac{2q_0 - 1}{q_0} x$$

$x = 0$ pour $\cosh \psi = 1$ et $\psi = 0$; d'autre part, $x \rightarrow +\infty$ pour $\psi \rightarrow +\infty$.

$$H_0 t = \int_0^{\psi\left(\frac{S(t)}{S_0}\right)} \frac{q_0}{(1 - 2q_0)^{\frac{3}{2}}} \underbrace{\sqrt{\frac{\cosh \psi - 1}{\cosh \psi + 1}} \sinh \psi}_{\downarrow} d\psi$$

$$= \tanh \frac{\psi}{2} 2 \sinh \frac{\psi}{2} \cosh \frac{\psi}{2} d\psi$$

$= 2 \sinh^2 \frac{\psi}{2} d\psi = (\cosh \psi - 1) d\psi$ dont la primitive est : $\sinh \psi - \psi$. En conclusion :

$$\cosh \psi - 1 = \frac{1 - 2q_0}{q_0} \frac{S(t)}{S_0} \quad (18,86)$$

$$H_0 t = \frac{q_0}{(1 - 2q_0)^{\frac{3}{2}}} (\sinh \psi - \psi) \quad (18,87)$$

L'instant présent est déterminé par $S(t_0) = S_0$ dans (18,86).

$$\begin{aligned} \cosh \psi_0 &= 1 - 2 + \frac{1}{q_0} = \frac{1}{q_0} - 1 \\ \cosh \psi_0 &= \frac{1}{q_0} - 1 \end{aligned} \quad (18,88)$$

et l'âge de l'univers est :

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \frac{q_0}{(1 - 2q_0)^{\frac{3}{2}}} \left(-\operatorname{argcosh} \left(\frac{1}{q_0} - 1 \right) + \sqrt{1 - 2q_0} \frac{1}{q_0} \right)$$

en effet :

$$\begin{aligned} \sinh \psi &= \sqrt{\cosh^2 \psi - 1} = \sqrt{\frac{1}{q_0^2} - \frac{2}{q_0}} \\ \sinh \psi &= \frac{1}{q_0} \sqrt{1 - 2q_0} \end{aligned} \quad (18,89)$$

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \left(\frac{1}{1 - 2q_0} - \frac{q_0}{(1 - 2q_0)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{argcosh} \left(\frac{1}{q_0} - 1 \right) \right) \quad (18,90)$$

39. Variation du paramètre de décélération. - Les formules (18,84) et (18,88) reliant la valeur de θ_0 ou ψ_0 à q_0 sont valables bien évidemment quel que soit l'instant présent noté par l'indice 0 utilisé pour calibrer les équations.

Ainsi, pour $k = 1$, l'équation (18,84) donne :

$$q(t) = \frac{1}{1 + \cos \theta(t)} \quad (18,91)$$

q varie de $\frac{1}{2}$ pour $t = 0$, $\theta = 0$ à ∞ pour $t = t_m$, $\theta = \pi$. $q = \infty$ correspond en effet à $\dot{S} = 0$ dans (18,39). Ensuite, q décroît de ∞ à $\frac{1}{2}$ lorsque l'univers se recontracte.

Pour $k = -1$, l'équation (18,88) donne :

$$q(t) = \frac{1}{1 + \cosh \psi(t)} \quad (18,92)$$

q varie de $\frac{1}{2}$ pour $t = 0$, $\psi = 0$ à 0 pour $t \rightarrow \infty$; donc $\frac{\rho}{\rho_c} = 2q$ tend également vers 0 pour $t \rightarrow \infty$.

Par contre pour $k = 0$, $q = Cte = \frac{1}{2}$. Ainsi aucune signification particulière ne peut être attachée à une valeur précise de q_0 , exceptée la valeur $\frac{1}{2}$.

Nous résumons sur la figure figure 18.13 les trois évolutions possibles pour l'univers suivant que $k = -1$; $k = 0$; $k = +1$. Les nombres le long des courbes donnent les valeurs du paramètre de décélération q_0 à différentes époques.

