

CORRIGE DES EXERCICES

Chapitre 1

- 1.1 La particule va vers la gauche avec la vitesse $V = V_1$; elle subit un choc élastique et va ensuite vers la droite avec la vitesse $V = V_2$. Le fait que le choc soit élastique implique que la vitesse relative de la particule et de la paroi du piston est la même avant et après le choc :

$$V_1 + v = V_2 - v$$

$$V_2 - V_1 = 2 v$$

$$\Delta V = 2 v \quad \text{pour} \quad \Delta t = \frac{2 l}{V}$$

$$\Delta l = - v \Delta t$$

$$\Delta V = - 2 \frac{\Delta l}{\Delta t} = - 2 \Delta l \frac{V}{2 l} = - \frac{\Delta l}{l} V$$

$$\frac{\Delta V}{V} = - \frac{\Delta l}{l}$$

$$\frac{\Delta V}{V} \text{ infiniment petit} \Leftrightarrow \frac{v}{V} \approx 0 \Leftrightarrow v \ll V$$

$$\frac{dV}{V} = - \frac{dl}{l} \Rightarrow \text{Log } V = - \text{Log } l + \text{Cte} = \text{Log } \frac{k}{l}$$

$$V l = k = \text{Cte}$$

Ce calcul explique l'échauffement d'un gaz lors d'une compression lente et sans échange de chaleur, donc adiabatique réversible. Adiabatique correspond au fait que les chocs sont parfaitement élastiques, réversible au fait que $v \ll V$. On peut d'ailleurs calculer de cette manière l'échauffement en thermodynamique statistique.

1.2 1. $v_r = r'$; $v_\theta = r \theta'$

2. $J = m r^2 \theta'$

$$E = \frac{1}{2} m r'^2 + \frac{1}{2} m r^2 \theta'^2 - \frac{G M m}{r}$$

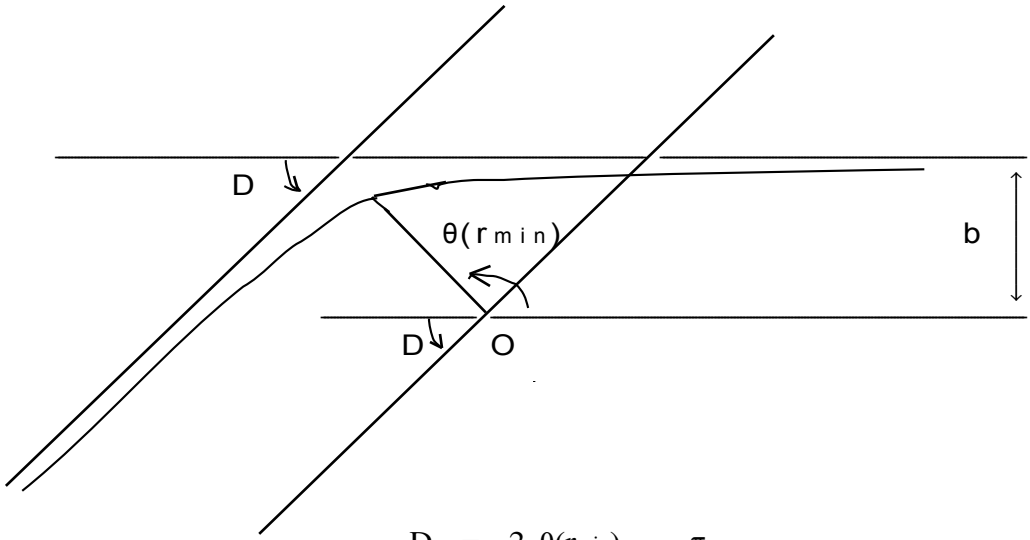
3.

$$r'^2 = \frac{2}{m} \left(E + \frac{G M m}{r} \right) - \frac{J^2}{m^2 r^2}$$

$$\theta' = \frac{J}{m r^2}$$

$$\frac{d\theta}{dr} = \pm \frac{\frac{J}{m r^2}}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(E + \frac{G M m}{r} \right) - \frac{J^2}{m^2 r^2}}}$$

4.



$$D = 2 \theta(r_{\min}) - \pi$$

5.

$$\theta(r_{\min}) = \int_{r_{\min}}^{+\infty} \frac{\frac{J}{m r^2} dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(E + \frac{G M m}{r} \right) - \frac{J^2}{m^2 r^2}}}$$

$$\theta(r_{\min}) = \int_{r_{\min}}^{+\infty} \frac{\frac{J}{r^2} dr}{\sqrt{2 m \left(E + \frac{G M m}{r} \right) - \frac{J^2}{r^2}}}$$

6.

$$J = m b v \infty \quad E = \frac{1}{2} m v \infty^2$$

$$\theta(r_{\min}) = - \int_{r_{\min}}^{+\infty} \frac{d \left(\frac{b}{r} \right)}{\sqrt{1 + \frac{2 G M}{r v \infty^2} - \frac{b^2}{r^2}}}$$

7.

$$X = \frac{b}{r} - \frac{G M}{v \infty^2 b}$$

$$X^2 = \frac{b^2}{r^2} - \frac{2 G M}{r v \infty^2} + \frac{G^2 M^2}{v \infty^4 b^2}$$

$$\theta(r_{\min}) = - \int_{X(r_{\min})}^{X(r = + \infty)} \frac{d X}{\sqrt{1 + \frac{G^2 M^2}{v \infty^4 b^2} - X^2}}$$

$$\theta(r_{\min}) = \left[\operatorname{Arccos} \frac{X}{\sqrt{1 + \frac{G^2 M^2}{v \infty^4 b^2}}} \right]_{X(r_{\min})}^{X(r = + \infty)}$$

Pour $r = r_{\min}$ la dérivée de r s'annule et X est donc justement égal à la racine carré ci-dessus. On obtient $\operatorname{Arccos} 1$ qui vaut 0 . Pour $r = + \infty$ nous avons :

$$X = - \frac{G M}{v \infty^2 b}$$

Finalement, nous obtenons :

$$\theta(r_{\min}) = \operatorname{Arccos} \frac{- \frac{G M}{v \infty^2 b}}{\sqrt{1 + \frac{G^2 M^2}{v \infty^4 b^2}}}$$

8.

$$\cos \theta(r_{\min}) = \frac{-\frac{GM}{v\infty^2 b}}{\sqrt{1 + \frac{G^2 M^2}{v\infty^4 b^2}}}$$

$$\operatorname{tg} \theta(r_{\min}) = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \theta(r_{\min})}}{\cos \theta(r_{\min})} = -\frac{v\infty^2 b}{GM}$$

9.

$$\operatorname{tg} \frac{D}{2} = \frac{GM}{v\infty^2 b}$$

Si l'on suppose que les photons animés de la vitesse de la lumière obéissent à la Mécanique newtonienne, il suffit de remplacer $v\infty$ par C . La déviation maximale est obtenue pour la lumière rasant le soleil. Dans ce cas, $b = r_{\odot}$ et nous écrivons :

$$D \approx \frac{2 GM}{r_{\odot} C^2}$$

La vraie valeur donnée par la Relativité générale est :

$$D \approx \frac{4 GM}{r_{\odot} C^2}$$

Avec les valeurs suivantes en unités S.I. :

$$\left\{ \begin{array}{ll} G = 6.67 \cdot 10^{-11} & M = 1.97 \cdot 10^{30} \\ r_{\odot} = 6.95 \cdot 10^8 & C = 10^8 \end{array} \right.$$

On trouve : $D = 1,75''$

L'expédition de 1919 menée par Eddington lors d'une éclipse totale trouva $1,98''$. Cette valeur est assez imprécise mais permet d'éliminer la valeur théorique donnée par la Mécanique newtonienne.

Chapitre 3

3.1 1. On peut supposer qu'à $t = \bar{t} = \bar{\bar{t}} = 0$, on a $O = \bar{O} = \bar{\bar{O}}$.

$$\begin{pmatrix} x \\ C t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ch } \varphi_e & \text{sh } \varphi_e \\ \text{sh } \varphi_e & \text{ch } \varphi_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ C \bar{t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ C t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \text{ch } \varphi_e & \text{sh } \varphi_e \\ \text{sh } \varphi_e & \text{ch } \varphi_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{ch } \varphi_r & \text{sh } \varphi_r \\ \text{sh } \varphi_r & \text{ch } \varphi_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ C \bar{t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \text{ch } \varphi_e \text{ ch } \varphi_r + \text{sh } \varphi_e \text{ sh } \varphi_r & \text{ch } \varphi_e \text{ sh } \varphi_r + \text{sh } \varphi_e \text{ ch } \varphi_r \\ \text{sh } \varphi_e \text{ ch } \varphi_r + \text{ch } \varphi_e \text{ sh } \varphi_r & \text{sh } \varphi_e \text{ sh } \varphi_r + \text{ch } \varphi_e \text{ ch } \varphi_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ C \bar{t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \text{ch}(\varphi_e + \varphi_r) & \text{sh}(\varphi_e + \varphi_r) \\ \text{sh}(\varphi_e + \varphi_r) & \text{ch}(\varphi_e + \varphi_r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ C \bar{t} \end{pmatrix} \\ \frac{v_a}{C} &= \text{th}(\varphi_e + \varphi_r) = \frac{\text{th } \varphi_e + \text{th } \varphi_r}{1 + \text{th } \varphi_e \text{ th } \varphi_r} \end{aligned}$$

$$v_a = \frac{v_e + v_r}{1 + \frac{v_e v_r}{C^2}}$$

2. Dans le cas des faibles vitesses, la formule redonne la loi newtonienne de composition des vitesses $v_a = v_e + v_r$. Pour $v_e \approx C$:

$$v_a = \frac{C + v_r}{1 + v_r/C} = C$$

Chapitre 4

- 4.1 1. La valeur de la phase en un point de l'espace-temps est un invariant. Or $C \bar{t} = -x \text{ sh } \varphi + C t \text{ ch } \varphi$. Il vient :

$$\varphi(x,t) = A e^{-i \left(\frac{\omega_0 t}{\sqrt{1 - v^2/C^2}} - \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - v^2/C^2}} \frac{x}{C} \right)}$$

2. La pulsation est le coefficient devant t , ce qui est bien le résultat demandé.

3. La valeur ci-dessus de φ peut s'écrire :

$$\varphi(x,t) = e^{\frac{i v \omega_0}{C^2 \sqrt{1 - v^2/C^2}} \left(x - V t \right)}$$

avec :
$$V v = C^2$$

4. $V = \lambda/T$ donne $\lambda = 2 \pi V/\omega$.

$$\lambda = \frac{2 \pi}{\omega_0} \sqrt{1 - v^2/C^2} \frac{C^2}{v}$$

avec $1/\omega_0 = \hbar/m C^2$, on obtient :

$$\lambda = \frac{\frac{h}{m v}}{\sqrt{1 - v^2/C^2}} = \frac{h}{P}$$

5. Pour une particule se propageant le long de l'axe des x , on a :

$$\frac{\omega}{C} = 0 + \frac{\omega_0}{C} \text{ch } \varphi$$

$$\frac{2 \pi}{\lambda} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - v^2/C^2}} \frac{v}{C^2} = \frac{\omega_0}{C} \text{sh } \varphi$$

et :

$$k^x = 0 + \frac{\omega_0}{C} \text{sh } \varphi$$

$\left(\begin{array}{c} \frac{\omega}{C} \\ k^x \end{array} \right)$ est donc bien obtenu à partir de $\left(\begin{array}{c} \frac{\omega_0}{C} \\ 0 \end{array} \right)$

par la transformation spéciale de Lorentz.

\vec{k} est donc un quadrivecteur, le quadrivecteur d'onde. Dans le référentiel où la particule est au repos, on a $m C^2 = \hbar \omega_0$, ce qui s'écrit $\vec{P} = \hbar \vec{k}$. Mais cette dernière relation, covariante, est vraie écrite dans tout référentiel; elle montre qu'il y a un accord profond entre la Mécanique quantique et la Relativité restreinte.

6. $\omega_0^2 \text{ch}^2 \varphi - \omega_0^2 \text{sh}^2 \varphi = \omega_0^2$ et $\omega_0 \text{sh } \varphi \rightarrow \omega$ quand $\omega_0 \rightarrow 0$.

$$\vec{k} = \left(\begin{array}{c} \frac{\omega}{C} \\ \frac{\omega}{C} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right)$$

pour une onde progressive le long de l'axe des x . On a le quadrivecteur d'onde d'une particule de masse nulle, et la relation $\vec{P} = \hbar \vec{k}$ reste vraie par passage à la limite.

4.2 1. Utilisons les résultats de l'exercice 4.1 pour

une particule de masse nulle, ici le photon.

$$P^\alpha = \begin{pmatrix} \frac{h \nu}{C} \\ \frac{h \nu}{C} \sin \theta \\ \frac{h \nu}{C} \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad P^{\bar{\alpha}} = \begin{pmatrix} \frac{h \bar{\nu}}{C} \\ -\frac{h \bar{\nu}}{C} \sin \bar{\theta} \\ -\frac{h \bar{\nu}}{C} \cos \bar{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nu \cos \theta = \bar{\nu} \cos \bar{\theta}$$

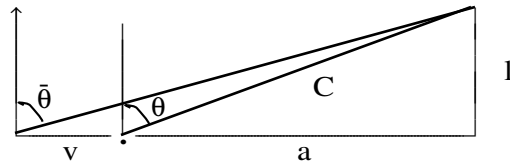
$$\frac{h \bar{\nu}}{C} = \frac{h \nu}{C} \operatorname{ch} \varphi + \frac{h \nu}{C} \sin \theta \operatorname{sh} \varphi$$

$$\frac{h \bar{\nu}}{C} \sin \bar{\theta} = \frac{h \nu}{C} \operatorname{sh} \varphi + \frac{h \nu}{C} \sin \theta \operatorname{ch} \varphi$$

$$\operatorname{tg} \bar{\theta} = \frac{\operatorname{sh} \varphi + \sin \theta \operatorname{ch} \varphi}{\cos \theta}$$

$$\operatorname{tg} \bar{\theta} = \frac{\nu/C + \sin \theta}{\cos \theta \sqrt{1 - \nu^2/C^2}}$$

2. Pour $\nu \ll C$, la Mécanique newtonienne donne :



$$\operatorname{tg} \bar{\theta} = \frac{a + \nu}{1} \quad \begin{aligned} C \sin \theta &= a \\ C \cos \theta &= 1 \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \bar{\theta} = \frac{C \sin \theta + \nu}{C \cos \theta}$$

$$\operatorname{tg} \bar{\theta} = \frac{\nu/C + \sin \theta}{\cos \theta}$$

La formule de la Relativité restreinte donne bien cela pour $\nu \ll C$. La correction est donc du deuxième ordre, en ν^2/C^2 . Quand $\nu = C$, $\operatorname{tg} \bar{\theta} = \infty$ et $\bar{\theta} = \pi/2$.

3. Il vient :

$$\operatorname{tg} \bar{\theta} = \frac{\nu}{C} \quad ; \quad \operatorname{tg} \bar{\theta} = 10^{-4}$$

$$\bar{\theta} = 20,5''$$

4.3

Pour une molécule, les quadrivecteurs impulsion-énergies avant et après les choc sont :

$$P_1^{\bar{\alpha}} = \begin{pmatrix} P_1^{\bar{0}} \\ P_1^{\bar{x}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad P_2^{\bar{\alpha}} = \begin{pmatrix} P_2^{\bar{0}} \\ -P_2^{\bar{x}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

l'énergie de la molécule étant supposée conservée;
 et $F_{\parallel, \mathcal{R}} = 2 P^{\bar{x}} / \Delta \bar{t}$. Vu dans \mathcal{R} :

$$P_1^x = P^{\bar{x}} \operatorname{ch} \varphi + P^{\bar{0}} \operatorname{sh} \varphi$$

$$P_2^x = -P^{\bar{x}} \operatorname{ch} \varphi + P^{\bar{0}} \operatorname{sh} \varphi$$

et $\Delta P^x = 2 P^{\bar{x}} \operatorname{ch} \varphi$ tandis que $\Delta t = \Delta \bar{t} \operatorname{ch} \varphi$.

$$F_{\parallel, \mathcal{R}} = \frac{\Delta P^x}{\Delta t} = \frac{2 P^x \operatorname{ch} \varphi}{\Delta \bar{t} \operatorname{ch} \varphi} = F_{\parallel, \overline{\mathcal{R}}}$$

Il y a augmentation de l'impulsion délivrée par chaque molécule, mais diminution du débit des molécules par ralentissement des horloges de \mathcal{R} vues de \mathcal{R} . Les deux effets se compensent.

4.4

1. Utilisons les résultats de l'exercice 4.1 pour le quadrivecteur impulsion-énergie d'une particule de masse nulle, ici le photon. La transformation spéciale de Lorentz donne :

$$\frac{h \nu}{C} = \frac{h \bar{\nu}}{C} \operatorname{ch} \varphi + \frac{h \bar{\nu}}{C} \operatorname{sh} \varphi$$

$$\nu = \bar{\nu} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2 / C^2}} + \frac{v / C}{\sqrt{1 - v^2 / C^2}} \right)$$

$$\nu = \bar{\nu} \frac{1 + v / C}{\sqrt{1 - v^2 / C^2}}$$

Le référentiel \mathcal{R} va à la rencontre du rayonnement et la fréquence y est donc augmentée.

2. Il vient :

$$z = \sqrt{\frac{1 + v/C}{1 - v/C}} - 1$$

3. quand $v \ll C$ $z = v/C$ comme en Mécanique newtonienne.

4. Quand $v \rightarrow C$ $z \rightarrow \infty$.

$$F = m g = \frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m v}{\sqrt{1 - v^2/C^2}} \right)$$

$$\frac{v}{\sqrt{1 - v^2/C^2}} = g t$$

$$v = \frac{g t}{\sqrt{1 + g^2 t^2 / C^2}}$$

2. L'intégration donne :

$$x = \frac{C^2}{g} \left(\sqrt{1 + g^2 t^2 / C^2} - 1 \right)$$

3.

$$\left(\frac{g x}{C^2} + 1 \right)^2 = 1 + \frac{g^2 t^2}{C^2}$$

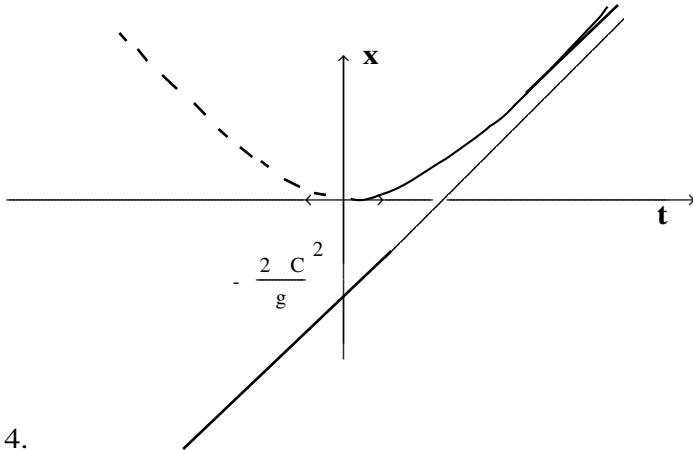
On a l'hyperbole d'équation :

$$\frac{g^2 t^2}{C^2} - \frac{g^2 x^2}{C^4} - \frac{2 g x}{C^2} = 0$$

D'où le nom de ce mouvement, le mouvement hyperbolique.

$$x - C t = - \frac{2 C^2 x}{g (x + C t)} \rightarrow - \frac{2 C^2}{g}$$

D'où l'équation de l'asymptote : $x = C t - 2 C^2/g$, et la courbe :



4.

$$\tau = \int_0^t \sqrt{1 - v^2/C^2} dt$$

$$\tau = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1 + \frac{g^2 t^2}{C^2}}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = \text{Argsh } x = \text{Log} \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$$

$$\tau = \frac{C}{g} \text{Log} \left(\frac{g t}{C} + \sqrt{\frac{g^2 t^2}{C^2} + 1} \right)$$

5. t est pratiquement égal à 50 000 ans comme on le voit sur la formule donnant $x(t)$: $t \rightarrow \infty \Rightarrow x \approx C t$, et :

$$\tau \approx \frac{C}{g} \text{Log} \frac{g t}{C}$$

$$t = 50\,000 \times 365,25 \times 24 \times 3600 = 1,58 \cdot 10^{12} \text{ s}$$

$$\tau = 10,3 \text{ ans}$$

6. $\Delta t = 200\,000$ ans et $\Delta \tau = 4 \times 10,3$

$$\tau = 41,3 \text{ ans}$$

On a l'illustration du fameux paradoxe "des jumeaux" de Langevin. D'autre part, on voit que moyennant une source d'énergie convenable et une technologie fiable, il est tout à fait possible de coloniser la galaxie, puisque le voyage ne dure pas longtemps. D'autre part les stocks de nourriture et autre à emporter sont réalistes.