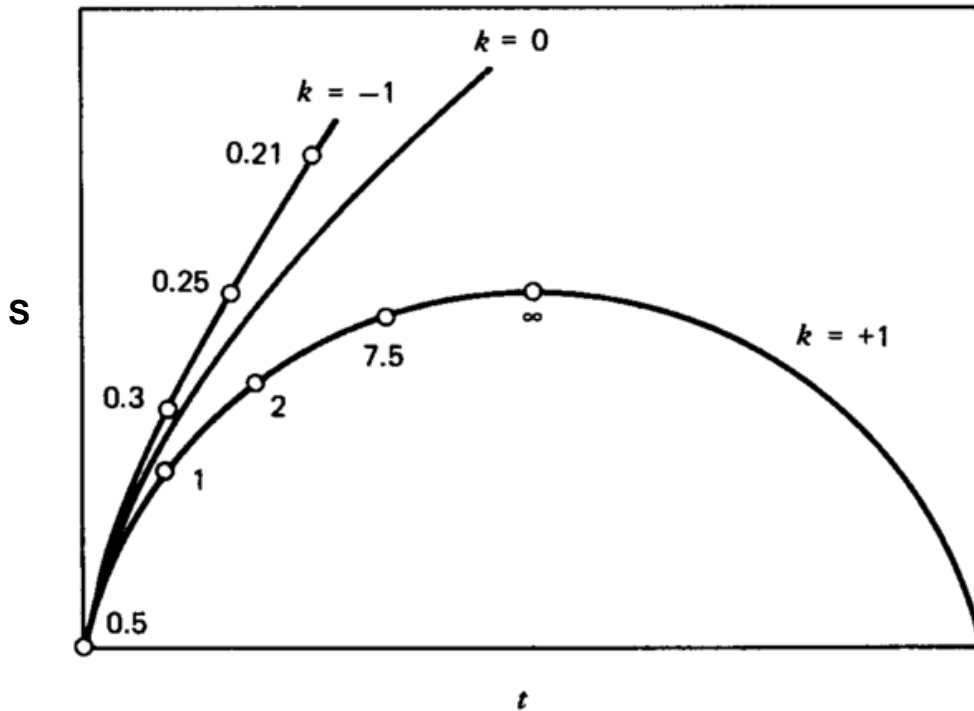


Fig. 18.13

40. Relation décalage vers le rouge distance lumineuse pour des distances quelconques. - Grâce aux paragraphes précédents, nous connaissons maintenant complètement la dynamique de l'univers pour **l'ère de matière**, c'est à dire la fonction $S(t)$. Nous pouvons donc maintenant réaliser le programme défini au paragraphe 31 pour des distances quelconques. Rappelons que ce programme a été réalisé au paragraphe 33 pour des distances faibles devant l'échelle de l'expansion de l'univers (distance à partir de laquelle elle devient significative), au moyen de développements limités.

Commençons par le cas : $k = 0$, $q_0 = \frac{1}{2}$.

$$\int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = r_1$$

Posons :

$$x = \frac{S}{S_0} = \frac{1}{1+z} \quad (18,93)$$

(18,78) avec $q_0 = \frac{1}{2}$ donne la valeur de dt et :

$$\int_{t_1}^{t_0} C \frac{dt}{S(t)} = C \int_{t_1}^{t_0} \frac{1}{S_0} \frac{\frac{1}{H_0} dx \sqrt{x}}{\frac{S(t)}{S_0}} = C \frac{1}{S_0 H_0} \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{C}{S_0 H_0} 2 \left[x^{\frac{1}{2}} \right]_{t_1}^{t_0}$$

(18,19) donne :

$$r_1 = \frac{2C}{S_0 H_0} \left(\sqrt{1} - \sqrt{\frac{1}{1+z}} \right)$$

$$r_1 = 2C \frac{1+z - \sqrt{1+z}}{S_0 H_0 (1+z)} \quad (18,94)$$

Nous trouvons donc la formule exacte redonnant (18,55) sous forme de développement limité (exercice 18.6).

Envisageons maintenant le cas : $k = 1, q_0 > \frac{1}{2}$.

$$\int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - r^2}} = \arcsin r_1$$

et avec (18,78) :

$$\int_{t_1}^{t_0} C \frac{dt}{S(t)} = C \int_{t_1}^{t_0} \frac{1}{S_0 H_0} \frac{dx}{x} \left(1 - 2q_0 + \frac{2q_0}{x} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$1 - \cos \theta = \frac{2q_0 - 1}{q_0} x$$

On obtient :

$$C \int \frac{1}{S_0 H_0} \frac{1}{1 - \cos \theta} \sin \theta d\theta \frac{1}{\sqrt{2q_0 - 1}} \tan \frac{\theta}{2}$$

Avec (18,74) et compte tenu du fait que les fonctions trigonométriques s'éliminent, on obtient :

$$\int_{t_1}^{t_0} d\theta = \theta(t_0) - \theta(t_1) = \arccos \left(1 - \frac{2q_0 - 1}{q_0} \right) - \arccos \left(1 - \frac{2q_0 - 1}{q_0(1+z)} \right)$$

(18,19) donne :

$$r_1 = \sin \left(\arccos \left(1 - \frac{2q_0 - 1}{q_0} \right) \right) \left(1 - \frac{2q_0 - 1}{q_0(1+z)} \right) - \sin \left(\arccos \left(1 - \frac{2q_0 - 1}{q_0(1+z)} \right) \right) \left(1 - \frac{2q_0 - 1}{q_0} \right)$$

$$r_1 = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{2q_0 - 1}{q_0} \right)^2} \left(1 - \frac{2q_0 - 1}{q_0(1+z)} \right) - \sqrt{1 - \left(1 - \frac{2q_0 - 1}{q_0(1+z)} \right)^2} \left(1 - \frac{2q_0 - 1}{q_0} \right)$$

$$r_1 = \frac{1}{q_0^2(1+z)} \left(\sqrt{2q_0 - 1} (q_0 z + 1 - q_0) - \sqrt{2q_0 z + 1} \sqrt{2q_0 - 1} (1 - q_0) \right)$$

et avec (18,74) :

$$r_1 = C \frac{q_0 z + (q_0 - 1) (-1 + \sqrt{2q_0 z + 1})}{S_0 H_0 q_0^2 (1+z)} \quad (18,95)$$

Le dernier cas : $k = -1$, $q_0 < \frac{1}{2}$, donne exactement la même formule pour r_1 (voir exercice 18.8). De plus, la formule précédente redonne la valeur trouvée pour r_1 lorsque $k = 0$. Dans tous les cas, la valeur de r_1 est donc donnée par cette formule.

Cette formule donne la relation décalage vers le rouge, distance lumineuse pour des décalages vers le rouge arbitraires. Nous avons trouvé cette relation au § 33 sans utiliser un modèle précis d'univers, en utilisant des développements limités, donc pour des décalages vers le rouge faibles.

Rappelons (18,47) :

$$d_L = r_1 \frac{S^2(t_0)}{S(t_1)}$$

$$d_L = r_1 S(t_0) (1+z)$$

Et finalement :

$$d_L = \frac{C}{H_0 q_0^2} \left(z q_0 + (q_0 - 1) \left(-1 + \sqrt{2q_0 z + 1} \right) \right) \quad (18,96)$$

Nous avons ainsi une formule rigoureuse pour $d_L(z)$ en fonction de H_0 et q_0 . On peut vérifier (exercice 18.7), que l'on retrouve la formule (18,57) obtenue au § 33, en effectuant le développement limité de (18,96) (développement au deuxième

ordre de la racine carrée). Avec (18,67), nous avons une relation rigoureuse pour toutes les distances, entre le module de distance, z , q_0 et H_0 .

41. Autres méthodes d'accès aux distances lointaines dans l'univers. - La méthode de comparaison luminosité apparente luminosité absolue est basée rappelons le, sur l'hypothèse que les galaxies elliptiques les plus brillantes (de type E) des amas galactiques ont toujours à peu près la même luminosité absolue. Actuellement, une des galaxies les plus lointaines de ce type, la radio-galaxie 3C295 a un décalage vers le rouge $z = 0.46$. La méthode précédente ne peut donc pas s'appliquer au delà de cette distance.

Les Quasars, dont on pense qu'ils sont liés à la présence d'un trou noir actif (engloutissant de la matière) au cœur du noyau des galaxies, ont des décalages vers le rouge compris entre $z = 0.16$ et $z = 4.9$. Ils permettent donc de sonder l'univers beaucoup plus loin. Cependant, la méthode précédente ne peut plus être utilisée pour eux, car ils ont des luminosités variant d'un facteur 100 ou plus. Cependant, récemment une corrélation a été trouvée entre la luminosité absolue des quasars et l'intensité de certaines raies spectrales. Les quasars pourraient alors être utilisés pour sonder l'univers beaucoup plus loin avec la méthode décalage vers le rouge distance lumineuse, leur luminosité absolue étant connue.

À l'avenir, cette méthode pourra également être utilisée avec les supernovae. Les supernovae peuvent être détectées à de très grandes distances. Avec les nouveaux télescopes à venir, ces distances augmenteront encore considérablement. Des modèles théoriques associés à différentes mesures physiques pourront permettre d'avoir accès à la luminosité absolue de ces supernovae.

Il existe deux autres méthodes possibles pour avoir accès aux mesures des distance lointaines dans l'univers et à la géométrie à grande échelle de l'espace. La première que nous abordons est basée sur le **comptage des objets lointains** :

Supposons qu'une espèce d'objets, les quasars par exemple, soit répartie d'une manière homogène dans l'espace. Supposons d'autre part que leur nombre dans une région de l'espace reste constant au cours du temps. Cette hypothèse peut être valable parce qu'il n'y a plus création au bout d'un certain temps de nouveaux quasars, et que pendant un certain laps de temps, il n'y a pas non plus de disparition de ceux-ci.

L'hypothèse peut être valable d'une autre manière, si en moyenne, il y a apparition d'un nouveau quasar quand un quasar disparaît.