Chapitre 5

5.1 (5,21) donne :

$$\varpi_{\bar{\alpha}} = \varphi(\vec{e}_{\bar{\alpha}}) = \varphi(\Lambda^{\alpha}_{\bar{\alpha}} \vec{e}_{\alpha}) = \Lambda^{\alpha}_{\bar{\alpha}} \varphi_{\alpha}$$

5.2 On écrit :

$$(\lambda \vec{a} + \mu \vec{b})(\varphi) = \varphi(\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}) = \lambda \varpi(\vec{a}) + \mu \varpi(\vec{b})$$

$$= \lambda \vec{a}(\varphi) + \mu \vec{b}(\varphi)$$

5.3 On écrit :

$$F_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = g_{\bar{\alpha}\bar{\mu}} F^{\bar{\mu}}_{\bar{\beta}} = \Lambda^{\alpha}_{\bar{\alpha}} \Lambda^{\lambda}_{\bar{\mu}} g_{\alpha\lambda} \Lambda^{\bar{\mu}}_{\mu} \Lambda^{\beta}_{\bar{\beta}} F^{\mu}_{\beta}$$

$$= \Lambda^{\alpha}_{\bar{\alpha}} \Lambda^{\beta}_{\bar{\beta}} \delta^{\lambda}_{\mu} g_{\alpha\lambda} F^{\mu}_{\beta} = \Lambda^{\alpha}_{\bar{\alpha}} \Lambda^{\beta}_{\bar{\beta}} g_{\alpha\lambda} F^{\lambda}_{\beta}$$

$$= \Lambda^{\alpha}_{\bar{\alpha}} \Lambda^{\beta}_{\bar{\beta}} F_{\alpha\beta}$$

5.4 1. Dans $\bar{\mathcal{R}}$:

$$\mathbf{E}_{\bar{\mathcal{R}}} = \frac{e}{4 \pi \epsilon_0 a^2} \bar{\mathbf{y}} \quad ; \quad \mathbf{F}_{\bar{\mathcal{R}}} = \mathbf{F}_{\perp, \bar{\mathcal{R}}} = \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 a^2} \bar{\mathbf{y}}$$

$$\mathbf{B}_{\bar{\mathcal{R}}} = \mathbf{0}$$

2. On utilise la formule (4,16) et :

$$\mathbf{F}_{\mathcal{R}} = \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 a^2} \sqrt{1 - v^2/C^2} \mathbf{y}$$

3. Les photons virtuels délivrent une impulsion transversale au mouvement, donc inchangée dans le passage de $\bar{\mathcal{R}}$ à \mathcal{R} . Mais, à cause du ralentissement des horloges, le débit des photons virtuels (chaque émission d'un photon virtuel correspond au *tic* d'une horloge étalon liée à A) est diminué, vu dans \mathcal{R} , du facteur $\sqrt{1 - v^2/C^2}$. Il en est donc ainsi du débit d'impulsion, donc de la force.

4. On considère le rayon vecteur \mathbf{R}_0 représentant la "trajectoire" de propagation du potentiel retardé, partant à l'instant t'_0 de la position de B à ce moment là : B(t'_0), et arrivant à l'instant d'observation t en A.

$$\mathbf{R}_0 = \overrightarrow{\text{B}(t'_0) \text{ A}} \quad \Delta t = t - t'_0$$

$$l = v \Delta t \quad \mathbf{R}_0 = C \Delta t$$

$$l^2 + a^2 = R_0^2 \quad v^2 \Delta t^2 + a^2 = C^2 \Delta t^2$$

$$\Delta t^2 = \frac{a^2}{C^2 - v^2} \quad \Delta t = \frac{a}{\sqrt{C^2 - v^2}}$$

$$R_0 = \frac{a C}{\sqrt{C^2 - v^2}} \quad R_0 = \frac{a}{\sqrt{1 - v^2/C^2}}$$

$$R_0^X = R_0 \cos \theta = R_0 \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = R_0 \sqrt{1 - a^2/R_0^2}$$

$$R_0^X = \frac{a v}{\sqrt{C^2 - v^2}} \quad ; \quad R_0^Y = a \quad ; \quad R_0^Z = 0$$

Il nous faut calculer dans $\bar{\mathcal{R}}$, pour différents points M voisins de A, avec $\overrightarrow{\text{AM}} = d\vec{M}$, et toujours au même instant, les différentes valeurs de \mathbf{R} . Le potentiel retardé arrivant en M a été émis en

$B(t')$, et :

$$\mathbf{R} = \overrightarrow{B(t') M} = - d\vec{B} + \mathbf{R}_0 + d\vec{M}$$

avec : $d\vec{B} = \overrightarrow{B(t'0) B(t')}$

On a :

$$\begin{cases} R^x = \lambda + \mu dx + v dy \\ R^y = a + dy \\ R^z = dz \end{cases}$$

$$R_0 = \sqrt{\lambda^2 + a^2} = \frac{a C}{\sqrt{C^2 - v^2}}$$

$$\lambda = \frac{a v}{\sqrt{C^2 - v^2}}$$

$R^z = dz$: en effet, une variation de dz correspond à un déplacement perpendiculaire à R_0 . On reste donc sur le front d'onde émis à l'instant $t'0$ de $B(t'0)$ et arrivant à l'instant t simultanément en A et M . $\| \overrightarrow{B(t'0) A} \| = \| \overrightarrow{B(t'0) M} \|$. Il résulte de cela que dans ce cas $d\vec{B} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + d\vec{M}$.

De toute façon $d\vec{B}$ n'intervient que pour R^x , n'ayant pas de composantes sur les autres axes que l'axe des x , et un déplacement correspondant à une variation de dy , donne donc $R^y = a + dy$.

Pour R^x , $d\vec{B}$ intervient d'une manière inconnue, aussi bien dans le coefficient de dx que dans celui de dy , d'où les coefficients inconnus μ et v .

On calcul R^2 au premier ordre, puis on trouve :

$$R = \sqrt{\lambda^2 + a^2} \left[1 + \frac{\lambda \mu}{\lambda^2 + a^2} dx + \frac{\lambda v + a}{\lambda^2 + a^2} dy \right]$$

$$\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{C} = \frac{\lambda v + \mu v dx + v v dy}{C}$$

$$R - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{C} = \sqrt{\lambda^2 + a^2} - \frac{\lambda v}{C} + \left(\frac{\lambda \mu}{\sqrt{\lambda^2 + a^2}} - \frac{\mu v}{C} \right) dx$$

$$+ \left(\frac{\lambda v + a}{\sqrt{\lambda^2 + a^2}} - \frac{v}{C} \right) dy$$

Compte tenu des valeurs de $\sqrt{\lambda^2 + a^2}$ et de λ :

$$\sqrt{\lambda^2 + a^2} - \frac{\lambda v}{C} = a \sqrt{1 - v^2/C^2}$$

$$\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + a^2}} - \frac{v}{C} = 0$$

et on trouve :

$$R - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{C^2} = a \sqrt{1 - v^2/C^2} \left(1 + \frac{dy}{a} \right)$$

D'où les potentiels :

$$\phi = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{e}{a \sqrt{1 - v^2/C^2}} \left(1 - \frac{dy}{a} \right)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4 \pi} \frac{e}{a \sqrt{1 - v^2/C^2}} \left(1 - \frac{dy}{a} \right) \mathbf{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5. Nous avons :

$$\mathbf{E} = - \mathbf{grad} \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

L'instant dt avant, les potentiels sont ceux qui règnent dx à gauche à l'instant considéré, avec $dx/dt = v$. Donc, comme dx n'intervient pas $\partial \mathbf{A}/\partial t = 0$; et :

$$\mathbf{E} = - \mathbf{grad} \phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{e}{4 \pi \epsilon_0 a^2 \sqrt{1 - v^2/C^2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si c'était le champ qui était retardé, on aurait pour \mathbf{E} une composante E^x non nulle, mais c'est le potentiel qui est retardé.

$\mathbf{B} = \mathbf{rot} \mathbf{A}$ donne, avec $\epsilon_0 \mu_0 C^2 = 1$:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{e}{4 \pi \varepsilon_0 C^2 a^2} \frac{v}{\sqrt{1 - v^2/C^2}} \end{pmatrix}$$

6. La formule $\mathbf{F} = e \mathbf{E} + e \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$ redonne bien, compte tenu des valeurs ci-dessus de \mathbf{E} et \mathbf{B} , la force trouvée à la question 2 .

7.

$$F_{\bar{\beta}}^{\bar{\alpha}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{e}{4 \pi \varepsilon_0 a^2 C} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{e}{4 \pi \varepsilon_0 a^2 C} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(5,7) donne $F = \Lambda \bar{F} \Lambda^{-1}$ avec :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \text{ch } \varphi & \text{sh } \varphi & 0 & 0 \\ \text{sh } \varphi & \text{ch } \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_{\beta}^{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{e \text{ ch } \varphi}{4 \pi \varepsilon_0 a^2 C} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{e \text{ sh } \varphi}{4 \pi \varepsilon_0 a^2 C} & 0 \\ \frac{e \text{ ch } \varphi}{4 \pi \varepsilon_0 a^2 C} & \frac{- e \text{ sh } \varphi}{4 \pi \varepsilon_0 a^2 C} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E^y = \frac{e \text{ ch } \varphi}{4 \pi \varepsilon_0 a^2} \quad ; \quad B^z = \frac{e \text{ sh } \varphi}{4 \pi \varepsilon_0 a^2 C}$$

et on retrouve bien les mêmes valeurs qu'à la question 5 .

7.1 On écrit :

$$\frac{1}{2} m C^2 - G \frac{m M}{r_s} = 0$$

soit :

$$r_s = \frac{2 G M}{C^2}$$

7.2

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{G m M}{r} = 0$$

$$\sqrt{r} \, dr = \sqrt{2 G M} \, dt$$

$$\left[\frac{r^{3/2}}{3/2} \right]_{r_s}^R = C \sqrt{r_s} \, \Delta t$$

$$\Delta t = \frac{2}{3 C \sqrt{r_s}} \left(R^{3/2} - r_s^{3/2} \right)$$

Voir à ce sujet la formule (16,28).

7.3

1. Le temps local τ mit pour parcourir la longueur étalon λ vaut $\tau = \lambda/C$. Mais, vu depuis un poste d'observation éloigné, à cause de la contraction des longueurs, la longueur étalon semble avoir une longueur effective :

$$l = \lambda \sqrt{1 + 2 \phi / C^2} = \lambda \sqrt{1 - r_s/r}$$

Nous avons utilisé la formule (7,8).

La durée τ indiquée par l'horloge étalon locale correspond d'autre part à la durée t mesurée loin de l'astre, avec :

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1 + 2 \phi / C^2}} = \frac{\tau}{\sqrt{1 - r_s/r}}$$

Nous avons utilisé les formules (7,3) ou (7,4).

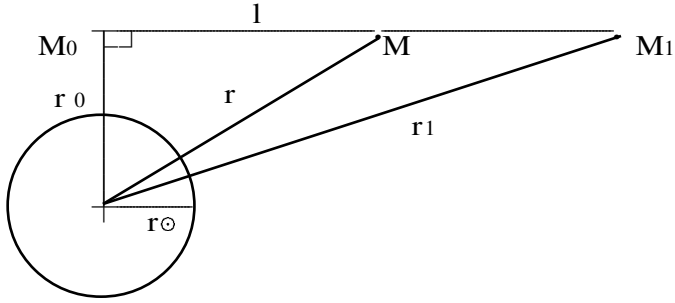
La vitesse apparente de la lumière, vue de loin, vaut donc :

$$v = \frac{l}{t} = \frac{\lambda}{\tau} \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) = C \left(1 - r_s/r \right)$$

$$v \approx \frac{C}{1 + \frac{r_s}{r}} = \frac{C}{n}$$

La propagation de la lumière est ralentie comme si elle traversait un milieu d'indice de réfraction $n = 1 + r_s/r > 1$.

2.



Calculons le chemin optique l_1 de M_1 à M_0 quand l'indice vaut l .

$$l = \sqrt{r^2 - r_0^2} \quad ; \quad dl = \frac{r \, dr}{\sqrt{r^2 - r_0^2}}$$

$$l_1 = \int_{r_0}^{r_1} \frac{r \, dr}{\sqrt{r^2 - r_0^2}}$$

dans le cas où l'indice vaut $n = 1 + r_s/r$:

$$l_n = \int_{r_0}^{r_1} \frac{(1 + r_s/r) r \, dr}{\sqrt{r^2 - r_0^2}}$$

$$l_n - l_1 = \Delta l = r_s \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - r_0^2}}$$

$$\Delta l = r_s \operatorname{Arg} \operatorname{ch} \frac{r_1}{r_0} = r_s \operatorname{Log} \left(\frac{r_1}{r_0} + \sqrt{\frac{r_1^2}{r_0^2} - 1} \right)$$

Le retard de l'écho radar vaut :

$$\Delta t(r_1, r_0) = \frac{\Delta l}{C} = \frac{r_s}{C} \operatorname{Log} \left(\frac{r_1}{r_0} + \sqrt{\frac{r_1^2}{r_0^2} - 1} \right)$$

Dans le cas considéré :

$$\Delta \tau = 2 \left[\Delta t(r_1, r_0) + \Delta t(r_M, r_0) \right]$$

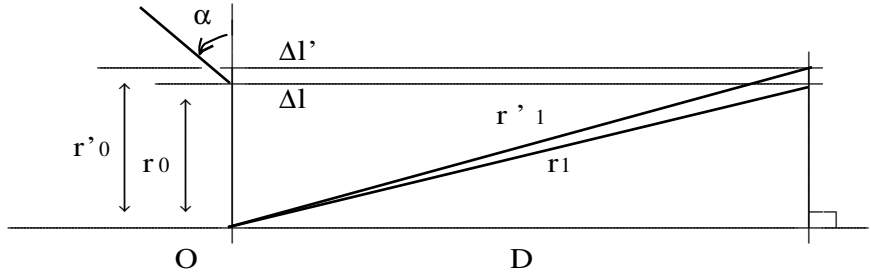
3. On trouve : a. $r_s = 2949,6 \text{ m}$; b. $\Delta \tau = 0,220 \cdot 10^{-3} \text{ s}$.

c. Voir à ce sujet le 20 du chapitre 16 et l'équation (16,52). L'erreur correspond à l'oubli du terme :

$$\frac{r_s}{2C} \sqrt{\frac{r_1 - r_0}{r_1 + r_0}}$$

et elle vient du fait qu'en réalité, la trajectoire de la lumière n'est pas rectiligne dans le voisinage du Soleil. La valeur exacte est : $\Delta\tau = 0,240 \cdot 10^{-3} \text{ s}$.

4.

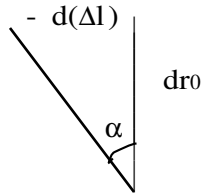


$$\Delta l = r_s \operatorname{Arg} \operatorname{ch} \frac{r_1}{r_0}$$

$$\Delta l' = r_s \operatorname{Arg} \operatorname{ch} \frac{r'_1}{r'_0}$$

$$r_0^2 + D^2 = r_1^2 \quad ; \quad r'_0{}^2 + D^2 = r'_1{}^2$$

$$r_0 \, dr_0 = r_1 \, dr_1$$



$$\alpha = - \frac{d(\Delta l)}{dr_0}$$

$$d(\Delta l) = r_s \frac{1}{\sqrt{\frac{r_1^2}{r_0^2} - 1}} \frac{dr_1 r_0 - r_1 dr_0}{r_0^2}$$

$$\alpha = - \frac{r_s}{D} \left(\frac{r_0}{r_1} - \frac{r_1}{r_0} \right)$$

$$r_1 \rightarrow +\infty \quad r_1/D \rightarrow 1 \quad \text{et} \quad \alpha = r_s/r_0$$

Pour un passage rasant le Soleil, venant de l'infini et y retournant, la déviation $\Delta\varpi$ est double (α pour l'aller au Soleil, et encore α pour le retour à l'infini). De plus, dans ce cas, $r_0 = r_\odot$.

$$\Delta\varpi = \frac{4 G M_{\odot}}{r_{\odot} C^2}$$

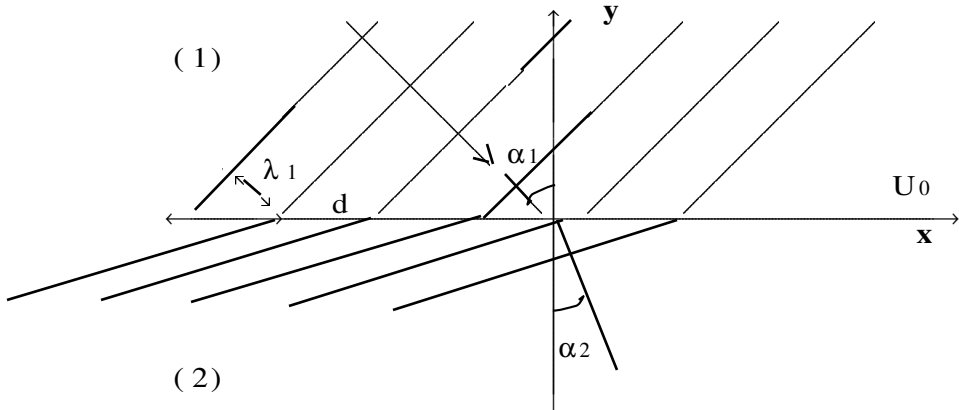
5. On trouve : 1,75'' .

6. On trouve la valeur exacte donnée par la formule (16,38), valeur double de celle trouvée dans l'exercice 1.2 . Cela vient, comme nous l'avons vu au paragraphe 5 , de l'effet de contraction des longueurs. Si l'on refaisait tous les calculs en ne tenant pas compte de cet effet de contraction des longueurs, mais uniquement du ralentissement du temps, on trouverait la valeur de l'exercice 1.2 .

En effet : tous les calculs faits ci-dessus seraient encore valables, l'indice $n = 1 + r_s/r$ étant remplacé par $n = 1 + r_s/2 r$. Il suffit donc partout de remplacer r_s par $r_s/2$, et on arriverait à la déviation moitié. L'exemple de la fusée et cet exercice, montrent bien que la déviation newtonienne correspond à l'effet de ralentissement du temps seul. Il correspond au décalage vers le rouge également prit en compte dans le cas de la fusée.

7.4

1.