Le comptage du nombre de quasars en fonction du décalage vers le rouge, donne alors accès, à la géométrie à grande échelle de l'espace à trois dimensions :

Prenons une analogie à deux dimensions. Supposons un plan et une sphère recouverts de points régulièrement espacés, leur densité étant la même pour

le plan et la sphère. Comptons le nombre de points observés en fonction de la distance à un point choisi arbitrairement. Lorsque la distance augmente, le nombre de points croît moins vite pour la sphère que pour le plan, et ce d'autant plus que le rayon de la sphère est petit (fig. 18.14).

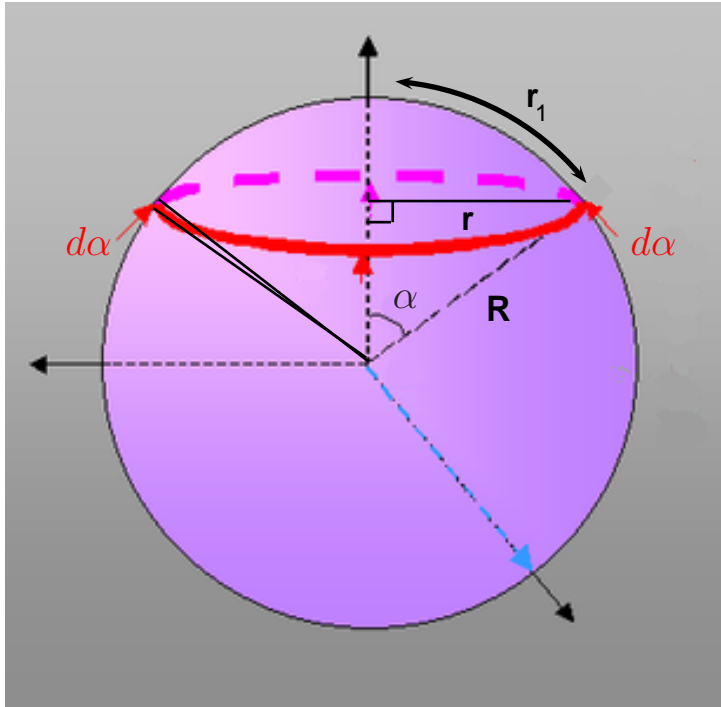


Fig. 18.14

$$dS = R d\alpha 2\pi r$$

$$r = R \sin \alpha = R \sin \frac{r_1}{R}$$

$$d\alpha = \frac{dr_1}{R}$$

$$dS = R \frac{dr_1}{R} 2\pi R \sin \left(\frac{r_1}{R} \right)$$

$$dS_{\text{sphère}} = 2\pi R \sin \left(\frac{r_1}{R} \right) dr_1 < 2\pi R \frac{r_1}{R} dr_1 = 2\pi r_1 dr_1 = dS_{\text{plan}}$$

Il faut ajouter d'autre part l'effet correspondant à l'évolution de $S(t)$. L'expansion de l'univers contribue en effet à ce que les objets lointains soient répartis dans un volume plus petit donc soient plus concentrés. Notons que ces deux effets, géométrie de l'espace et évolution au cours du temps ont été pris en compte par le calcul complet que nous avons fait en ce qui concerne la relation décalage vers le rouge distance lumineuse. Le calcul rigoureux prend également en compte la modification de la loi de HUBBLE due à l'accélération q (variation de H avec t).

Actuellement, cette méthode ne donne pas de résultat concluant. La raison principale en est que le nombre de quasars dans une région de l'espace n'est sans doute pas constant, et leur taux de variation est pour le moment inconnu. Il semble que le nombre de quasars ait connu son apogée lorsque l'âge de l'univers était environ le tiers de son âge actuel.

Cette méthode nécessite d'autre part de considérer de très nombreux objets avec des décalages vers le rouge variés.

On peut bien sûr envisager également d'appliquer cette méthode avec des galaxies. Deux physiciens de l'université de Princeton, en utilisant un échantillon de 1000 galaxies allant jusqu'à un décalage vers le rouge de 0.5 ont trouvé récemment avec cette méthode que l'univers était justement plat.

De toute façon, cette méthode suggère qu'il y a beaucoup de matière cachée. Là encore, l'évolution possible des galaxies peut fausser le comptage.

La deuxième méthode dont nous parlerons ici est basée sur l'étude du **diamètre angulaire apparent** d'objets connus en fonction de leur décalage vers le rouge. La géométrie de l'espace a là aussi une influence par l'effet de lentille à grande échelle qu'elle joue.

Prenons encore l'exemple d'un espace à deux dimensions sphérique. Le point diamétralement opposé au point d'observation est vu avec un diamètre angulaire de 360° puisque des rayons arrivent de ce point de toutes les directions ! Cependant, ce point a une dimension nulle ! On voit là un effet de grossissement causé par la géométrie de l'espace lui-même (fig. 18.15). Cet effet est à distinguer de l'effet de lentille gravitationnelle créé par une galaxie sur la lumière qui passe dans son voisinage. C'est un effet de lentille gravitationnelle du vide lui-même sur grande échelle !

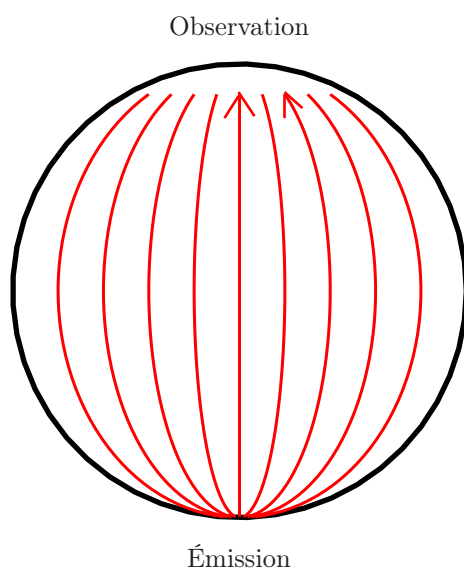


Fig. 18.15

Bien que actuellement cette méthode ne donne pas de résultats fiables, elle est riche d'espoir pour l'avenir. Ceci grâce à la possibilité de mesurer les diamètres angulaires avec une meilleure précision par des procédés interférométriques dans le futur.

Une autre méthode, proche de celle-ci, consisterait à mesurer les parallaxes d'objets très lointains, entre la Terre et un satellite dans le système solaire, par interférométrie.

42. Bilan des connaissances actuelles. - Plus on observe loin, plus on observe dans le passé, et plus les radiations observées sont décalées vers le rouge. La comparaison luminosité apparente, luminosité absolue, ou le comptage des objets, ou la comparaison diamètre angulaire apparent, diamètre angulaire réel, cela en liaison avec le décalage vers le rouge, sont des méthodes théoriquement capables, avec les équations de la Relativité générale, de nous donner une description précise de la géométrie de l'univers et de son évolution. En particulier, les valeurs de H_0 et q_0 peuvent être connues.

La valeur de q_0 est à relier à la valeur de la distribution moyenne de matière (équation (18,40)). Cette valeur peut être connue par la connaissance des particules présentes dans notre environnement local. Une partie de ces particules peuvent ne pas être lumineuse (matière cachée). Voir à ce sujet l'exercice 18.4. Un autre moyen d'avoir accès à cette densité locale de matière-énergie est l'étude des mouvements les uns par rapport aux autres des galaxies dans un amas. La valeur de la densité de matière-énergie à l'intérieur d'une galaxie peut être connue de la même manière par l'étude de la dynamique de la galaxie c'est à dire des différentes vitesses des étoiles qu'elle contient, en fonction de la distance au centre. Les effets de lentilles gravitationnelles peuvent également apporter des informations précieuses (voir § 18 du chapitre 16). Dernièrement (1990) un astrophysicien américain a présenté une analyse de résultats sur le grand attracteur (Super amas de galaxies vers lequel notre galaxie et les galaxies voisines tombent). L'étude du mouvement de ces galaxies semble indiquer que la densité de l'univers serait finalement de l'ordre de la densité critique. Là encore, comme mentionné dans le § 41, cela suppose qu'il y ait beaucoup de matière cachée (voir exercice 18.4).

Au delà des galaxies, on observe les quasars, dont certains sont bien vus au centre d'une galaxie classique, ce qui confirme leur nature de noyaux actifs de galaxies. Il semblerait qu'un quasar mette environ 500 millions d'années à se former. Les tout premiers quasars se seraient allumés à peu près un milliard d'années après le Big Bang, ce qui correspond à un décalage vers le rouge de 4.9 pour le quasar le plus lointain observé (en 1991). Au delà des quasars, on

n'observe plus d'objets individuels. On n'observe donc plus rien. On observe en effet tellement loin dans le passé que même les quasars ne sont pas encore allumés. À cette époque, aucune lumière n'est émise.

Au delà, on voit le bord de la boule de feu primordiale, à 300 000 ans environ après le Big Bang. Son rayonnement est tellement décalé vers le rouge que ce n'est plus qu'un rayonnement radio, rayonnement du corps noir à $2.735 K$ (résultat de Cobe).

Les radiations électromagnétiques ne peuvent nous donner aucune information sur les époques antérieures au moment où la boule de feu s'éteint. En effet, la boule de feu est totalement opaque aux radiations électromagnétiques.