Calculons tout d'abord la déviation avec les ondes. $\lambda_1 = h/P_1$; $\lambda_2 = h/P_2$; $P_2^2/2 m + U = \text{Cte}$. $d = \lambda_1/\sin \alpha_1 = \lambda_2/\sin \alpha_2 \Rightarrow \sin \alpha_1/\sin \alpha_2 = \lambda_1/\lambda_2$.

$$\frac{P_2^2}{2 m} = \frac{P_1^2}{2 m} + U_0$$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{P_2}{P_1} = \sqrt{1 + 2 m U_0/P_1^2} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2}$$

Calculons ensuite la déviation en considérant la particule matérielle. $v_{x_2} = v_{x_1} = v_x$.

$$\frac{1}{2} m \left((v^x)^2 + (v^{y2})^2 \right) = \frac{1}{2} m \left((v^x)^2 + (v^{y1})^2 \right) + U_0$$

$$\sin \alpha_1 = \frac{v^x}{\sqrt{(v^x)^2 + (v^{y1})^2}}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} &= \sqrt{\frac{(v^x)^2 + (v^{y1})^2 + (v^{y2})^2 - (v^{y1})^2}{(v^x)^2 + (v^{y1})^2}} \\ &= \sqrt{1 + \frac{2 U_0}{m} \frac{m^2}{P_1^2}} \end{aligned}$$

et on trouve bien le même résultat.

2. Il nous faut trouver le potentiel correspondant à l'indice de réfraction $n = 1 + r_s/r$ pour les ondes de de Broglie. La déviation de ces ondes avec cet indice de réfraction, correspondra alors à la loi générale de propagation des ondes dans un milieu d'indice n ; mais la déviation de ces ondes sera donnée par la déviation de la particule newtonienne associée en considérant que l'on a affaire à des ondes de de Broglie.

$$\lambda = \frac{h}{m v} = \frac{\lambda_\infty}{n} = \frac{1}{n} \frac{h}{m C}$$

$v = n C$; $v > C$, mais la particule fictive newtonienne peut aller à n'importe quelle vitesse.

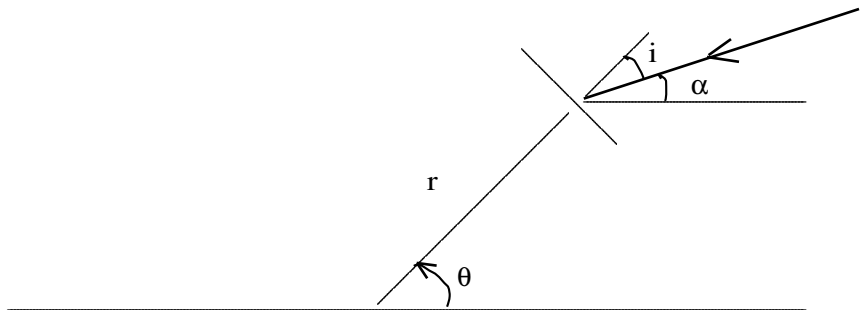
$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m n^2 C^2$$

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m \left(1 + \frac{2 r_s}{r} \right) C^2 = 0$$

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{2 G m M}{r} = \frac{1}{2} m C^2$$

Le potentiel est donc double du potentiel newtonien, et la déviation double, ce qui donne le résultat de la Relativité générale.

7.5



$$n \sin i = \text{Cte} ; i = \theta - \alpha ; n \sin(\theta - \alpha) = \text{Cte}$$

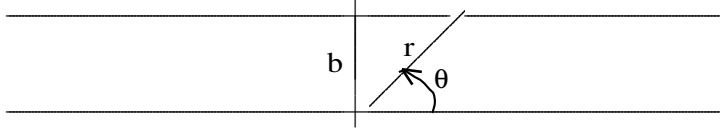
Pour une propagation infinitésimale, cette loi de la réfraction s'écrit en considérant que la frontière a une orientation fixe, donc avec $\theta = \text{Cte}$:

$$dn \sin(\theta - \alpha) - n \cos(\theta - \alpha) d\alpha = 0$$

$$d\alpha = \frac{n'}{n} \operatorname{tg}(\theta - \alpha) dr$$

$$\operatorname{tg}(\theta - \alpha) = -\frac{r}{dr} \frac{d\theta}{d\alpha} \quad d\alpha = -\frac{n'}{n} r d\theta$$

$d\alpha \approx r_s/r d\theta$. Le paramètre d'impact étant b , et la trajectoire étant pratiquement rectiligne, on a $b \approx r \sin \theta$.



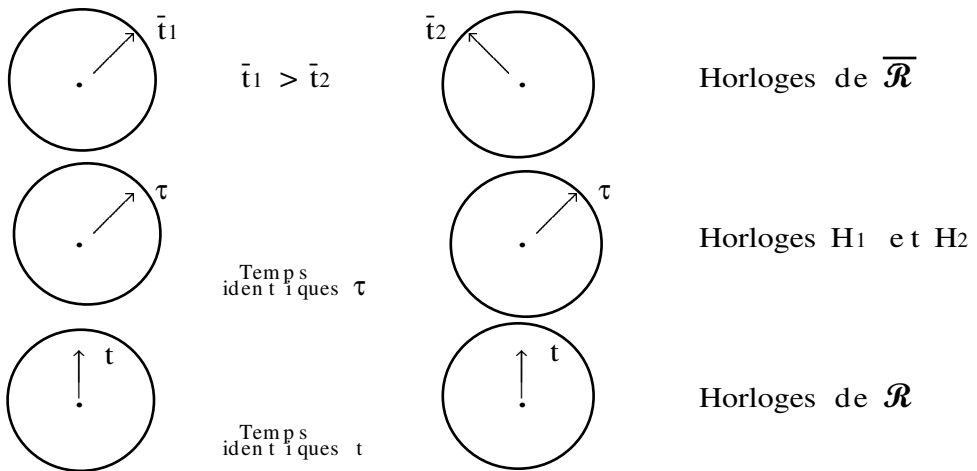
$$d\alpha = \frac{r_s}{b} \sin \theta d\theta$$

$$\Delta\alpha = \frac{r_s}{b} [-\cos \theta]_0^\pi = \frac{2 r_s}{b}$$

ce qui est la valeur donnée par la Relativité générale.

7.6

1. Les temps propres τ_1 et τ_2 indiqués par les deux horloges au temps t de \mathcal{R} sont identiques : $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ car, pour toutes les deux, l'accroissement de temps propre est donné par la formule (3,7). D'où le schéma à l'instant t de \mathcal{R} :



$\bar{t}_2 < \bar{t}_1$, en effet :

$$\begin{cases} C \bar{t}_1 = -x_1 \operatorname{sh} \varphi + C t \operatorname{ch} \varphi \\ C \bar{t}_2 = -(x_1 + a) \operatorname{sh} \varphi + C t \operatorname{ch} \varphi \end{cases}$$

$$\bar{t}_1 - \bar{t}_2 = \frac{a \operatorname{sh} \varphi}{C} \approx \frac{a v}{C^2} = \frac{a g t}{C^2}$$

Ce décalage est bien sur infinitésimal par rapport à t .

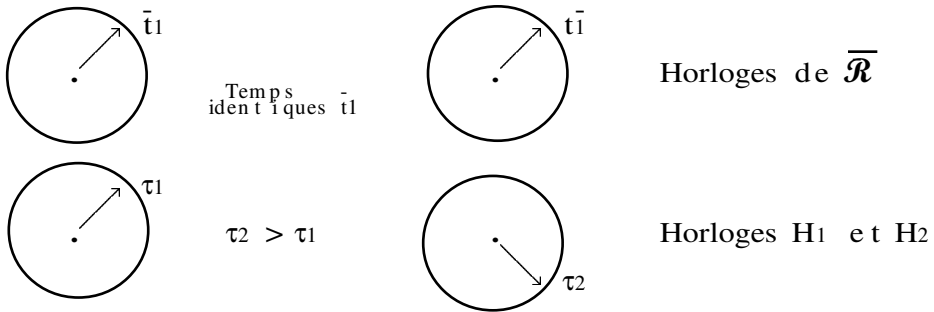
Les deux horloges H1 et H2 affichent donc des temps identiques en deux instants différents de \mathcal{R} . L'horloge H1, vue dans \mathcal{R}^0 , identique à \mathcal{R} au temps t , indiquera donc le même temps que celui repéré sur H2, $a g t / C^2$ secondes plus tard. On a donc, dans le référentiel \mathcal{R}^0 dans lequel les horloges sont toujours fixes :

$$\tau_2 - \tau_1 \approx \frac{a g t}{C^2} \approx \frac{a g \tau}{C^2}$$

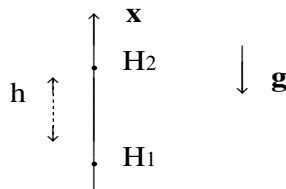
et :

$$\frac{\Delta\tau}{\tau} = \frac{a g}{C^2}$$

Cela est résumé dans le schéma suivant :



2. Le principe d'équivalence nous assure que la situation est la même pour les deux horloges ci-dessous, immobiles dans le champ de gravité vertical et opposé à l'axe des x : \mathbf{g} .



et :

$$\frac{\Delta\tau}{\tau} = \frac{g h}{C^2}$$

L'horloge du bas retarde sur celle du haut. La totale identité des conditions ressenties par les deux horloges dans la question 1 nous montre que le décalage n'est pas dû à une quelconque perturbation du mécanisme des horloges. C'est le temps lui-même qui s'écoule différemment.

C'est de cette façon que Einstein mit pour la première fois en évidence ce phénomène de modification de l'écoulement du temps par la

gravitation en 1907, alors que la présentation qu'il en fit par l'effet Doppler date de 1911.

Chapitre 8

- 8.1 Les deux barreaux en contact constituent un aimant unique de longueur double, dans lequel le champ magnétique peut être considéré comme uniforme avec une bonne approximation.

$$F^X = \iint T^{XX} dS = T^{XX} s$$

(8,38) donne :

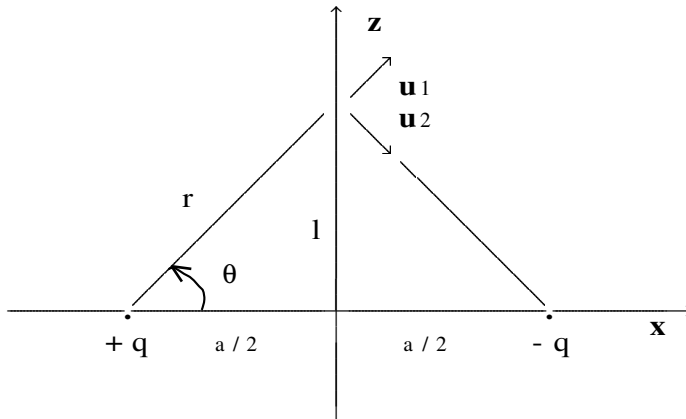
$$T^{XX} = -\frac{1}{2\mu_0} B^2$$

La valeur négative de T^{XX} correspond bien à une force magnétique attractive maintenant en contact les deux barreaux.

$$B = \sqrt{\frac{2\mu_0 F}{s}}$$

On obtient $B = 0.5$ Teslas.

- 8.2 1. On calcule la force avec l'intégrale de T^{XX} dans le plan médiateur des deux charges.



$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)}{r^2} = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\theta}{r^2} \mathbf{x}$$

(8,38) donne :

$$T^{XX} = -\frac{\epsilon_0}{2} \frac{q^2}{4\pi^2\epsilon_0^2} \frac{\cos^2\theta}{r^4}$$

$$T^{xx} = - \frac{2 q^2 \cos^6 \theta}{\pi^2 \epsilon_0 a^4}$$

$$F^X = \iint T^{xx} dS \quad ; \quad dS = 2 \pi l dl = \frac{\pi}{2} a^2 \frac{\sin \theta d\theta}{\cos^3 \theta}$$

$$F^X = \int_0^{\pi/2} - \frac{q^2}{\pi a^2 \epsilon_0} \cos^3 \theta \sin \theta d\theta$$

$$= \frac{q^2}{\pi a^2 \epsilon_0} \int_1^0 u^3 du = - \frac{q^2}{4 \pi \epsilon_0 a^2}$$

2.

$$T^{xx} = \frac{\epsilon_0}{2} \left(E^y^2 + E^z^2 \right) = \frac{\epsilon_0}{2} \|\mathbf{E}\|^2$$

$$\|\mathbf{E}\| = \frac{2 q}{4 \pi \epsilon_0} \frac{\sin \theta}{r^2}$$

$$T^{xx} = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{q^2}{4 \pi^2 \epsilon_0^2} \frac{\sin^2 \theta}{r^4}$$

Il vient :

$$\int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin^3 \theta d\theta$$

au lieu de :

$$- \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta \sin \theta d\theta$$

à la question 1 ; soit $\int_0^1 u^3 du = 1/4$; et :

$$F^X = \frac{q^2}{4 \pi \epsilon_0 a^2}$$

8.3

1. On considère une fusée d'accélération \mathbf{g} dans le vide, immobile à $t = 0$. Au bout du temps $t = h/C$, la vitesse vaut $v = g t = g h/C$, et l'effet Doppler donne alors $\Delta v/v = v/C = g h/C^2$.

$$v_h = v_b \left(1 - \frac{g h}{C^2} \right)$$

Mais on a également $\mathcal{D}_h = \mathcal{D}_b (1 - g h/C^2)$,

puisque la fréquence n'est pas autre chose que le débit des plans équiphasés, dont la variation est la même que celle du débit des photons.

2. On a alors $p_b = F_b/S = \Delta P_b/S$ pour une seconde $= \mathcal{D}_b (\hbar v_b/C)/S$.

En haut :

$$p_h = \frac{\mathcal{D}_h \left(\frac{\hbar v_h}{C} \right)}{S} = p_b \left(1 - \frac{2 g h}{C^2} \right)$$

Finalement :

$$\nabla p = \frac{2 p g}{C^2}$$

On a d'autre part un photon dans le volume $S \times C \times 1/\mathcal{D}$; donc :

$$\rho C^2 \left(\frac{S C}{\mathcal{D}} \right) = \hbar v$$

donc,

$$\rho = \frac{\hbar v \mathcal{D}}{S C^3} = \frac{p}{C^2}$$

et, on a bien :

$$\nabla p = \left(\rho + \frac{p}{C^2} \right) g$$

3. On voit que le terme ρ fait intervenir la sensibilité des photons au champ de gravité qui se manifeste par leur rougissement et par le lien entre v_b et v_h . Le terme p/C^2 fait intervenir la variation du débit d'impulsion donc du débit des photons, liée à la variation de l'écoulement du temps en haut et en bas, donc fait intervenir le lien entre \mathcal{D}_b et \mathcal{D}_h .

8.4

1.

$$\begin{aligned} T^{\bar{0}\bar{x}} &= \Lambda_{\bar{0}}^{\bar{0}} \Lambda_{\bar{x}}^{\bar{x}} T^{0x} + \Lambda_{\bar{x}}^{\bar{0}} \Lambda_{\bar{x}}^{\bar{x}} T^{xx} \\ &+ \Lambda_{\bar{x}}^{\bar{0}} \Lambda_{\bar{0}}^{\bar{x}} T^{x0} + \Lambda_{\bar{0}}^{\bar{0}} \Lambda_{\bar{0}}^{\bar{x}} T^{00} \\ &= \text{ch}^2 \varphi T^{0x} - \text{sh} \varphi \text{ch} \varphi T^{xx} + \text{sh}^2 \varphi T^{x0} - \text{sh} \varphi \text{ch} \varphi T^{00} \\ &= (\text{ch}^2 \varphi - 2 \text{sh} \varphi \text{ch} \varphi + \text{sh}^2 \varphi) T^{0x} \end{aligned}$$

En effet : $T^{00} = T^{0x} = T^{xx} = \epsilon_0 E^2$

$$= (\text{ch} \varphi - \text{sh} \varphi)^2 T^{0x} = \frac{(1 - v/C)^2}{1 - v^2/C^2} T^{0x}$$

$$\bar{T}^{0\bar{x}} = \frac{1 - v/C}{1 + v/C} T^{0x}$$

et :

$$\mathcal{P} = \frac{1 - v/C}{1 + v/C} \mathcal{P}$$

2. Le résultat de l'exercice 4.4 donne :

$$\mathcal{D} = \mathcal{D} \frac{1 - v/C}{\sqrt{1 - v^2/C^2}} ; \quad \bar{v} = v \frac{1 - v/C}{\sqrt{1 - v^2/C^2}}$$

et :

$$\mathcal{P} = \mathcal{D} \hbar \bar{v} = \mathcal{D} \hbar v \frac{(1 - v/C)^2}{1 - v^2/C^2} = \frac{1 - v/C}{1 + v/C} \mathcal{P}$$

3. On retrouve sur cet exemple que l'on peut effectivement étudier la variation de puissance, donc de pression, liées aux photons, en faisant intervenir séparément la variation de leur débit et de leur fréquence. Le calcul mené à la question 2 de l'exercice 8.3 est ainsi justifié.

Chapitre 9

$$9.1 \quad (\overline{\text{OM}})^r = r ; \quad (\overline{\text{OM}})^\theta = 0 .$$

$$\frac{\partial \overline{\text{OM}}}{\partial \theta} = (\overline{\text{OM}})^j \Gamma_{j\theta}^i \mathbf{e}_i = (\overline{\text{OM}})^r \Gamma_{r\theta}^\theta \mathbf{e}_\theta = r \times \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_\theta$$

Chapitre 10

$$10.1 \quad 1.$$

$$V^1 = V^r ; \quad V^2 = \frac{V^\theta}{r \cos \varphi} ; \quad V^3 = \frac{V^\varphi}{r}$$

$$2. \quad ds^2 = dr^2 + r^2 \cos^2 \varphi d\theta^2 + r^2 d\varphi^2$$

$$\mathbf{g} = r^4 \cos^2 \varphi ; \quad \sqrt{\mathbf{g}} = r^2 \cos \varphi$$

3.

$$\text{div } \mathbf{V} = \frac{1}{r^2 \cos \varphi} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(V^r r^2 \cos \varphi \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{V^\theta}{r \cos \varphi} r^2 \cos \varphi \right) \right]$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{V^\varphi}{r} r^2 \cos \varphi \right) \right]$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{\partial V^r}{\partial r} + \frac{2}{r} V^r + \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial V^\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial V^\varphi}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \operatorname{tg} \varphi V^\varphi$$

10.2 1. $ds^2 = dr^2 + r^2 \cos^2 \lambda d\theta^2 + r^2 d\lambda^2$

2. On trouve (on ne met qu'une fois deux symboles égaux par symétrie sur les indices inférieurs) :

$$\Gamma_{\lambda\lambda}^r = -r \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -r \cos^2 \lambda \quad \Gamma_{r\lambda}^\lambda = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^\lambda = \sin \lambda \cos \lambda \quad \Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{\lambda\theta}^\theta = -\operatorname{tg} \lambda$$

3.

$$\mathbf{grad}_i \varphi = \begin{pmatrix} \partial\varphi/\partial r \\ \partial\varphi/\partial \theta \\ \partial\varphi/\partial \lambda \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{grad}^i \varphi = g^{ii} \mathbf{grad}_i \varphi = \begin{pmatrix} \partial\varphi/\partial r \\ (1/r^2 \cos^2 \lambda) \partial\varphi/\partial \theta \\ (1/r^2) \partial\varphi/\partial \lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} r \\ \theta \\ \lambda \end{matrix}$$

(s s i)

4.

$$\frac{\partial \mathbf{grad}^i \varphi}{\partial u^i} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r^2 \cos^2 \lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \right)$$

Les seules valeurs non nulles pour Γ_{mi}^i , sans sommation sur i , sont :

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{r} \quad ; \quad \Gamma_{\lambda\theta}^\theta = -\operatorname{tg} \lambda \quad ; \quad \Gamma_{r\lambda}^\lambda = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{mi}^i \mathbf{grad}^m \varphi = \left(\Gamma_{r\theta}^\theta + \Gamma_{r\lambda}^\lambda \right) \mathbf{grad}^r \varphi + \Gamma_{\lambda\theta}^\theta \mathbf{grad}^\lambda \varphi$$

$$= \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\operatorname{tg} \lambda}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}$$

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \cos^2 \lambda} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\operatorname{tg} \lambda}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}$$