Il sera peut être possible d'avoir des renseignements sur les époques encore plus proches du Big Bang par l'étude du rayonnement de neutrinos ou par l'étude des ondes gravitationnelles émises. Une théorie quantique de la gravitation, en liaison avec l'observation de ces ondes gravitationnelles donnera alors des informations entièrement nouvelles sur l'origine de l'univers.

La température de la frontière de la boule de feu correspond à la température où les électrons se recombinent avec les noyaux des atomes pour faire des atomes neutres. Elle est d'environ $4000 K$. La loi de PLANCK est :

$$u_\nu = T^3 \frac{8\pi h}{C^3} \left(\frac{\nu}{T}\right)^3 \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (18, 97)$$

Avec : $du = u_\nu d\nu$.

Le facteur intervenant dans la formule est $\frac{\nu}{T}$. Le décalage vers le rouge revient à faire une affinité le long de l'axe des fréquences pour la courbe de rayonnement du corps noir c'est à dire que la courbe $u(\nu)$ détectée est encore, après avoir subit le décalage vers le rouge, celle du rayonnement du corps noir. Le décalage vers le rouge a simplement abaissé la température dans le rapport $\frac{T_0}{T_1} = \frac{\nu_0}{\nu_1}$.

Ainsi le rapport des fréquences entre l'émission et l'absorption, qui correspond au décalage vers le rouge et au rapport des dimensions de l'univers entre l'émission et l'absorption, est égal au rapport des températures absolues du corps noir entre l'émission et la réception. Ce rapport est égal à $\frac{4000}{2.7} \simeq 1500$. L'univers était donc 1500 fois plus compact que maintenant.

En conclusion, les confirmations du Big Bang viennent des faits suivants :

- Il est une solution des équations de la Relativité Générale.
- Il prévoit la concentration observée en hélium et deutérium (rapport hydrogène/hélium de $\frac{1}{5}$: 20% d'hélium).

- Il prévoit le rayonnement fossile avec ses caractéristiques : température et isotropie, avec les fluctuations très faibles récemment découvertes par le satellite Cobe.

- Il y a accord entre les différentes estimations de l'âge de l'univers :

L'âge de l'univers est obtenu :

- À partir de la vitesse actuelle de récession des galaxies (loi de HUBBLE) et des équations de la Relativité générale.

- L'étude des éléments radioactifs comme le rapport des concentrations en uranium 235 et 238 donne un âge approximatif de notre galaxie. Les isotopes 235 et 238 de l'uranium sont en effet produits au moment de l'explosion en supernovae des grosses étoiles dans une proportion bien définie et connue. Des modèles de galaxie prévoient le rythme de telles explosions. La valeur mesurée du rapport $\frac{U_{235}}{U_{238}}$ avec ces modèles de galaxie donne alors l'âge des galaxies. Sachant que les protogalaxies se sont formées à peu près un milliard d'années après le Big Bang, au moment de l'apparition des quasars (effondrement du noyau en trou noir), on en déduit alors l'âge de l'univers.

- L'âge des étoiles dans les amas globulaires. Ces amas sont supposés s'être formés dès l'apparition des protogalaxies. Leurs étoiles sont donc toutes nées en même temps à ce moment. Ce sont des étoiles très vieilles de type II ne contenant pratiquement pas d'autres éléments que l'hydrogène et l'hélium. L'âge de ces étoiles, donc des amas, est déterminé par l'étude du diagramme d'HERTZSPRUNG-RUSSELL de l'amas.

L'âge le plus grand des trois et qui est le plus fiable est celui des étoiles des amas globulaires qui est de l'ordre de 15 milliards d'années au maximum. En ajoutant un milliard d'années pour la formation des galaxies et des amas globulaires, on obtient 16 milliards d'années pour l'âge de l'univers. En supposant l'espace plat ($\rho = \rho_c$), la formule (18,81) donne alors :

$$H_0 = \frac{2}{3t_0} = 1.32 \cdot 10^{-18} \text{ s}^{-1} = 41 \text{ km}/(\text{s Mpc})$$

Notons enfin que de multiples faits d'observation sont en accord avec la théorie du Big Bang : ainsi, l'évolution des galaxies sur plusieurs milliards d'années est en accord avec ce scénario. Dans un premier temps, les protogalaxies sphériques voient leur noyau s'effondrer en trous noirs (quasars) tandis que les étoiles de type II (première génération) se forment dans les amas globulaires.

Le décalage vers le rouge des quasars ainsi que l'âge des amas globulaires sont bien en accord avec ce scénario.