Chapitre 11

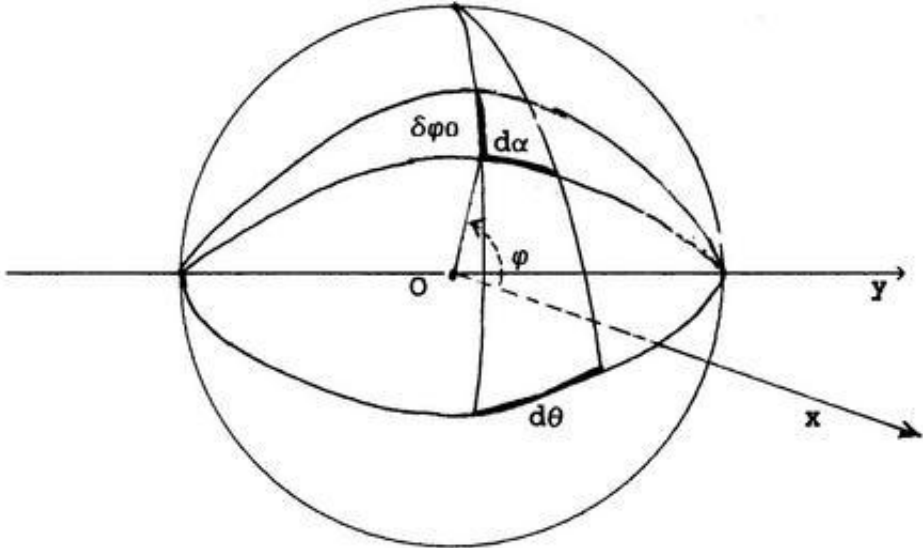
11.1 1. L'espace des géodésiques correspond ici à $\delta\theta = 0$. On a :

$$\frac{D^2(\delta\varphi)}{Dt^2} = \frac{d^2(\delta\varphi)}{dt^2} = R^{\varphi}_{\theta\varphi\theta} \delta\varphi \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

en effet $\Gamma^{\varphi}_{\varphi\theta} = 0$. Il vient :

$$\frac{d^2(\delta\varphi)}{dt^2} = -\cos^2\varphi \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \delta\varphi$$

2. On considère deux géodésiques voisines se rencontrant sur l'axe des y .



$\delta\varphi = \delta\varphi_0 \cos \alpha$; $\delta\varphi_0$ est l'écart maximal des géodésiques. On suppose $d\alpha/dt = \text{Cte}$; α est l'angle au centre correspondant au déplacement sur les deux géodésiques voisines, avec $\alpha = 0$ là où l'écart est maximal, c'est à dire là où les deux géodésiques sont parallèles.

$$\frac{d(\delta\varphi)}{dt} = -\delta\varphi_0 \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt}$$

$$\frac{d^2(\delta\varphi)}{dt^2} = -\delta\varphi_0 \cos \alpha \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2$$

puisque $d^2\alpha/dt^2 = 0$; en $\alpha = 0$, là où l'écart est maximal, nous avons donc :

$$\frac{d^2(\delta\varphi)}{dt^2} = -\delta\varphi_0 \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2$$

or $d\alpha = d\theta \cos \varphi$; il vient l'équation déjà trouvée :

$$\frac{d^2(\delta\varphi)}{dt^2} = -\delta\varphi \cos^2\varphi \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

11.2 1. Les déplacements correspondant à une variation de θ à φ fixé et de φ à θ fixé sont perpendiculaires. On a donc :

$$ds^2 = (R + r \cos \varphi)^2 d\theta^2 + r^2 d\varphi^2$$

2. Les symboles à envisager sont :

$$\Gamma_{\theta\theta}^{\theta} ; \Gamma_{\theta\varphi}^{\theta} ; \Gamma_{\varphi\varphi}^{\theta} ; \Gamma_{\theta\theta}^{\varphi} ; \Gamma_{\theta\varphi}^{\varphi} ; \Gamma_{\varphi\varphi}^{\varphi}$$

$$\Gamma_{\theta\varphi}^{\theta} = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} g_{\theta\theta,\varphi} = \frac{1}{2} \frac{1}{(R + r \cos \varphi)^2} 2(R + r \cos \varphi)(-r \sin \varphi)$$

$$\Gamma_{\varphi\theta}^{\theta} = \Gamma_{\theta\varphi}^{\theta} = -\frac{r \sin \varphi}{R + r \cos \varphi}$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^{\varphi} = \frac{1}{2} g^{\varphi\varphi} (-g_{\theta\theta,\varphi})$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \left[-2 (R + r \cos \varphi) (-r \sin \varphi) \right]$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^{\varphi} = \frac{(R + r \cos \varphi) \sin \varphi}{r}$$

3. Nous avons :

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial u^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial u^k} + \Gamma^h_{jk} \Gamma^i_{hl} - \Gamma^h_{jl} \Gamma^i_{hk}$$

Pour éviter la confusion avec R , paramètre du tore, la courbure scalaire sera notée R' dans cet exercice.

$$R' = g^{jl} R_{jl} = g^{jl} R^{\lambda}_{j\lambda l}$$

$$R' = g^{jl} \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{j\lambda}}{\partial u^l} - g^{jl} \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{jl}}{\partial u^{\lambda}} + g^{jl} \Gamma^h_{j\lambda} \Gamma^{\lambda}_{hl} - g^{jl} \Gamma^h_{jl} \Gamma^{\lambda}_{h\lambda}$$

Calcul de :

$$g^{jl} \Gamma^h_{j\lambda} \Gamma^{\lambda}_{hl}$$

a $j = l = \theta$:

$$\Gamma^{\varphi}_{\theta\theta} \Gamma^{\theta}_{\varphi\theta} g^{\theta\theta} \quad \text{et} \quad \Gamma^{\theta}_{\theta\varphi} \Gamma^{\varphi}_{\theta\theta} g^{\theta\theta}$$

On obtient donc :

$$2 \left[- \frac{r \sin \varphi}{R + r \cos \varphi} \right] \left[\frac{R + r \cos \varphi}{r} \sin \varphi \right] \frac{1}{(R + r \cos \varphi)^2}$$

$$= - \frac{2 \sin^2 \varphi}{(R + r \cos \varphi)^2}$$

b $j = l = \varphi$:

$$\Gamma_{\varphi\theta}^{\theta} \Gamma_{\theta\varphi}^{\theta} g^{\varphi\varphi}$$

$$= \frac{r^2 \sin^2 \varphi}{(R + r \cos \varphi)^2} \frac{1}{r^2} = \frac{\sin^2 \varphi}{(R + r \cos \varphi)^2}$$

Donc :

$$g^{jl} \Gamma_{j\lambda}^h \Gamma_{hl}^{\lambda} = - \frac{\sin^2 \varphi}{(R + r \cos \varphi)^2}$$

Calcul de :

$$- g^{jl} \Gamma_{jl}^h \Gamma_{hl}^{\lambda}$$

a $j = l = \theta$

$$- \Gamma_{\theta\theta}^{\varphi} \Gamma_{\varphi\theta}^{\theta} g^{\theta\theta} = \frac{\sin^2 \varphi}{(R + r \cos \varphi)^2}$$

b $j = l = \varphi \Rightarrow \Gamma_{\varphi\varphi}^h = 0$; donc :

$$- g^{jl} \Gamma_{jl}^h \Gamma_{hl}^{\lambda} = \frac{\sin^2 \varphi}{(R + r \cos \varphi)^2}$$

Calcul de :

$$g^{jl} \frac{\partial \Gamma_{j\lambda}^{\lambda}}{\partial u^l}$$

a $j = l = \theta \quad \partial/\partial\theta \Rightarrow 0$.

b $j = l = \varphi$

$$g^{\varphi\varphi} \frac{\partial \Gamma_{\varphi\theta}^{\theta}}{\partial \varphi}$$

$$= \frac{1}{r^2} \left[- \frac{r \cos \varphi (R + r \cos \varphi) - r \sin \varphi (- r \sin \varphi)}{(R + r \cos \varphi)^2} \right]$$

$$g^{jl} \frac{\partial \Gamma_{j\lambda}^{\lambda}}{\partial u^l} = - \frac{r + R \cos \varphi}{r (R + r \cos \varphi)^2}$$

Calcul de :

$$- g^{jl} \frac{\partial \Gamma_{jl}^\lambda}{\partial u^\lambda}$$

a $j = l = \theta \Rightarrow \lambda = \varphi$

$$- \frac{1}{(R + r \cos \varphi)^2} \frac{R \cos \varphi + r \cos^2 \varphi - r \sin^2 \varphi}{r}$$

b $j = l = \varphi \Rightarrow 0$

$$- g^{jl} \frac{\partial \Gamma_{jl}^\lambda}{\partial u^\lambda} = - \frac{R \cos \varphi + r \cos^2 \varphi - r \sin^2 \varphi}{r (R + r \cos \varphi)^2}$$

En ajoutant tous les termes, il vient :

$$R' = \frac{- 2 \cos \varphi}{r (R + r \cos \varphi)}$$

4. La courbure \mathfrak{K} vaut :

$$\mathfrak{K} = \frac{2 \cos \varphi}{r (R + r \cos \varphi)}$$

Pour $R = 0$, on retrouve la courbure de la sphère $\mathfrak{K} = 2/r^2$.

En $\varphi = 0$, on a :

$$\mathfrak{K} = \frac{2}{r (R + r)} = \frac{2}{R_1 R_2}$$

$R_1 = r$ et $R_2 = R + r$ sont les rayons de courbures principaux.

En $\varphi = \pi$:

$$\mathfrak{K} = \frac{- 2}{r (R - r)} = - \frac{2}{R_1 R_2}$$

$R_1 = r$ et $R_2 = R - r$ sont encore les rayons de courbure principaux au point considéré.

En $\varphi = \pi/2$ la courbure est nulle.

On retrouve, ce qui est évident intuitivement, que pour $0 \leq \varphi < \pi/2$ on a une surface à courbure positive et pour $\pi/2 < \varphi \leq \pi$ on a une surface à courbure négative.

11.3

Nous avons :

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{r} \quad \text{et} \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = - r$$

$$d(\mathbf{e}_x)^r = - (\mathbf{e}_x)^\theta \Gamma_{\theta\theta}^r d\theta = r (\mathbf{e}_x)^\theta d\theta$$

$$d(\mathbf{e}_x)^\theta = - (\mathbf{e}_x)^r \Gamma_{r\theta}^\theta d\theta - (\mathbf{e}_x)^\theta \Gamma_{\theta r}^\theta dr$$

$$d(\mathbf{e}_x)^\theta = - \frac{(\mathbf{e}_x)^r}{r} d\theta - \frac{(\mathbf{e}_x)^\theta}{r} dr$$

$$\frac{\partial^2 (\mathbf{e}_x)^r}{\partial \theta^2} = r \frac{\partial (\mathbf{e}_x)^\theta}{\partial \theta} = - (\mathbf{e}_x)^r$$

d'où $(\mathbf{e}_x)^r = A(r) \cos \theta + B(r) \sin \theta$

et $\frac{\partial (\mathbf{e}_x)^r}{\partial r} = 0 \Rightarrow A'(r) = B'(r) = 0$

$$(\mathbf{e}_x)^r(A) = 1 \Rightarrow A(r) = 1$$

$$\frac{\partial (\mathbf{e}_x)^r}{\partial \theta}(A) = r (\mathbf{e}_x)^\theta(A) = 0 \Rightarrow B(r) = 0$$

Finalement : $(\mathbf{e}_x)^r = \cos \theta$. Puis :

$$\frac{\partial (\mathbf{e}_x)^\theta}{\partial \theta} = - \frac{(\mathbf{e}_x)^r}{r} = - \frac{\cos \theta}{r}$$

$$\Rightarrow (\mathbf{e}_x)^\theta = - \frac{\sin \theta}{r} + \varphi(r)$$

et $\frac{\partial (\mathbf{e}_x)^\theta}{\partial r} = \frac{\sin \theta}{r^2} + \varphi'(r) = \frac{\sin \theta}{r^2} - \frac{\varpi(r)}{r}$

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = - \frac{1}{r}$$

$$\text{Log } \frac{\varphi}{\lambda} = - \text{Log } r = \text{Log } \frac{1}{r}$$

$$\varpi = \frac{\lambda}{r}$$

$$(\mathbf{e}_x)^\theta = - \frac{\sin \theta + \text{Cte}}{r}$$

et $(\mathbf{e}_x)^\theta(A) = 0 \Rightarrow \text{Cte} = 0$

Nous avons donc :

$$\mathbf{e}_x = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ - \frac{\sin \theta}{r} \end{pmatrix}$$

De la même manière, on obtient :

$$\mathbf{e}_y = \begin{pmatrix} \frac{\sin \theta}{r} \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

2.

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x = 1 \times \cos^2 \theta + r^2 \times \left(- \frac{\sin \theta}{r} \right)^2 = 1$$

$$\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y = 1 \times \cos \theta \sin \theta + r^2 \times \left(-\frac{\sin \theta}{r} \frac{\cos \theta}{r} \right) = 0$$

3. En ce qui concerne les formes :

$$d(e^{*x})_r = (e^{*x})_r \Gamma_{rr}^r dr + (e^{*x})_r \Gamma_{r\theta}^r d\theta \\ + (e^{*x})_\theta \Gamma_{rr}^\theta dr + (e^{*x})_\theta \Gamma_{r\theta}^\theta d\theta$$

$$\frac{\partial(e^{*x})_r}{\partial r} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial(e^{*x})_r}{\partial \theta} = (e^{*x})_\theta \frac{1}{r}$$

De la même manière :

$$\frac{\partial(e^{*x})_\theta}{\partial r} = (e^{*x})_\theta \frac{1}{r} \quad \text{et} \quad \frac{\partial(e^{*x})_\theta}{\partial \theta} = - (e^{*x})_r r$$

L'intégration de ce système différentiel donne :

$$\mathbf{e}^{*x} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ -r \sin \theta \end{pmatrix}$$

De la même manière, on obtient :

$$\mathbf{e}^{*y} = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$$

et on vérifie par exemple que $\mathbf{e}^{*y}(\mathbf{e}_x) = \sin \theta \cos \theta + r \cos \theta \left(-\frac{\sin \theta}{r} \right) = 0$

4.

$$\frac{\partial x}{\partial r} = (e^{*x})_r = \cos \theta$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \sin \theta \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 x}{\partial \theta \partial r} = -\sin \theta = \frac{\partial^2 x}{\partial r \partial \theta}$$

$$x = r \cos \theta + \varphi(\theta) ; \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \sin \theta + \varphi'(\theta) =$$

$-r \sin \theta \Rightarrow \varphi'(\theta) = 0 \Rightarrow \varphi(\theta) = \text{Cte}$; et on prend l'origine des coordonnées de façon à avoir $\varphi(\theta) = 0$.

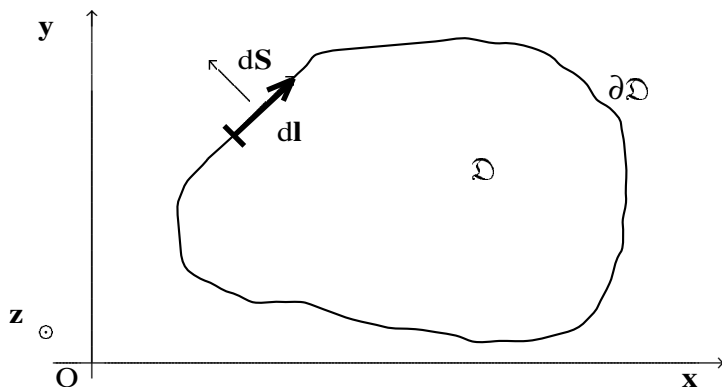
De la même manière, on obtient $y = r \sin \theta$.
Finalement :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

11.4 Considérons, dans le plan muni du repère orthonormé xOy le champ de vecteurs :

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} Q \\ -P \end{pmatrix}$$

et la surface fermée \mathcal{D} .



$$d\mathbf{l} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \quad ; \quad d\mathbf{S} = \begin{pmatrix} dy \\ -dx \end{pmatrix}$$

On complète avec l'axe des z pour faire un trièdre direct, et on prend dans l'espace le champ de vecteurs :

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix}$$

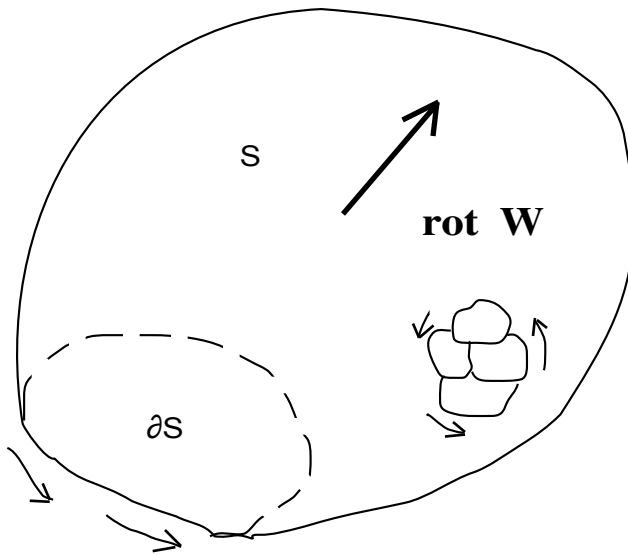
On a :

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} Q(x,y,0) \\ -P(x,y,0) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} \text{rot } \mathbf{W} \, d\mathcal{S} &= \iint_{\mathcal{D}} \begin{pmatrix} \partial R/\partial y - \partial Q/\partial z \\ \partial P/\partial z - \partial R/\partial x \\ \partial Q/\partial x - \partial P/\partial y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ dx \, dy \end{pmatrix} \\ &= \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \, dy = \iint_{\mathcal{D}} \text{div } \mathbf{V} \, d\mathbf{u} = \int_{\partial\mathcal{D}} \mathbf{V} \, d\mathbf{S} \\ &= \int_{\partial\mathcal{D}} \begin{pmatrix} Q \\ -P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dy \\ -dx \end{pmatrix} = \int_{\partial\mathcal{D}} P \, dx + Q \, dy = \int_{\partial\mathcal{D}} \mathbf{W} \, d\mathbf{l} \end{aligned}$$

La formule est donc vraie pour une surface fermée \mathcal{D} plane.

Considérons maintenant une surface S non plane :



On peut la décomposer en petits éléments de surface \mathcal{D}_i de bords $\partial\mathcal{D}_i$ suffisamment petits pour être considérés comme plans; et on a :

$$\int_{\partial S} \mathbf{W} \, d\mathbf{l} = \sum_i \int_{\partial\mathcal{D}_i} \mathbf{W} \, d\mathbf{l}$$

Les circulations sur les bords intérieurs étant parcourues une fois dans un sens, une fois dans l'autre, s'annulent en effet, et il ne reste finalement que la circulation sur le bord ∂S .

$$= \sum_i \iint_{\mathcal{D}_i} \text{rot } \mathbf{W} \, d\mathcal{S} = \iint_{\mathcal{D}} \text{rot } \mathbf{W} \, d\mathcal{S}$$

Chapitre 12

12.1 1. On obtient :

$$\frac{d^2 t}{dp^2} + \Gamma_{xx}^t \left(\frac{dx}{dp} \right)^2 + 2 \Gamma_{tx}^t \frac{dx}{dp} \frac{dt}{dp} + \Gamma_{tt}^t \left(\frac{dt}{dp} \right)^2 = 0$$

$$\Gamma_{tt}^t = 0 \quad ; \quad \Gamma_{xx}^t = 0$$

$$\Gamma_{tx}^t = \frac{1}{2} g^{tt} \left(g_{tt,x} \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{A} \frac{1}{C^2} A', C^2 = \frac{1}{2} \frac{A'}{A}$$

$$\frac{d^2 t}{dp^2} + \frac{A'}{A} \frac{dt}{dp} \frac{dx}{dp} = 0$$

$$\frac{d^2x}{dp^2} + \Gamma_{xx}^x \left(\frac{dx}{dp} \right)^2 + 2 \Gamma_{xt}^x \left(\frac{dx}{dp} \right) \left(\frac{dt}{dp} \right) + \Gamma_{tt}^x \left(\frac{dt}{dp} \right)^2 = 0$$

$$\Gamma_{xx}^x = \frac{1}{2} g^{xx} g_{xx,x} = \frac{1}{2} (-A) \left(\frac{A'}{A^2} \right) = -\frac{A'}{2A}$$

$$\Gamma_{xt}^x = 0 \quad ; \quad \Gamma_{tt}^x = \frac{1}{2} g^{xx} (-g_{tt,x}) = \frac{A A'}{2} C^2$$

$$\frac{d^2x}{dp^2} - \frac{A'}{2A} \left(\frac{dx}{dp} \right)^2 + \frac{1}{2} A A' \left(\frac{dt}{dp} \right)^2 C^2 = 0$$

2. Le traitement qui est fait dans cet exercice est le même que celui qui sera effectué au 8 et 9 du chapitre 16 ; x correspond à r .

$$\frac{d}{dp} \text{Log} \frac{dt}{dp} + \frac{d}{dp} \text{Log} A = 0$$

$$\frac{dt}{dp} A = \text{Cte}$$

ce qui est l'équation (16,12).

On peut normaliser le paramètre p de façon à avoir :

$$\frac{dt}{dp} = \frac{1}{A C}$$

3. L'équation en x devient :

$$\frac{d^2x}{dp^2} - \frac{A'}{2A} \left(\frac{dx}{dp} \right)^2 - \frac{A A'}{2} \frac{1}{A^2 C^2} C^2 = 0$$

et $x = \pm p$ est solution de cette équation. A l'infini, où le champ de gravité est nul, et où $\phi = 0$, cela correspond à $dx/dt = \pm C$ puisque $A = 1$. On a donc bien la propagation d'un rayon lumineux.

4. t_l étant le temps propre local, on a :
 $dt_l = \sqrt{A} dt$. l étant la longueur étalon locale, on a : $dl = 1/\sqrt{A} dx$. et :

$$\frac{dl}{dt_l} = \frac{1}{A} \frac{dx}{dt} = C$$

On peut écrire :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dl}{dt_l} \frac{\left(\frac{dx}{dl} \right)}{\left(\frac{dt}{dt_l} \right)} = C \frac{\sqrt{A}}{1/\sqrt{A}} = A C$$

et on voit que la vitesse apparente de la lumière

dx/dt est inférieure à C , le facteur A venant pour moitié du ralentissement du temps, et pour moitié de la contraction des longueurs. Voir également à ce sujet le 21 du chapitre 16 .

12.2

1. On a :

$$1 = \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{1 - 2 \phi(x)/C^2} \sqrt{1 + (dx/dz)^2} dz$$

qui s'écrit :

$$1 = \int_{z_1}^{z_2} L \left(x(z), \dot{x}(z), z \right) dz$$

L'équation de Lagrange correspondante s'écrit (voir 4 du chapitre 10) :

$$\frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

soit :

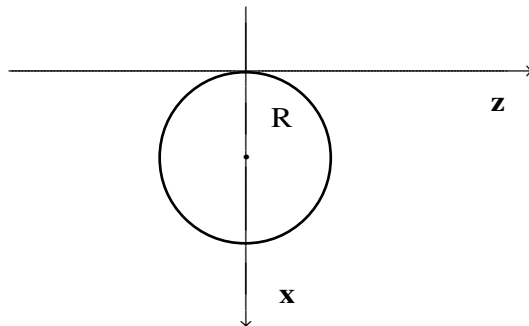
$$\frac{d}{dz} \left[\frac{1}{2} \frac{2 \frac{dx}{dz} \sqrt{1 - \frac{2 \phi(x)}{C^2}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2}} - \frac{1}{2} \frac{- \frac{2 \phi'(x)}{C^2} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2}}{\sqrt{1 - \frac{2 \phi(x)}{C^2}}} \right] = 0$$

Au point S sommet de la courbe, on a $x'(z) = 0$ d'autre part, $\phi(x)/C^2$ est extrêmement faible. L'équation devient alors :

$$x''(z) + \frac{\phi'(x)}{C^2} = 0 \quad ; \quad x''(z) = -\frac{g}{C^2}$$

ce qui, compte tenu de l'orientation de l'axe des x , donne bien une courbure vers le bas.

Pour le cercle de rayon R ci-dessous :



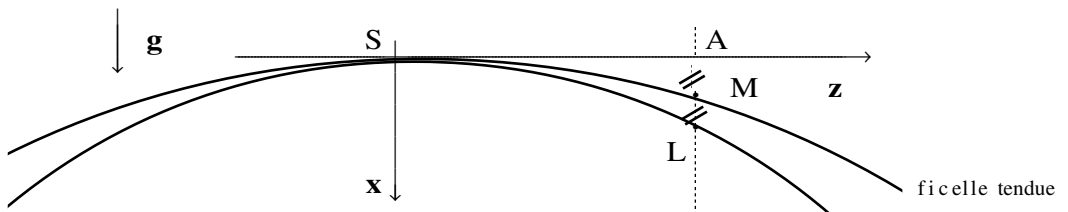
$$(x - R)^2 + z^2 = R^2 \quad ; \quad x^2 - 2 x R + z^2 = 0$$

soit $x \approx z^2/2 R$; $x'' = 1/R$; on a donc :

$$R = \frac{C^2}{g}$$

et la courbure de la ficelle tendue vaut g/C^2 .

2. On a vu au 22 que la lumière (point L sur la figure) possède l'accélération $2g$ vers le bas : la moitié de cette accélération, g , est celle qu'aura un objet (point M sur la figure) parcourant à la vitesse C le chemin d'une ficelle tendue horizontalement (règle étalon d'un référentiel galiléen). Cette accélération est due à la déformation de l'espace dans un champ de gravitation. L'autre moitié, encore g , vient de la chute de la lumière dans le champ de gravité, chute repérée par rapport à la ficelle tendue horizontalement précédente, donc par rapport au point M précédent. La lumière tombe bien avec l'accélération g par rapport à une droite horizontale de l'espace, comme tout corps lancé horizontalement, quelle que soit sa vitesse.



On a $SA \approx C t$; $AM = 1/2 g t^2$; $AL = g t^2$ et $AM = ML$.

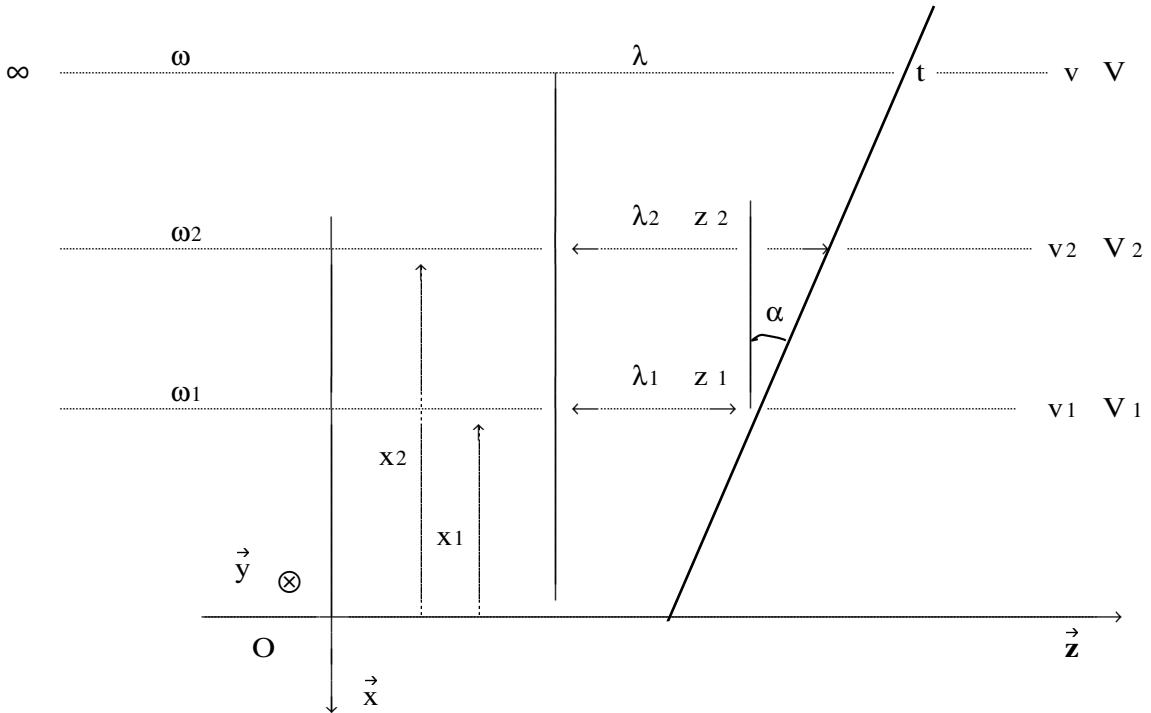
Il est donc clair que la courbure de la trajectoire parcourue par la lumière est le double de celle de la ficelle tendue, donc vaut $2g/C^2$.

Dans un champ de gravitation, on ne peut donc pas définir les droites de l'espace comme les trajectoires de la lumière. Les droites sont les chemins les plus courts de l'espace. Elles sont définies au moyen de ficelles tendues. Les droites horizontales ont la courbure g/C^2 par rapport aux coordonnées x,z .

3. $x = z^2/2 R = z^2 g/2 C^2$. On trouve : $x = 55 \text{ \AA}$.

12.3 On considère donc sur la figure ci-dessous une onde de matière plane se propageant horizontalement. Les plans d'onde sont donc verticaux. On considère, comme dans la figure 12.3, trois niveaux d'altitude. Un niveau très éloigné de l'astre (altitude infinie) où la

longueur d'onde vaut λ , la vitesse de propagation des particules v , la vitesse de phase V , la pulsation ω . Un niveau x_2 où ces valeurs sont respectivement λ_2 , v_2 , V_2 , ω_2 . La distance horizontale entre deux plans d'onde, évaluée avec la coordonnée z vaut alors z_2 . Plus bas, on a respectivement λ_1 , v_1 , V_1 , ω_1 , z_1 .



On ne peut plus, comme dans le paragraphe 21, utiliser directement l'invariance de C . La démarche est alors la suivante :

On sait que si la pulsation ω_0 correspond aux particules au repos par $m C^2 = \hbar \omega_0$, lorsque ces dernières sont animées de la vitesse v , la pulsation vaut :

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - v^2/C^2}}$$

ainsi, la masse m étant fixée, nous avons un lien entre v et ω . La vitesse de phase V est alors donnée par $V v = C^2$.

ω à l'infini étant donnée, nous en déduisons ω_2 par la formule (12,59), l'onde vibrant partout en phase dans un plan vertical. En utilisant la propriété d'invariance de la masse d'une particule quelle que soit sa situation, donc l'invariance de ω_0 , et en utilisant un référentiel galiléen local à l'altitude x_2 dans lequel la Relativité restreinte s'applique, nous aurons alors accès à v_2 , donc aussi à V_2 . Nous aurons alors λ_2 et enfin z_2 . De la variation de z en fonction de x , nous en déduisons

la rotation progressive des plans d'ondes, donc la chute de la particule. Effectuons ce programme :

$$\omega_2 = \frac{\omega}{\sqrt{1 + 2\phi/C^2}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - v^2/C^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + 2\phi/C^2}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - v^2/C^2}}$$

$$1 - \frac{v^2}{C^2} = \left(1 - \frac{v^2}{C^2}\right) \left(1 + \frac{2\phi}{C^2}\right)$$

$$\frac{v^2}{C^2} = 1 - \left(1 - \frac{v^2}{C^2}\right) \left(1 + \frac{2\phi}{C^2}\right)$$

$$v^2 = \sqrt{C^2 - C^2 \left(1 - \frac{v^2}{C^2}\right) \left(1 + \frac{2\phi}{C^2}\right)}$$

$$V = \frac{\lambda \omega}{2\pi} \quad ; \quad \lambda = \frac{2\pi C^2}{\omega v}$$

$$z_2 = \frac{2\pi C^2}{\omega_2 v^2} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\phi/C^2}} = \frac{2\pi C^2}{\omega v^2} \sqrt{\frac{1 + 2\phi/C^2}{1 - 2\phi/C^2}}$$

$$z_2 = \frac{2\pi C^2}{\omega} \frac{\sqrt{\frac{1 + 2\phi/C^2}{1 - 2\phi/C^2}}}{\sqrt{C^2 - C^2 \left(1 - \frac{v^2}{C^2}\right) \left(1 + 2\phi/C^2\right)}}$$

$$\alpha = -\frac{dz}{dx} \quad ; \quad R \alpha = z \quad ; \quad \gamma = \frac{v^2}{R}$$

$$\gamma = v^2 \left(-\frac{dz}{dx}\right) \frac{1}{z} \quad \gamma = v^2 \frac{d}{dx} \left(\text{Log} \frac{1}{z}\right)$$

pour $\phi \approx 0$

$$\gamma = v^2 \left[\left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{2g}{C^2} - \frac{2g}{C^2}\right) + \frac{1}{2} \frac{2g \left(1 - \frac{v^2}{C^2}\right)}{v^2} \right]$$

$$\gamma = \frac{2g}{C^2} v^2 + g \left(1 - \frac{v^2}{C^2}\right) \quad ; \quad \gamma = g + g \frac{v^2}{C^2}$$

ce qui est bien la formule (12,57).

Remarquons que s'il n'y avait pas d'effet de contraction des longueurs donnant un aspect courbé au référentiel galiléen, il n'y aurait pas le terme

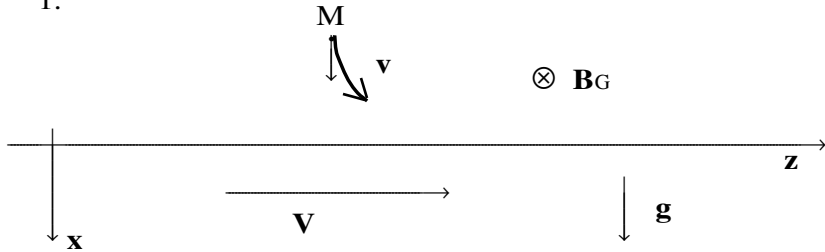
$1 - 2 \phi/C^2$, et l'on obtiendrait :

$$\gamma = \frac{g v^2}{C^2} + g \left(1 - \frac{v^2}{C^2} \right) = g$$

résultat trouvé dans une fusée accélérée pour laquelle seul l'effet de retard de l'écoulement du temps intervient.

12.4

1.



$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} + \Gamma_{xx}^z \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 + 2 \Gamma_{xt}^z \frac{dx}{d\tau} \frac{dt}{d\tau} + \Gamma_{tt}^z \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0$$

avec

$$ds^2 = \left(C^2 + 2 \phi (ch^2 \phi + sh^2 \phi) \right) dt^2 - \left(1 - \frac{2 \phi}{C^2} \right) dx^2 - 8 \frac{\phi}{C} sh \phi ch \phi dt dz - \left(1 - \frac{2 \phi}{C^2} (ch^2 \phi + sh^2 \phi) \right) dz^2$$

$$\Gamma_{xx}^z = 0 \quad ; \quad \Gamma_{tt}^z = 0$$

$$\Gamma_{xt}^z \approx \frac{1}{2} \eta^{zz} \left(g_{tz,x} \right) = \frac{1}{2} (-1) \left(-4 \frac{\phi'}{C} sh \phi ch \phi \right)$$

$$\Gamma_{xt}^z = - \frac{2 g}{C} sh \phi ch \phi$$

$d\tau \approx dt$ car $v \ll C$. Il vient :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{4 g}{C} sh \phi ch \phi \frac{dx}{dt}$$

2. $\mathbf{F} = m C \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}_G$

$$\frac{4 g m}{C} sh \phi ch \phi v = m C v B_G$$

$$B_G = \frac{4 g}{C^2} sh \phi ch \phi$$

$$B_G \approx \frac{4 g V}{C^3}$$

En électromagnétisme, on a :

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0 r} \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 \lambda V}{2 \pi r} \quad \text{avec} \quad \epsilon_0 \mu_0 C^2 = 1$$

$\mathbf{j} = \rho \mathbf{V}$. Ici, \mathbf{B}_G est de sens opposé à celui du champ magnétique créé par des charges animées de la vitesse \mathbf{V} .

Avec la gravité, on sait que : $\nabla^2 \phi = 4 \pi G \rho_M$ au lieu de $\nabla^2 \phi = -\rho/\epsilon_0$ en électrostatique. \mathbf{g} est l'analogue de \mathbf{E} . Nous devons donc faire la substitution $1/\epsilon_0 \rightarrow -4 \pi G$ et on obtient :

$$\mathbf{g} = \frac{2 G \lambda_M}{r} \quad \text{donc} \quad \mathbf{B}_G = \frac{8 G \lambda_M V}{C^3 r}$$

3. On obtient donc :

$$\mathbf{B}_G = \frac{16 \pi G (\lambda_M C V)}{C^4 2 \pi r}$$

En comparant avec l'expression de \mathbf{B} de l'électromagnétisme, il faut donc écrire :

$$\mathbf{rot} \mathbf{B}_G = - \frac{16 \pi G}{C^4} \mathbf{j}_G$$

12.5

1.

$$ds^2 = C^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

$$dx = \text{ch } \varphi d\bar{x} + \text{sh } \varphi C d\bar{t}$$

$$C dt = \text{sh } \varphi d\bar{x} + \text{ch } \varphi C d\bar{t}$$

$$dx = \text{ch } \varphi d\bar{x} + \text{sh } \varphi \left(\frac{C dt}{\text{ch } \varphi} - \frac{\text{sh } \varphi}{\text{ch } \varphi} d\bar{x} \right)$$

$$dx = \text{th } \varphi C dt + \frac{1}{\text{ch } \varphi} d\bar{x}$$

$$ds^2 = \left(C^2 - v^2 \right) dt^2 - \frac{d\bar{x}^2}{\text{ch}^2 \varphi} - 2 \frac{\text{th } \varphi}{\text{ch } \varphi} C dt d\bar{x} - d\bar{y}^2 - d\bar{z}^2$$

2. (12,21) donne :

$$d\tau = d\bar{t} = \frac{1}{C} \sqrt{C^2 - v^2} dt$$

pour $d\bar{x} = d\bar{y} = d\bar{z} = 0$; soit :

$$d\bar{t} = \sqrt{1 - v^2/C^2} dt = \frac{1}{\text{ch } \varphi} dt$$

ce qui est bien ce que nous avons trouvé (équation

(3,5)).

(12,28) donne :

$$\gamma_{\bar{x}\bar{x}} = -g_{\bar{x}\bar{x}} + \frac{g_{t\bar{x}} g_{t\bar{x}}}{g_{tt}}$$

$$\gamma_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{1}{ch^2 \varphi} + \frac{\left(-\frac{th \varphi}{ch \varphi} C \right)^2}{\frac{1}{ch^2 \varphi} C^2} = 1$$

Donc \bar{x} est bien la longueur étalon!

(12,29) donne :

$$du^0 = -\frac{g_{0i}}{g_{00}} du^i$$

$$dt = -\frac{-\frac{th \varphi}{ch \varphi} C}{\frac{1}{ch^2 \varphi} C^2} d\bar{x} = \frac{sh \varphi}{C} d\bar{x}$$

or $C dt = sh \varphi d\bar{x} + ch \varphi C d\bar{t}$ donne pour $d\bar{t} = 0$ ce résultat!