Lorsqu'on observe les galaxies les plus lointaines (autour de dix milliards d'années), elles semblent beaucoup plus riches en étoiles massives bleues, étoiles très chaudes et à faible durée de vie. D'autre part, ces étoiles ne contiennent pas d'éléments lourds. On pense que les premières générations d'étoiles (étoiles de type II), étoiles issues de nuages de gaz ne contenant pas d'autres éléments que l'hydrogène et l'hélium, étaient constituées d'étoiles beaucoup plus grosses que celles qui naissent maintenant, et donc à durée de vie beaucoup plus courte (quelques millions d'années). Ceci est dû à la plus grande difficulté qu'on les nuages de gaz à l'origine des protoétoiles à rayonner et à se refroidir quand ils ne contiennent pas d'éléments lourds. Dans le cas contraire, les grains de poussière rayonnent en infrarouge, ce qui est impossible pour les gaz dilués d'hydrogène et d'hélium. Ces nuages ont donc plus de mal à se refroidir et à se contracter puis à se fragmenter en petits éléments. Peu à peu, la nucléosynthèse se produisant dans ces étoiles massives enrichit les galaxies en éléments lourds. Cette évolution qui en résulte pour : le contenu en étoiles des galaxies, ainsi que pour le gradient de concentration en éléments lourds suivant la distance au centre des galaxies, suggère une naissance simultanée pour toutes les galaxies, donc est en accord avec la théorie du Big Bang.

Ensuite, peu à peu, certaines galaxies deviennent planes, tandis que la structure spirale apparaît. Une deuxième génération d'étoiles, de type I apparaît alors dans les amas ouverts à l'intérieur des bras spiraux. Ce processus produit d'une manière continue de nouvelles étoiles. Ces étoiles, dont le Soleil fait partie, ont des planètes contenant des éléments lourds, donc pouvant donner naissance à la vie.

Le halo d'amas globulaires de notre galaxie (comme de toutes les galaxies) a gardé la structure sphérique originelle.

L'âge de la Terre : 4.5 milliards d'années, mesuré par la radioactivité des roches, est bien en accord avec l'idée d'un début de l'univers remontant à plusieurs milliards d'années.

Le nombre d'éléments s'emboîtant parfaitement dans un gigantesque puzzle, une fois la solution du Big Bang trouvée, est donc fantastique, et laisse donc peu de doutes quant à la vérité de cette théorie.

43. Lien entre distance en années lumières et décalage vers le rouge.

- Compte tenu de ce qui a été dit aux § 25 et § 35, l'univers est pratiquement plat et nous pouvons considérer comme juste la formule (18,79).

$$H_0 t = \frac{2}{3} \left(\frac{S}{S_0} \right)^{\frac{3}{2}}$$

Elle correspond à l'évolution d'un univers plat dominé par la matière. Or,

on pense que l'ère de matière dominante est apparue tandis que la température de l'univers était comprise entre $1000 K$ et $10^5 K$. Ceci est très imprécis, mais est situé très tôt après le Big Bang. La plus grande partie de l'évolution de l'univers qui nous intéresse ici et pendant laquelle la physique des particules et la Mécanique quantique n'ont pas à intervenir est donc bien constituée par l'ère de matière dominante.

La formule (18,20) nous donne :

$$\frac{S(t_0)}{S(t)} = z + 1$$

Il vient :

$$H_0 t = \frac{2}{3} \frac{1}{(z + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

Pour $z = 0$, on a $H_0 t_0 = \frac{2}{3}$ (formule (18,81)) ; il vient donc :

$$t = \frac{t_0}{(z + 1)^{\frac{3}{2}}} \quad (18,98)$$

Prenons comme évaluation de l'âge de l'univers $t_0 = 16$ milliards d'années.

Le quasar le plus lointain a un décalage vers le rouge de 4.9, ce qui correspond à une multiplication des longueurs d'ondes par 5.9. Cela donne, avec la formule (18,98), un âge de 7% celui de l'univers, soit avec notre évaluation de cet âge t_0 environ un milliard d'années comme cela a été dit au § 42.

Pour les plus proches quasars, les premiers trouvés, citons 3C 273 dont le décalage vers le rouge vaut $z = 0.16$. On trouve alors $t \simeq 13$ milliards d'années.

Pour la galaxie la plus lointaine trouvée en 1988, $z = 3.4$; on trouve 1.7 milliard d'années.

Enfin, pour le rayonnement fossile, nous avons vu que $z = 1500$. On trouve alors $t \simeq 300\,000$ ans. C'est en effet la valeur la plus communément admise pour cette époque.

EXERCICES

18.1

Calculez la vitesse de récession de l'amas de la Vierge situé à 50 millions d'années lumière en prenant la valeur de la constante de HUBBLE du § 42.