12.6

1. Nous avons, toutes les grandeurs étant évaluées dans cet exercice au premier ordre :

$$\phi = \phi_0 + \frac{d\phi}{dx} x = \phi_0 + \phi_1$$

avec $\phi_1 = 0$ au point considéré. On pose :

$$t' = \left(1 + \frac{\phi_0}{C^2} \right) t ; \quad x' = \left(1 - \frac{\phi_0}{C^2} \right) x$$

idem pour y et z . Cela revient à prendre les coordonnées étalons au point considéré pour normer t , x , y , et z . Cela ne change rien aux directions des lignes coordonnées correspondantes. On a :

$$\left(\frac{1}{1 + \phi_0/C^2} \right)^2 \approx 1 - 2 \phi_0/C^2 \text{ etc}$$

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2 \phi_0}{C^2} \right) \left(1 + \frac{2 \phi_1}{C^2} \right) C^2 \left(1 - \frac{2 \phi_0}{C^2} \right) dt'^2$$

$$- \left(1 - \frac{2 \phi_0}{C^2} \right) \left(1 - \frac{2 \phi_1}{C^2} \right) \left(1 + \frac{2 \phi_0}{C^2} \right) (dx'^2 + dy'^2 + dz'^2)$$

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2 \phi_1}{C^2} \right) C^2 dt'^2 - \left(1 - \frac{2 \phi_1}{C^2} \right) (dx'^2 + dy'^2 + dz'^2)$$

On peut alors enlever les primes dans la

notation, et écrire ϕ au lieu de ϕ_1 . On a $\phi_1 = -g x$ au premier ordre en x .

2.

$$\begin{aligned}\Gamma_{tx}^t &= -\frac{g}{C^2} & \Gamma_{tt}^x &= -g & \Gamma_{xx}^x &= \frac{g}{C^2} \\ \Gamma_{zz}^x &= -\frac{g}{C^2} & \Gamma_{xz}^z &= \frac{g}{C^2}\end{aligned}$$

3. On utilise l'équation (11,12) :

$$dV^i = -V^j \Gamma_{jk}^i du^k$$

Prenons \vec{e}_t :

$$\frac{\partial(\vec{e}_t)^t}{\partial x} = -\Gamma_{tx}^t = \frac{g}{C^2}$$

$$\frac{\partial(\vec{e}_t)^x}{\partial t} = -\Gamma_{tt}^x = g$$

$$\vec{e}_t = \begin{pmatrix} 1 + g x/C^2 \\ g t \\ 0 \end{pmatrix}$$

soit :

$$\vec{e}_t = (1 + g x/C^2) \vec{e}_t(M) + g t \vec{e}_x(M) + 0 \vec{e}_z(M)$$

Prenons \vec{e}_x :

$$\frac{\partial(\vec{e}_x)^t}{\partial t} = -\Gamma_{xt}^t = \frac{g}{C^2}$$

$$\frac{\partial(\vec{e}_x)^x}{\partial x} = -\Gamma_{xx}^x = -\frac{g}{C^2}$$

$$\frac{\partial(\vec{e}_x)^z}{\partial z} = -\Gamma_{xz}^z = -\frac{g}{C^2}$$

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} g t/C^2 \\ 1 - g x/C^2 \\ -g z/C^2 \end{pmatrix}$$

Prenons \vec{e}_z :

$$\frac{\partial(\vec{e}_z)^x}{\partial z} = -\Gamma_{zz}^x = \frac{g}{C^2}$$

$$\frac{\partial(\vec{e}_z)^z}{\partial x} = -\Gamma_{zx}^z = -\frac{g}{C^2}$$

$$\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ g z/C^2 \\ 1 - g x/C^2 \end{pmatrix}$$

Interprétons ces résultats : On a des vecteurs liés à un référentiel galiléen en chute libre (vecteurs libres de l'espace de Minkowski associé).

Les termes $1 - g x/C^2$ pour la composante en x de \vec{e}_x et en z de \vec{e}_z viennent de l'effet de contraction des longueurs lorsqu'on s'enfonce; en effet :

$$(\vec{e}_x)^x = \left(\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \bar{x}} \right)^x = \frac{1}{\sqrt{1 - 2 \phi/C^2}} \left(\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial x} \right)^x$$

$$= 1 - \frac{g x}{C^2}$$

idem pour $(\vec{e}_z)^z$. De même, $1 + g x/C^2$ pour \vec{e}_t vient de l'effet de dilatation des temps lorsqu'on s'enfonce :

$$(\vec{e}_t)^t = \left(\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \bar{t}} \right)^t = \frac{1}{\sqrt{1 + 2 \phi/C^2}} \left(\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial t} \right)^t$$

$$= 1 + \frac{g x}{C^2}$$

Le terme $g z/C^2$ pour \vec{e}_z montre la rotation progressive de ce vecteur vu avec les coordonnées t, x, z lorsqu'on le transporte parallèlement à lui-même dans un référentiel galiléen, effet déjà vu au paragraphe 22 et dans l'exercice 12.2. Cet effet est montré dans les deux figures ci-dessous. idem pour $-g z/C^2$ pour $(\vec{e}_x)^z$.

Le long du vecteur \vec{e}_x il y a simultanément dans le référentiel galiléen, donc il n'y a pas simultanément dans le référentiel de départ, au bout du temps t , lorsque la vitesse est devenue $g t$; autrement dit :

Dans le référentiel galiléen que nous appelons \mathcal{R} l'extrémité du vecteur \vec{e}_x a pour coordonnées $\bar{x} = 1$ et $\bar{t} = 0$. C'est à dire que :

$$\vec{e}_x = \mathcal{VM} \quad \text{avec dans } \mathcal{R} \quad \mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \bar{t} \\ \bar{x} \end{matrix} \quad \mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \bar{t} \\ \bar{x} \end{matrix}$$

La transformation de Lorentz (3,2) avec $v = g t$ donne :

$$(\vec{e}_x)^t = t(\mathcal{M}) = \frac{g}{C^2} t$$

de même, on a :

$$\vec{e}_t = \mathcal{VM} \quad \text{avec dans } \mathcal{R} \quad \mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\bar{t}}{\bar{x}} \quad \mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\bar{t}}{\bar{x}}$$

et la transformation de Lorentz donne :

$$(\vec{e}_t)^x = x(\mathcal{M}) = g t$$

4. De (9,26) on tire :

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial u^k} = \phi_j \Gamma_{ik}^j$$

$$\frac{\partial (e^{*\bar{t}})_t}{\partial x} = \Gamma_{tx}^t = -\frac{g}{C^2}$$

$$\frac{\partial (e^{*\bar{t}})_x}{\partial t} = \Gamma_{xt}^t = -\frac{g}{C^2}$$

$$e^{*\bar{t}} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{g}{C^2} \frac{x}{C^2} \\ -\frac{g}{C^2} \frac{t}{C^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial (e^{*\bar{x}})_t}{\partial t} = \Gamma_{tt}^x = -g$$

$$\frac{\partial (e^{*\bar{x}})_x}{\partial x} = \Gamma_{xx}^x = \frac{g}{C^2}$$

$$\frac{\partial (e^{*\bar{x}})_z}{\partial z} = \Gamma_{zz}^x = -\frac{g}{C^2}$$

$$e^{*\bar{x}} = \begin{pmatrix} -\frac{g}{C^2} \frac{t}{C^2} \\ 1 + \frac{g}{C^2} \frac{x}{C^2} \\ -\frac{g}{C^2} \frac{z}{C^2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial (e^{*\bar{z}})_x}{\partial z} = \Gamma_{xz}^z = \frac{g}{C^2}$$

$$\frac{\partial (e^{*\bar{z}})_z}{\partial x} = \Gamma_{zx}^z = \frac{g}{C^2}$$

$$e^{*\bar{z}} = \begin{pmatrix} 0 \\ g z/C^2 \\ 1 + g x/C^2 \end{pmatrix}$$

Les variations inverses en $1 - g x/C^2$ pour $(\vec{e}_{\bar{z}})_z$ par exemple et $1 + g x/C^2$ pour $(e^{*\bar{z}})^z$ correspondent à la dualité entre vecteurs et formes linéaires. Elles peuvent s'interpréter en disant qu'un vecteur représente l'unité de longueur, tandis que la forme linéaire est la mesure de cette longueur. Si l'unité est plus petite, la mesure est plus grande.

Au premier ordre en x et z , on vérifie bien que :

$$e^{*\bar{t}}(\vec{e}_{\bar{t}}) = (1 + g x/C^2) (1 - g x/C^2) - g^2 t^2/C^2 = 1$$

$$e^{*\bar{z}}(\vec{e}_{\bar{t}}) = g t g z/C^2 = 0 \quad \text{etc}$$

Interprétons les résultats obtenus; nous avons :

$$e^{*i}(M) (d\vec{M}) = dx^i$$

$$d\sigma = dl = d\bar{x} = e^{*\bar{x}} \begin{pmatrix} 0 \\ dx \\ 0 \end{pmatrix} = \left(1 + \frac{g x}{C^2} \right) dx$$

$$= \sqrt{1 - \frac{2 \phi}{C^2}} dX \quad ; \text{ ce qui est (12,51).}$$

On interprète de même le terme en $1 + g x/C^2$ de $e^{*\bar{z}}$.

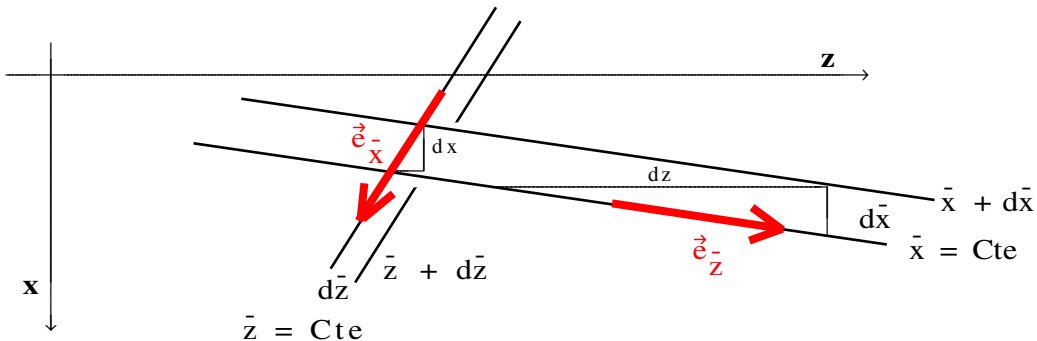
$$d\tau = d\bar{t} = e^{*\bar{t}} \begin{pmatrix} dt \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(1 - \frac{g x}{C^2} \right) dt$$

ce qui est (12,40).

D'autre part, on a :

$$d\bar{z} = e^{*\bar{z}} \begin{pmatrix} 0 \\ dx \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{g z}{C^2} dx$$

qui s'interprète sur la figure ci-dessous.



$$\frac{d\bar{z}}{dx} = \frac{-(\vec{e}_x^z)^z}{(\vec{e}_x^x)^x} = \frac{\frac{g}{C^2} z}{1} = \frac{g}{C^2} z$$

$$d\bar{x} = e^{*\bar{x}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ dz \end{pmatrix} = -\frac{g}{C^2} z dz$$

$$\frac{d\bar{x}}{dz} = \frac{-(\vec{e}_z^x)^x}{(\vec{e}_z^z)^z} = \frac{-\frac{g}{C^2} z}{1} = -\frac{g}{C^2} z$$

Il nous reste à interpréter $(e^{*\bar{t}})_x$ et $(e^{*\bar{x}})_t$.
Reprenons la transformation de Lorentz :

$$\begin{aligned} d\bar{x} &= dx \operatorname{ch} \varphi - C dt \operatorname{sh} \varphi \\ C d\bar{t} &= -dx \operatorname{sh} \varphi + C dt \operatorname{ch} \varphi \end{aligned}$$

avec $\operatorname{th} \varphi = v/C = g t/C$.

$$e^{*\bar{t}} \begin{pmatrix} 0 \\ dx \\ 0 \end{pmatrix} = d\bar{t} = -\frac{dx}{C} \frac{v}{C} = -\frac{g}{C^2} t dx$$

$$e^{*\bar{x}} \begin{pmatrix} dt \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = d\bar{x} = -C dt \frac{v}{C} = -g t dt$$

5. Commençons par la variable \bar{x} .

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial t} = (e^{*\bar{x}})_t = -g t \Rightarrow \bar{x} = -\frac{1}{2} g t^2 + \varphi(x, z)$$

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial x} = 1 + \frac{g}{C^2} x \Rightarrow \bar{x} = -\frac{1}{2} g t^2 + x + \frac{1}{2} \frac{g}{C^2} x^2 + \varphi(z)$$

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial z} = -\frac{g}{C^2} z ; \text{ finalement, et puisque en } \mathcal{O} \quad \bar{x} = 0 :$$

$$\bar{x} = x - \frac{1}{2} g t^2 + \frac{1}{2} \frac{g}{C^2} x^2 - \frac{1}{2} \frac{g}{C^2} z^2$$

De la même manière, pour \bar{z} on trouve :

$$\bar{z} = z \left(1 + \frac{g}{C^2} x \right)$$

et pour \bar{t} :

$$\bar{t} = t \left(1 - \frac{g x}{C^2} \right)$$

et on a bien, par exemple :

$$\frac{\partial \bar{t}}{\partial t} = 1 - \frac{g x}{C^2} \quad ; \quad \frac{\partial \bar{t}}{\partial x} = - \frac{g t}{C^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 \bar{t}}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 \bar{t}}{\partial t \partial x} = - \frac{g}{C^2}$$

Interprétons maintenant ces résultats :

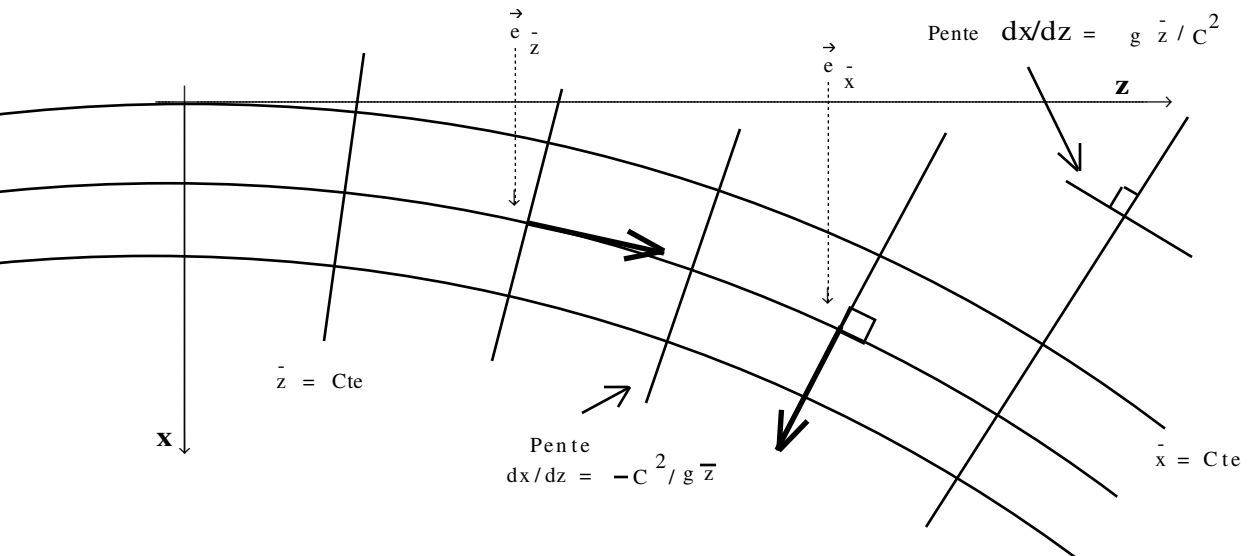
Les lignes coordonnées spatiales sont d'une part $\bar{x} = Cte$, ce qui donne pour $t = 0$ et x faible :

$$x = \bar{x} + \frac{1}{2} \frac{g z^2}{C^2}$$

et d'autre part $\bar{z} = Cte$ soit :

$$z = \bar{z} - \frac{g x \bar{z}}{C^2}$$

Pour les lignes horizontales, on retrouve $x'' = g/C^2$ et un rayon de courbure $R = C^2/g$; pour les lignes verticales, on trouve des droites de pentes proportionnelles à \bar{z} donc à z comme on le voit sur la figure ci-dessous ($dz/dx = - g \bar{z}/C^2$).



L'équation $\bar{z} = z (1 + g x / C^2)$ correspond bien à l'effet de contraction des longueurs lorsqu'on s'enfonce dans le champ de gravité, et l'équation $\bar{t} = t (1 - g x / C^2)$ au ralentissement du temps.

Etudions maintenant \bar{x} :

Pour un point du référentiel galiléen avec par exemple $\bar{x} = \bar{z} = 0$, on trouve $z = 0$ et :

$$x \approx \frac{1}{2} g t^2$$

On retrouve bien le mouvement de chute libre d'un point lié au référentiel galiléen!

Nous avons déjà interprété le terme $- 1/2 g z^2/C^2$.

Enfin, la contraction des longueurs lorsqu'on s'enfonce dans le champ de gravité donne :

$$d\bar{x} = dx \left(1 + \frac{g x}{C^2} \right)$$

et :

$$\bar{x} = \int_0^x \left(1 + \frac{g u}{C^2} \right) du = x + \frac{1}{2} \frac{g x^2}{C^2}$$

pour $t = z = 0$.

Le terme $1/2 g x^2/C^2$ de l'expression de x est ainsi expliqué.

12.7 $F_{\alpha\beta} = A_{\beta;\alpha} - A_{\alpha;\beta}$ est l'égalité covariante qu'il faut écrire.

Or :

$$A_{\beta;\alpha} = \frac{\partial A_{\beta}}{\partial u^{\alpha}} - A_m \Gamma_{\beta\alpha}^m ; \quad A_{\alpha;\beta} = \frac{\partial A_{\alpha}}{\partial u^{\beta}} - A_n \Gamma_{\alpha\beta}^n$$

Dans la différence, les symboles de Christoffel qui sont symétriques disparaissent et :

$$F_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_{\beta}}{\partial u^{\alpha}} - \frac{\partial A_{\alpha}}{\partial u^{\beta}}$$

12.8 1. Tout d'abord, il nous faut préciser comment on obtient les composantes du champ électrique à partir de celles du tenseur électromagnétique.

Le vecteur champ électrique est mesuré par un observateur situé dans un référentiel galiléen local immobile dans le champ de gravité à l'instant considéré. Cet observateur écrit $\mathbf{F} = q \mathbf{E}$ pour une charge immobile. Or :

$$\begin{aligned} \Phi^i &= F^i \text{ ch } \varphi = F^i \\ \Phi^i &= q C F_0^i U^0 = F^i = q E^i \end{aligned}$$

Donc, $E^i = C F_0^i U^0$, et cette relation, vraie dans un système de coordonnées d'espace particulier (le système fixe dans le champ de gravité et coïncidant localement à l'instant considéré avec le système du référentiel galiléen), est vraie dans tout système de coordonnées d'espace, à la condition que les nouvelles coordonnées soient des

fonctions indépendantes du temps de celles utilisées dans l'expression (12,41) du ds^2 .

On pose alors :

$$E'^i = \frac{E^i}{U^0} = C F^i_0$$

et les deux vecteurs E'^i et E^i partout colinéaires ont les mêmes lignes de champ.

$$F^{i0} = g^{00} F^i_0 = \frac{1}{1 + \frac{2\phi}{C^2}} F^i_0 = \frac{E'^i}{C \left(1 + \frac{2\phi}{C^2}\right)}$$

$$F_{i0} = - \left(1 - \frac{2\phi}{C^2}\right) F^i_0 = - \frac{E'^i}{C}$$

En posant :

$$E'_i = \gamma_{ii} E'^i = - \xi_{ii} E^i = \left(1 - \frac{2\phi}{C^2}\right) E^i$$

Compte tenu du résultat de l'exercice 12.7 :

$$F_{\alpha\beta;\gamma} + F_{\beta\gamma;\alpha} + F_{\gamma\alpha;\beta} = 0$$

s'écrit, en exprimant le tenseur électromagnétique en fonction du quadrivecteur potentiel :

$$F_{\alpha\beta,\gamma} + F_{\beta\gamma,\alpha} + F_{\gamma\alpha,\beta} = 0$$

On a donc :

$$F_{0i,j} + F_{ij,0} + F_{j0,i} = 0$$

soit :

$$\frac{\partial F_{0i}}{\partial x^j} - \frac{\partial F_{0j}}{\partial x^i} = 0$$

qui s'écrit :

$$\frac{\partial E'_i}{\partial x^j} - \frac{\partial E'_j}{\partial x^i} = 0 \quad \text{ou} \quad \text{rot}_{ij} \mathbf{E}' = 0$$

Posons :

$$D^i = \frac{\epsilon_0 E'^i}{\sqrt{1 + 2\phi/C^2}} = \epsilon E'^i$$

avec :

$$\epsilon = \frac{\epsilon_0}{\sqrt{1 + 2\phi/C^2}}$$

où ϵ est la permittivité du vide dans lequel règne le champ gravitationnel. Remarquons que $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$, puisque $U^0 = dt/d\tau = 1/\sqrt{1 + 2\phi/C^2}$.

$$F^{\alpha\beta}_{;\beta} = -\mu_0 j^\alpha$$

donne :

$$\frac{\partial F^{0i}}{\partial x^i} + F^{mi} \Gamma_{mi}^0 + F^{0m} \Gamma_{mi}^i = -\mu_0 j^0$$

$$\frac{\partial F^{0i}}{\partial x^i} + F^{0i} \Gamma_{0i}^0 + F^{0j} \Gamma_{ji}^i = -\mu_0 j^0$$

$$\text{et } \Gamma_{0i}^0 = \frac{1}{2} g^{00} g_{00,i} = \frac{1}{C^2} \frac{\partial \phi}{\partial x^i}$$

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{C \varepsilon_0} \frac{D^i}{\sqrt{1 + 2 \phi/C^2}} \right)}{\partial x^i} + \frac{1}{C \varepsilon_0} \frac{D^i}{\sqrt{1 + 2 \phi/C^2}} \frac{1}{C^2} \frac{\partial \phi}{\partial x^i} + \frac{1}{C \varepsilon_0} \frac{D^j}{\sqrt{1 + 2 \phi/C^2}} \Gamma_{ji}^i = \mu_0 j^0$$

Les deux termes en $\frac{\partial \phi}{\partial x^i}$ s'annulent compte tenu du fait qu'ils sont déjà petits et que $\sqrt{1 + 2 \phi/C^2} \approx 1$.

$$\frac{1}{\sqrt{1 + 2 \phi/C^2}} \frac{\partial D^i}{\partial x^i} + \frac{1}{\sqrt{1 + 2 \phi/C^2}} D^j \Gamma_{ji}^i = C \mu_0 \varepsilon_0 j^0 = \frac{j^0}{C}$$

$$\frac{j^0}{C} = \rho U^0 = \rho \frac{dt}{d\tau} = \rho \frac{1}{\sqrt{1 + 2 \phi/C^2}}$$

Donc :

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho$$

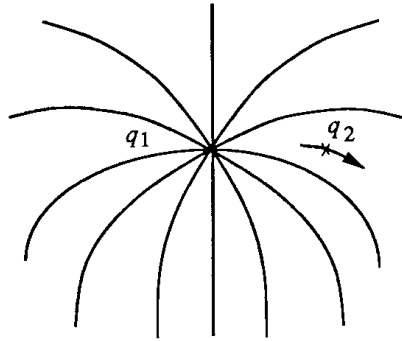
Dans le cas où localement on a un système de coordonnées spatiales à peu près orthonormé! constitué de barres rectilignes rigides, on a $\gamma_{ij} \approx \delta_{ij}$ et $\text{rot}_{ij} \mathbf{E}' \approx \text{rot } \mathbf{E}'$ et on arrive à :

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E}' &= \mathbf{0} & \mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E}' \\ \text{div } \mathbf{D} &= \rho \end{aligned}$$

Les équations de l'électrostatique ont ainsi été mises sous une forme totalement identique à celles que l'on obtient dans un diélectrique. Ainsi, le vide dans lequel règne un champ gravitationnel statique se comporte comme un diélectrique de permittivité $\varepsilon = \varepsilon_0 \sqrt{1 + 2 \phi/C^2}$. Il y aura donc réfraction des lignes du champ électrique.

2. On voit que lorsque l'on s'enfonce dans le champ de gravité, la permittivité ε croît. Les

lignes de champ du champ électrique ont tendance à être canalisées par ce diélectrique situé de manière prépondérante en dessous de la charge. Par conséquent, les lignes de champ "tombent" dans le champ de gravité et ont l'allure suivante :



3. On voit que la ligne de champ partant d'une charge et arrivant là où on mettra l'autre charge, n'est pas horizontale. Il en résulte une composante verticale du champ électrique, donc de la force subie.

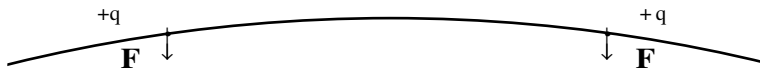
En effet, les forces électrostatiques, action des photons virtuels sur les charges, ont une composante vers le bas due à l'action de la gravité sur ces photons, donc à leur "poids". Le poids total correspond à l'énergie électrostatique d'interaction des deux charges : \mathcal{E} , et vaut $m_e g = g \mathcal{E}/C^2$, en appelant m_e la masse correspondant à cette énergie électrostatique \mathcal{E} par la relation $\mathcal{E} = m_e C^2$.

$$\mathcal{E} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q^2}{d}$$

Il vient :

$$F = \frac{m_e}{2} g = \frac{q^2 g}{8 \pi \epsilon_0 C^2 d} ; \quad E = \frac{q g}{8 \pi \epsilon_0 C^2 d}$$

F est la force verticale subie par une charge, moitié de la force totale qui se répartit également par raison des symétrie. E est donc la composante verticale du champ électrique subie par une charge de la part de l'autre.



4. On pose :

$$d\mathbf{r} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{OA} = d\mathbf{r}_{\parallel} + d\mathbf{r}_{\perp}$$

$$d\mathbf{r}_{\parallel} // \mathbf{r} \quad ; \quad d\mathbf{r}_{\perp} \perp \mathbf{r}$$

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 r_0^3} \mathbf{r}_0 - \frac{q}{2 \pi \epsilon_0 r_0^3} d\mathbf{r}_{\parallel} + \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 r_0^3} d\mathbf{r}_{\perp}$$

$$+ \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 r_0^3} \mathbf{r}_0 \times 3 \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_0}{r_0 C} - \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 r_0^2} \frac{\mathbf{v}}{C}$$

$$+ \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 C^2} \frac{1}{r_0^3} \mathbf{r}_0 \wedge \left(\mathbf{r}_0 \wedge \dot{\mathbf{v}} \right)$$

Nous allons donc calculer chacune de ces 5 corrections au champ classique coulombien \mathbf{E}_C .

$$C = r_0/t ; \quad d = \sqrt{y^2 + z^2} ; \quad Z = 1/2 \quad g \quad t^2 .$$

$$r = \sqrt{(x + Z)^2 + d^2}$$

$$\Delta r = \frac{x \quad g \quad r_0}{2 \quad C^2}$$

En dérivant $r \cos \theta = d$, et compte tenu de $\sin \theta = x/r_0$, on obtient :

$$\Delta \theta = \frac{g \quad d}{2 \quad C^2}$$

Calcul de la première correction \mathbf{E}_1

$$\|\mathbf{E}_1\| = \frac{q}{2 \pi \epsilon_0 r_0^3} \frac{x \quad g \quad r_0}{2 \quad C^2} = \frac{q \quad g \quad x}{4 \pi \epsilon_0 \quad C^2 \quad r_0^2}$$

$$\mathbf{E}_1 = - \frac{g \quad x}{C^2} \mathbf{E}_C$$

Calcul de la deuxième correction \mathbf{E}_2

$$\|d\mathbf{r}_{\perp}\| = r_0 \Delta \theta = r_0 \frac{g \quad d}{2 \quad C^2}$$

$$d\mathbf{r}_{\perp} = \begin{pmatrix} \cos \theta_0 \quad \|d\mathbf{r}_{\perp}\| \\ - \sin \theta_0 \quad \|d\mathbf{r}_{\perp}\| \frac{y}{d} \\ - \sin \theta_0 \quad \|d\mathbf{r}_{\perp}\| \frac{z}{d} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E}_2 = - \frac{1}{2} \frac{g \quad x}{C^2} \mathbf{E}_C + \frac{q \quad g}{8 \pi \epsilon_0 \quad C^2 \quad r_0} \mathbf{x}$$

Calcul du troisième champ électrique

$\mathbf{v} = g \quad t = g \quad r_0/C$; $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_0 = g \quad r_0 \quad x/C$; on trouve :

$$\mathbf{E}_3 = - 3 \mathbf{E}_1$$

Calcul du quatrième champ électrique

On trouve tout de suite :

$$\mathbf{E}_4 = - \frac{q \mathbf{g}}{4 \pi \epsilon_0 C^2 r_0} \mathbf{x}$$

Calcul du cinquième champ électrique

En effectuant avec les composantes les produits vectoriels, on trouve rapidement :

$$\mathbf{E}_5 = 2 \mathbf{E}_2$$

Et finalement :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_C + \frac{q \mathbf{g}}{8 \pi \epsilon_0 C^2 r_0} \mathbf{x} + \frac{\mathbf{g} \cdot \mathbf{x}}{2 C^2} \mathbf{E}_C$$

Pour \mathbf{E}' la correction en $\sqrt{1 + 2 \phi / C^2} = (1 - \mathbf{g} \cdot \mathbf{x} / C^2)$ est du deuxième ordre, appliquée aux corrections à \mathbf{E}_C . Elle est donc appliquée uniquement à \mathbf{E}_C , et on trouve :

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}_C + \frac{q \mathbf{g}}{8 \pi \epsilon_0 C^2 r_0} \mathbf{x} - \frac{\mathbf{g} \cdot \mathbf{x}}{2 C^2} \mathbf{E}_C$$

Enfin, $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$

5. Lorsque les deux charges séparées par la distance d sont sur une même droite perpendiculaire à l'accélération ($x = 0$ et $r_0 = d$), on trouve une force d'inertie supplémentaire :

$$F = q E = \frac{q^2 \mathbf{g}}{8 \pi \epsilon_0 C^2 d}$$

sur chaque particule, correspondant à une masse supplémentaire totale :

$$m_e = \frac{q^2}{4 \pi \epsilon_0 C^2 d} = \frac{\mathcal{E}}{C^2}$$

\mathcal{E} est l'énergie potentielle d'interaction des deux charges. On vérifie bien que l'énergie a une inertie avec $\mathcal{E} = m_e C^2$.

6. Tout d'abord :

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E}' &= \frac{q \mathbf{g}}{8 \pi \epsilon_0 C^2} \left(\mathbf{grad} \frac{1}{r_0} \right) \wedge \mathbf{x} - \frac{\mathbf{g}}{2 C^2} \left(\mathbf{grad} \cdot \mathbf{x} \right) \wedge \mathbf{E}_C \\ &= - \frac{\mathbf{g}}{2 C^2} \mathbf{E}_C \wedge \mathbf{x} - \frac{\mathbf{g}}{2 C^2} \mathbf{x} \wedge \mathbf{E}_C = \mathbf{0} \end{aligned}$$

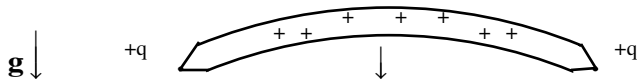
On trouve également tout de suite, avec la formule $\text{div } f \mathbf{v} = f \text{ div } \mathbf{v} + \mathbf{grad} f \cdot \mathbf{v}$ que $\text{div } \mathbf{D} = 0$.

D'autre part, pour $r_0 \rightarrow 0$, donc également $x \rightarrow 0$, $\mathbf{D} \approx \epsilon_0 \mathbf{E}$, et pour une surface fermée très proche de la charge, $\iint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q$. Les équations

de l'électrostatique écrites à la question 1 sont donc bien vérifiées.

Nous faisons ici un petit intermède pour bien faire sentir intuitivement la réalité du poids de l'énergie d'interaction.

L'action des deux charges $+q$ l'une sur l'autre peut être visualisée par une barre comprimée. La barre repousse les deux charges en les poussant également vers le bas. La barre est courbée vers le haut et s'appuie sur les charges en pesant dans le champ de gravité.



La situation d'une charge $+q$ qui attire une charge $-q$ peut être visualisée par une barre tendue et également courbée vers le haut. En effet, la barre ayant une pression négative est repoussée par le champ de gravité. La barre tire les charges vers le haut. Ces barres visualisent la réalité de l'action gravitationnelle sur l'énergie, et qui se répercute sur les charges. Elles concrétisent l'énergie d'interaction.



Les barres peuvent être remplacées par des particules de champ faisant la navette entre les deux charges en ayant une trajectoire voisine de la position de ces barres.

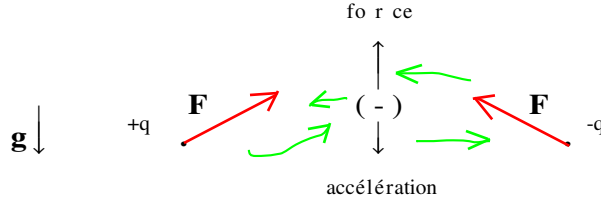
Cela peut sembler contradictoire (cf 7, chapitre 19) d'avoir des particules de masses négatives repoussées vers le haut et qui pourtant tombent en chute libre dans le champ de gravité, comme tout objet, à cause du principe d'équivalence. Comment une particule repoussée vers le haut peut-elle tomber vers le bas?

Lorsque nous disons qu'une masse positive attire une masse négative au 7 du chapitre 19, il faut se méfier du langage. Nous voulons dire qu'elle tend à la rapprocher d'elle, mais cela correspond à une force de répulsion ! C'est à dire à un gain d'impulsion dans la direction opposée (voir figure 19.2). Une attraction géométrique correspond à une force de répulsion.

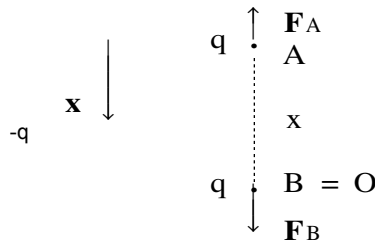
Reprenons ce qui a été dit au 7 du chapitre 19 mais avec les forces et non plus géométriquement : on peut alors dire que deux particules de masses positives s'attirent, une particule de masse positive et une de masse négative se repoussent, et deux particules de

masses négatives s'attirent, ce qui contribue à les éloigner !

On peut donc bien visualiser l'attraction des deux charges avec une particule de charge négative faisant la navette en passant au dessus du fait de sa répulsion par le champ de gravité. Cette particule de masse négative est en chute libre entre les deux charges.



7. Comme nous l'avons dit à la question 1, le champ électrique \mathbf{E} est mesuré localement avec des horloges et des règles étalons locales. Par conséquent, la variation de l'écoulement du temps propre local avec l'altitude va jouer.



Pour le calcul de \mathbf{F}_A , on place l'origine en B et $x < 0$.

Comme nous le voyons sur la figure $\|\mathbf{F}_A\| = -F_A^x$.

$$\|\mathbf{F}_A\| = \frac{q^2}{4 \pi \epsilon_0 x^2} - \frac{q^2 g}{4 \pi \epsilon_0 C^2 |x|}$$

$$\|\mathbf{F}_B\| = \frac{q^2}{4 \pi \epsilon_0 x^2} + \frac{q^2 g}{4 \pi \epsilon_0 C^2 |x|}$$

et :

$$\Delta F = 2 \frac{q^2 g}{4 \pi \epsilon_0 C^2 |x|}$$

La moitié vient du poids de l'énergie électrostatique : $\frac{q^2 g}{4 \pi \epsilon_0 C^2 |x|} = m_e g$ avec $\frac{q^2}{4 \pi \epsilon_0 |x|} = m_e C^2$. L'autre moitié vient de la différence d'écoulement du temps entre A et B (on omet le signe valeur absolue pour x) :

$$\frac{\Delta \tau}{\tau} = \frac{g x}{C^2}$$

d'où une variation du débit de particules virtuelles, donc de la force :

$$\frac{\Delta F}{F} = \frac{\Delta \tau}{\tau} = \frac{g x}{C^2}$$

$$\Delta F = F \frac{g x}{C^2} = \frac{q^2 g}{4 \pi \epsilon_0 C^2 x}$$

Le phénomène qui se passe est exactement le même que celui longuement étudié au 16 du chapitre 8 . Pour visualiser cela, on peut prendre un tube de section s et de hauteur x . $\|\mathbf{F}_A\|/s = p_A$; $\|\mathbf{F}_B\|/s = p_B$ et (formule (8,31)) :

$$\nabla p = \left(\rho + \frac{p}{C^2} \right) g$$

$$\rho = \frac{m_e}{s x} = \frac{q^2}{4 \pi \epsilon_0 x C^2} \frac{1}{s x}$$

$$p = \frac{F}{s} = \frac{1}{s} \frac{q^2}{4 \pi \epsilon_0 x^2}$$

$$\nabla p = \frac{\|\mathbf{F}_B\| - \|\mathbf{F}_A\|}{s x} = \left(\underbrace{\frac{q^2}{4 \pi \epsilon_0 C^2 x^2 s}}_{\rho} + \underbrace{\frac{q^2}{4 \pi \epsilon_0 C^2 x^2 s}}_{p/C^2} \right) g$$

D'où la valeur de $\|\mathbf{F}_B\| - \|\mathbf{F}_A\|$.

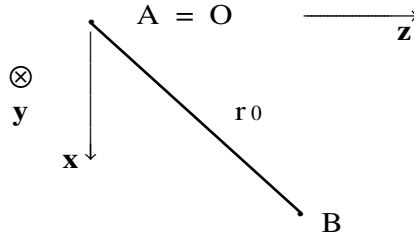
Intuitivement, $\rho = p/C^2$, car globalement, le seul terme de pression est celui correspondant à la direction verticale, et le tenseur d'impulsion-énergie des photons virtuels a la forme :

$$\begin{pmatrix} \rho C^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On sait qu'il est de trace nulle et $\rho C^2 - p = 0$.

8. On a avec des notations évidentes :

$$\mathbf{F}_A \left| \begin{array}{l} - \frac{q^2 x_B}{4 \pi \epsilon_0 r_0^3} + \frac{q^2 g}{8 \pi \epsilon_0 C^2 r_0} + \frac{q^2 g x_B^2}{8 \pi \epsilon_0 C^2 r_0^3} \\ - \frac{q^2 y_B}{4 \pi \epsilon_0 r_0^3} + \frac{q^2 g x_B y_B}{8 \pi \epsilon_0 C^2 r_0^3} \\ - \frac{q^2 z_B}{4 \pi \epsilon_0 r_0^3} + \frac{q^2 g x_B z_B}{8 \pi \epsilon_0 C^2 r_0^3} \end{array} \right.$$



$\mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B = \Delta \mathbf{F}$ est l'écart à la loi de l'action et de la réaction.

$$\Delta \mathbf{F} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{q^2 g}{4 \pi \epsilon_0 C^2 r_0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{Poids de l'énergie}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{q^2 g x_B^2}{4 \pi \epsilon_0 C^2 r_0^3} \\ \frac{q^2 g x_B y_B}{4 \pi \epsilon_0 C^2 r_0^3} \\ \frac{q^2 g x_B z_B}{4 \pi \epsilon_0 C^2 r_0^3} \end{pmatrix}}_{\Delta \tau / \tau}$$

La deuxième force, due à la variation de l'écoulement du temps, vaut au premier ordre :

$$\frac{g x_B}{C^2} \mathbf{F}_B$$

$$\frac{\Delta F \tau}{F_B} = \frac{g x_B}{C^2} = \frac{\Delta \tau}{\tau}$$

Le débit de photons virtuels en B est donc plus grand, d'où une force plus grande dans la direction de AB.