18.2

On prend comme modèle d'univers, dans le cadre de la Mécanique newtonienne, une boule homogène de rayon S et de masse volumique ρ . Cette boule est en expansion, les vitesses étant radiales et obéissant à la loi de HUBBLE : $v = Hr$.

1. Calculez l'énergie cinétique totale de la boule.
2. Calculez l'énergie potentielle gravitationnelle totale de la boule.
3. Calculez ρ_c en écrivant que pour $\rho = \rho_c$ l'énergie totale est nulle.

18.3

On prend toujours le modèle de la boule homogène de rayon S en expansion, dans le cadre de la mécanique newtonienne. On suppose que la boule est constituée d'un fluide de pression nulle. $v = Hr$.

1. Écrire l'équation de continuité de la mécanique des fluides et montrez que l'on arrive à l'équation (18,23).
2. Écrire l'équation d'EULER et montrez que l'on retrouve la dérivée de l'équation (18,22).

18.4

1. En utilisant la valeur de H_0 trouvée au § 42, calculez ρ_c . On donne la masse du proton $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$. Quelle est la densité critique exprimée en nombre d'atomes d'hydrogène par mètre cube n_p ?

2. La Voie lactée est supposée posséder 100 milliards d'étoiles équivalentes au Soleil en masse (la masse de toutes les étoiles est supposée égale à 10^{11} masses solaires). En supposant que l'ensemble des gaz et poussières non lumineux a une masse égale, la masse de la Voie lactée est donc : $2 \cdot 10^{11} M_\odot$. La Voie lactée est supposée avoir la forme d'un disque de 100 000 *a.l.* de diamètre et de 10 000 *a.l.* d'épaisseur. Calculez la masse volumique de la Voie lactée.

3. Sachant que dans l'univers, les galaxies comparables à la Voie lactée sont séparées en moyenne par la distance de 10 millions d'années lumière, en déduire la masse volumique moyenne de l'univers. Calculez $\frac{\rho}{\rho_c}$ et q_0 conclusion ?

18.5

1. En prenant la valeur de $\frac{\rho}{\rho_c}$ obtenue dans l'exercice 18.4, déduire de la formule (18,68) pour quel décalage vers le rouge la différence de magnitude entre

le cas envisagé et celui de l'espace plat est de 1 ? Dans quel cas l'objet est-il le plus lumineux ?

2. Quelle est la distance correspondante en années lumière ? Conclusion ?

18.6

Effectuez le développement limité au deuxième ordre en z de (18,94) et retrouvez (18,55).

18.7

Effectuez le développement limité de (18,96) de façon à retrouver (18,57).

18.8

Retrouvez la formule (18,95) à partir de (18,19) et (18,78) lorsque $k = -1$.

18.9

Écrire l'équation du champ correspondant aux indices r, r c'est à dire faisant intervenir R_{rr} et T_{rr} . Conclusion ?

18.10

(non corrigé).

On considère le modèle d'univers plat (modèle d'EINSTEIN - de SITTE).

1. En utilisant la relation (18,94), montrez que le décalage vers le rouge pour lequel un objet s'éloignant de nous présente une vitesse égale à celle de la lumière est $z = 3$.

2. Calculez la distance de cet objet en années lumières, en utilisant la relation (18,98) avec les valeurs numériques du § 43.

3. Montrez qu'il y a un horizon qui nous sépare d'objets qui sont invisibles de nous par principe montrez que la vitesse d'éloignement au niveau de l'horizon est de deux fois la vitesse de la lumière.

4. On désire dans cette question montrer que le temps passant, des objets au delà de l'horizon deviennent visibles. Pour cela, on utilise l'équation (18,79) pour montrer que $H_0 S_0^{\frac{3}{2}} = Cte$ lorsqu'on fait varier le temps t_0 . On montrera alors que $H_0 S_0 \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$ donc que la valeur limite r_1 tend également vers l'infini.

Regardant dans deux directions opposées et suffisamment loin, nous voyons deux régions de l'univers qui ne peuvent pas se voir et qui pourtant sont semblables. L'horizon séparant des points qui ne sont pas en contact causal depuis le Big Bang pose le problème de l'homogénéité de l'univers sur une telle échelle. Les scénarios de type inflation résolvent ce problème, un contact causal étant possible pendant l'inflation.

18.11

1. À l'aide des équations (18,22) et (18,23), obtenez une équation exprimant la dérivée \ddot{S} en fonction de ρ , p , et S .
2. Calculez simplement \ddot{S} dans le cas de la cosmologie newtonienne conclusion ?
3. Dans le cas du faux vide (période d'inflation, Cf § 8 chapitre 13), montrez que $\rho = Cte$, ainsi que p .
4. Intégrez alors l'équation différentielle en \ddot{S} . Conclusion ?