Résumons nous, on peut écrire simplement :

$$\mathbf{E} = E_C + \frac{1}{2} \frac{1}{q} m_e \mathbf{g} - \frac{1}{2} \frac{\Delta \tau}{\tau} E_C$$

Chapitre 13

13.1 1. Avec des notations évidentes :

$$F = - \frac{G m M}{x^2} = m x''$$

et
$$M = \frac{4}{3} \pi x^3 \rho$$

Il vient :

$$x'' + \frac{4}{3} \pi G \rho x = 0$$

Or, l'équation de déviation des géodésiques donne :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = R^x_{0x0} x C^2$$

$x = \delta x$ mesure la séparation entre le point M et un point matériel immobile en équilibre en O. et il vient :

$$R^x_{0x0} = - \frac{4}{3} \pi \frac{G \rho}{C^2}$$

2. Avec $R^0_{000} = 0$, on obtient :

$$R_{00} = R^{\alpha}_{0\alpha 0} = - 4 \pi \frac{G \rho}{C^2}$$

et $R = - 2 R^{00}$.

$$R^{00} - \frac{1}{2} g^{00} R = 2 R^{00} = - \frac{8 \pi G \rho}{C^2} = - \frac{8 \pi G}{C^4} T^{00}$$

puisque $T^{00} = \rho C^2$.

Chapitre 14

14.1 Dans le cas de la sphère creuse, on avait :

$$\xi_{t\theta,r} = \frac{8}{3} \frac{G M}{R C^2} \Omega r$$

et
$$\omega_i = \frac{4}{3} \frac{G M}{R C^2} \Omega \quad ; \text{ donc :}$$

$$\omega_i = \frac{1}{2} \frac{\xi_{t\theta,r}}{r}$$

$$\text{Ici,} \quad \xi_{t\theta,r} = - \frac{2 \mathbf{J} \mathbf{G}}{C^2 r^2}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\omega}_i = - \frac{\mathbf{J} \mathbf{G}}{C^2 r^3}$$

14.2 En magnétostatique, la loi de force s'écrit :

$$\mathbf{F}^i = q \left(\frac{\partial A^j}{\partial x^i} - \frac{\partial A^i}{\partial x^j} \right) v^j$$

La gravitomagnétostatique est la correction à la gravitation newtonienne, proportionnelle à la vitesse de l'objet étudié, lorsque toutes les vitesses (objet créant le champ et objet le subissant) sont faibles devant celle de la lumière.

On a $\mathbf{T}^{0i} = \rho_M C v^i$, les composantes faisant intervenir l'indice i se transformant comme celles d'un vecteur. On peut donc définir le vecteur : $\mathbf{T}^0 = \rho_M C \mathbf{v}$. D'autre part, l'équation (14,9) donne, dans le cas statique :

$$\nabla^2 \bar{h}^{0i} = \frac{16 \pi G}{C^4} T^{0i}$$

$$\text{et} \quad h^{0i} = \bar{h}^{0i} - \frac{1}{2} \eta^{0i} \bar{h}$$

On a donc $h^{0i} = \bar{h}^{0i}$ et :

$$\nabla^2 h^{0i} = \frac{16 \pi G}{C^4} T^{0i}$$

En définissant le vecteur $\mathbf{h}^0 = (h^{0i})$, on a donc :

$$\nabla^2 \mathbf{h}^0 = \frac{16 \pi G}{C^4} \mathbf{T}^0$$

Ecrivons maintenant la loi de force en Relativité générale.

Nous paramétrons les géodésiques par le temps t du référentiel fixe.

$$\mathbf{F}^i = m \frac{d^2 x^i}{dt^2} = - m \Gamma_{kl}^i \frac{dx^k}{dt} \frac{dx^l}{dt} - 2 m \Gamma_{0j}^i C \frac{dx^j}{dt} - m \Gamma_{00}^i C^2$$

Le premier terme est négligeable, le dernier ne fait pas intervenir la vitesse. Le terme magnétique est donc celui du milieu, or :

$$\Gamma_{0j}^i = \frac{1}{2} \eta^{i\lambda} \left(h_{0\lambda,j} + h_{j\lambda,0} - h_{0j,\lambda} \right)$$

Dans le cas stationnaire (magnétostatique),
 $h_{j\lambda,0} = 0$ et il vient :

$$\Gamma_{0j}^i = \frac{1}{2} \eta^{ii} \left(h_{0i,j} - h_{0j,i} \right)$$

$$\eta^{ii} = -1 \quad \text{et} \quad h^{0i} = -h_{0i}.$$

Finalement :

$$F^i = m C \left(\frac{\partial h^{0j}}{\partial x^i} - \frac{\partial h^{0i}}{\partial x^j} \right) \frac{dx^j}{dt}$$

Cette formule, analogue de la loi de force en magnétostatique, justifie les équations de la gravitomagnétostatique écrites dans l'énoncé de l'exercice.

14.3

1. Considérons une charge q de masse m animée d'un mouvement circulaire uniforme autour du point O . Le moment cinétique vaut $\vec{J} = \vec{OM} \wedge m \vec{v}$; $J = \|\vec{J}\| = m v r$. Cette charge tournante est, vue de loin, équivalente à une spire parcourue par un courant I .

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{q}{T} = \frac{q}{\frac{2\pi r}{v}} = \frac{q v}{2\pi r}$$

et le moment magnétique vaut :

$$\mathcal{M} = I S = \frac{q v}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{q v r}{2}$$

Le rapport gyromagnétique γ_g est tel que :

$$\mathcal{M} = \gamma_g J \quad ; \quad \gamma_g = \frac{\mathcal{M}}{J} = \frac{\frac{q v r}{2}}{m v r} = \frac{q}{2 m}$$

Ce rapport entre le moment magnétique et le moment cinétique est le même, par sommation, pour tout ensemble de charges en mouvement.

2. Il nous faut calculer le champ gravitomagnétique \mathbf{B}_G créé à la distance r par une boule tournante de moment cinétique J .

On sait que le champ magnétique créé par une boule chargée d'une manière uniforme et tournante, à l'extérieur de celle-ci, est celui d'un dipôle magnétique.

On sait d'autre part que le champ magnétique d'un dipôle magnétique est, dans le plan perpendiculaire à l'axe du dipôle et passant par ce dipôle :

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M}}{r^3}$$

Cela donne, pour une boule tournante, chargée avec la densité volumique ρ :

$$\mathbf{B} = - \frac{\mu_0}{4 \pi} \gamma_g \frac{\mathbf{J}}{r^3} = - \frac{\mu_0}{4 \pi} \frac{q}{2 m} \frac{\mathbf{J}}{r^3}$$

Nous faisons ensuite la substitution :

$$\rho \rightarrow \rho_M C \quad ; \quad \mu_0 \rightarrow - \frac{16 \pi G}{C^4}$$

Il vient :

$$\mathbf{B}_G = \frac{2 G \mathbf{J}}{C^3 r^3}$$

On a ensuite $\mathbf{F} = m C \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}_G$, soit :

$$m r \theta'' = - m C r' \frac{2 G \mathbf{J}}{C^3 r^3}$$

$$\theta'' = - \frac{2 G \mathbf{J}}{C^2 r^4} r'$$

14.4 La différence des temps vient de la force gravitomagnétique tantôt attractive, tantôt répulsive, ce qui modifie la force centrifuge nécessaire pour sustenter le satellite.

Les vitesses sont v_+ , v_- , et v lorsque il n'y a pas d'effet magnétique. Les temps sont t_+ , t_- et t .

La différence des chemins parcourus pendant la période d'un tour, l , vaut : $l = \Delta v t$ avec $\Delta v = v - v_+$; $v_+ < v$; et $l = (t_+ - t) v$; $t_+ > t$.

$$t_+ - t = \frac{\Delta v}{v} t$$

$$F + m \frac{(v - \Delta v)^2}{r} = - F + m \frac{(v + \Delta v)^2}{r}$$

$$2 F = 4 m \frac{v \Delta v}{r} = 2 m C v B_G$$

ce qui donne $\Delta v = G J / C^2 r^2$.

$$t_+ - t = \frac{G J}{C^2 r^2} \frac{t}{v} \quad ; \quad t_+ - t = 2 \frac{G J}{C^2 r^2} \frac{t}{v}$$

$$t = 2 \pi \sqrt{r^3 / G M} \quad ; \quad v = 2 \pi r / t$$

Il vient alors :

$$t_+ - t = \frac{4 \pi J}{C^2 M}$$

14.5 Le champ gravitomagnétique à l'intérieur de la sphère creuse vaut :

$$\mathbf{B}_G = \frac{2}{3} \left(- \frac{16 \pi G}{C^4} \right) (\sigma_M C) R \vec{\Omega}$$

or $4 \pi R^2 \sigma_M = M$; il vient :

$$\mathbf{B}_G = - \frac{8}{3} \frac{G M}{C^3 R} \vec{\Omega}$$

La force subie par une particule de masse m et de vitesse \mathbf{v} vaut :

$$\mathbf{F} = m C \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}_G = m \mathbf{v} \wedge C \mathbf{B}_G$$

A l'intérieur d'un référentiel tournant à la vitesse angulaire $\vec{\omega}$, un corps de masse m est soumis à la force de Coriolis :

$$\mathbf{F}_c = - 2 m \vec{\omega} \wedge \mathbf{v} = m \mathbf{v} \wedge 2 \vec{\omega}$$

et un pendule de Foucault précesse à la vitesse angulaire $\vec{\omega}_i = - \vec{\omega}$. Identifiant \mathbf{F} et \mathbf{F}_c , le pendule précesse à la vitesse angulaire :

$$\vec{\omega}_i = - \frac{C \mathbf{B}_G}{2} = - \frac{C}{2} \left(- \frac{8}{3} \frac{G M}{C^3 R} \right) \vec{\Omega}$$

$$\vec{\omega}_i = \frac{4}{3} \frac{G M}{C^2 R} \vec{\Omega}$$

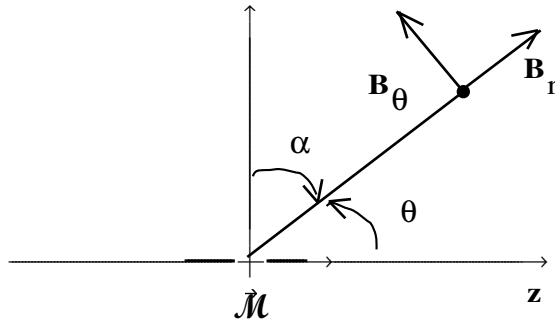
ce qui est la formule (14,38).

14.6

1. Pour un dipôle magnétique de moment magnétique \mathcal{M} , on a :

$$B_r = \frac{\mu_0}{4 \pi} \frac{2 \mathcal{M} \cos \theta}{r^3} \quad \text{et} \quad B_\theta = \frac{\mu_0}{4 \pi} \frac{\mathcal{M} \sin \theta}{r^3}$$

La rotation de l'axe du gyroscope se fera autour de \mathbf{J} moment cinétique de la Terre, donc également autour de la composante \mathbf{B}_{G_z} du champ gravitomagnétique, l'axe des \mathbf{z} étant pris parallèlement à \mathbf{J} .



On obtient donc $B_z = B_r \cos \theta + B_\theta \cos(\theta + \pi/2)$

$$B_z = \frac{\mu_0}{4 \pi} \frac{2 \mathcal{M} \cos^2 \theta}{r^3} - \frac{\mu_0}{4 \pi} \frac{\mathcal{M} \sin^2 \theta}{r^3}$$

En faisant la substitution $\mu_0 \rightarrow -16 \pi G/C^4$;
 $\rho \rightarrow \rho_M C$ et en tenant compte du rapport
gyromagnétique (voir exercice 14.3), on obtient :

$$\mathbf{B}_{G_z} = \frac{2 G J}{C^3 r^3} \left[\sin^2 \theta - 2 \cos^2 \theta \right]$$

et, d'après l'exercice 14.5 $\vec{\omega}_i = -C \mathbf{B}_{G/2}$, soit :

$$\omega_i = \frac{G J}{C^2 r^3} \left(2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \right)$$

avec $\alpha = \pi/2 - \theta$, angle avec le plan équatorial :

$$\omega_i = \omega_z = \frac{G J}{C^2 r^3} \left(2 \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha \right)$$

$$\omega_z = \frac{G J}{C^2 r^3} \left(3 \sin^2 \alpha - 1 \right)$$

Il nous faut ensuite prendre la valeur moyenne de ω_z sur un tour, l'axe du gyroscope tournant toujours exactement à la vitesse angulaire ω_z du point où il est, donc à des valeurs différentes suivant la position par rapport à l'équateur; L'angle final dont aura tourné le gyroscope étant d'autre part l'intégrale de ω_z .

$$\langle \omega_z \rangle = \frac{1}{2} \frac{G J}{C^2 r^3}$$

avec : $J = \frac{2}{5} M R^2 \Omega$

On a : $r = R = 6400 \cdot 10^3$ S.I. ;
 $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ S.I. ; $M = 6 \cdot 10^{24}$ S.I. ;
 $C = 3 \cdot 10^8$ S.I. ; $T = 2 \pi / \Omega = 24$ h . On obtient :

$$\langle \omega_z \rangle = 10^{-14} \text{ S.I.} = 0.065 \text{ ''/an}$$

Un projet est à l'étude (Université de Stanford, réalisation finale vers 1996) pour l'envoi de gyroscopes utilisant la technologie des supraconducteurs dans un satellite en orbite polaire basse (Satellite *Gravity Probe B*). La précision prévue de l'expérience est de 0.5 milliseconde d'arc par an.

2. Au dessus du pôle, on a $\alpha = \pi/2$ et :

$$\vec{\omega}_z = \frac{2 G J}{C^2 r^3}$$

dans le même sens que la rotation de la Terre.

Au dessus de l'équateur, on a $\alpha = 0$ et :

$$\vec{\omega}_Z = - \frac{G J}{C^2 r^3}$$

dans le sens opposé de la rotation de la Terre.

Ceci est bien en accord avec les explications intuitives, faisant appel par exemple au mouvement d'un fluide visqueux, données au paragraphe 13 .

Chapitre 16

16.1 1. $r_s = 2 G M/C^2 = 2.95 \cdot 10^{12} \text{ m}$

2. Le temps mis par la lumière pour traverser le quasar est de l'ordre de $t = r_s/C$ soit $t = 2.7$ heures lumières .

Cela permet à des fluctuations globales d'intensité du quasar (donc d'amplitude du même ordre de grandeur que le rayonnement total du quasar) d'avoir lieu dans une telle échelle de temps. Les différents points du quasar peuvent en effet interagir dans cette échelle de temps

16.2 1. On trouve $r_s = 8.89 \text{ mm}$.

2.

$$\Delta l = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - r_s/r}} - 1 \right) l$$

avec $l = 40000 \text{ km}$ et $r = 6400 \text{ km}$, on trouve $\Delta l = 2.8 \text{ cm}$.

16.3 1.

$$v_1 = \frac{dl}{dt_1} ; \text{ avec } dl = \sqrt{B} dr \text{ et } dt_1 = \sqrt{A} dt$$

d'après le paragraphe 21 .

$$v_1 = \sqrt{\frac{B}{A}} \frac{dr}{dt} = \frac{1}{1 - r_s/r} (1 - r_s/r) C \sqrt{r_s/r}$$

d'après la formule (16,30).

$$v_1 = C \sqrt{\frac{r_s}{r}}$$

2. Lorsque $r \rightarrow r_s$, $v_1 \rightarrow C$. Ainsi, on retrouve le fait que l'horizon de Schwarzschild correspond à un endroit où la vitesse de libération (mesurée localement ici) est égale à C ! Cela donne donc une assise rigoureuse au raisonnement de

l'exercice 7.1 ; d'autant plus que la formule (16,28) est la même que celle trouvée classiquement à l'exercice 7.2 .

En conclusion, la Relativité générale donne une loi de chute, examinée toujours localement, complètement identique à la loi newtonienne, et l'horizon de Schwarzschild correspond bien à l'endroit où la vitesse de libération est égale à la vitesse de la lumière.

En $r = r_s$, on a $v_1 = C$ pour une particule matérielle, en contradiction avec la Relativité restreinte. Cela implique qu'à partir de cette endroit, l'existence d'un référentiel immobile par rapport à l'extérieur du trou noir est impossible, puisque par rapport à un tel référentiel, on aurait une vitesse supérieure ou égale à C . A l'intérieur de l'horizon de Schwarzschild, il y a un entraînement forcé vers le centre du trou noir de tous les référentiels, d'où l'effondrement irréversible de tout ce qui est à l'intérieur de l'horizon vers le centre du trou noir. La loi de chute (16,28) est encore valable à l'intérieur du trou noir, et :

$$\Delta\tau = \frac{2}{3 C \sqrt{r_s}} R^{3/2}$$

est le temps propre de chute du mobile étudié, depuis la valeur $r = R$ jusqu'au centre du trou noir.

16.4 1.

$$C^2 d\tau^2 = A C^2 dt^2 - B dr^2 \quad \text{donne pour } dr = 0$$

$$d\tau = dt = \sqrt{A} dt$$

et :

$$d\tau = \sqrt{A} dt \sqrt{1 - \frac{B dr^2}{C^2 A dt^2}}$$

La valeur de v_1 donnée à l'exercice 16.3 permet d'écrire :

$$d\tau = dt \sqrt{1 - v_1^2/C^2}$$

ce qui est la formule (3,6) qui s'applique effectivement dans un référentiel galiléen local.

2. (16,30) donne :

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{A/B} \sqrt{r_s/r} C \quad \text{puis :}$$

$$\begin{aligned} d\tau &= \sqrt{A} dt \sqrt{1 - \frac{B}{C^2 A} \frac{A}{B} C^2 \frac{r_s}{r}} \\ &= \sqrt{A} dt \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} = A dt \end{aligned}$$

16.5 L'effet Doppler donne :

$$v_l = v \frac{\sqrt{1 - v_l^2/C^2}}{1 + v_l/C}$$

d'autre part $dt_l = \sqrt{A} dt$ donne $v_l = v_\infty \sqrt{A}$
et :

$$\begin{aligned} v_l &= C \sqrt{\frac{r_s}{r}} \\ \frac{v_\infty}{v} &= \sqrt{A} \frac{\sqrt{1 - v_l^2/C^2}}{1 + v_l/C} \\ &= \sqrt{1 - r_s/r} \frac{\sqrt{1 - r_s/r}}{1 + \sqrt{r_s/r}} = \frac{1 - r_s/r}{1 + \sqrt{r_s/r}} = \frac{d\tau}{dt_\infty} \end{aligned}$$

$d\tau$ est l'intervalle de temps propre entre l'émission de deux crêtes d'ondes. dt_∞ est l'intervalle de temps observé à l'infini lors de la réception de ces deux mêmes crêtes d'ondes.

$$\begin{aligned} z &= \frac{\lambda_\infty}{\lambda} - 1 = \frac{v}{v_\infty} - 1 = \frac{1 + \sqrt{r_s/r} - 1 + r_s/r}{1 - r_s/r} \\ z &= \frac{r_s + \sqrt{r r_s}}{r - r_s} \end{aligned}$$

Lorsque $r \rightarrow r_s$, on retrouve (16,29) :

$$z \approx \frac{2 r_s}{r - r_s}$$

16.6 1.

$$\begin{aligned} 0 &= ds^2 = A C^2 dt^2 - B dr^2 \\ C dt &= \sqrt{B/A} dr \end{aligned}$$

2.

$$\int_t^{t^\infty} C dt = \int_r^{r^\infty} \sqrt{B/A} dr$$

$$\int_{t + \delta t}^{t^\infty + \delta t^\infty} C dt = \int_{r + \delta r}^{r^\infty} \sqrt{B/A} dr$$

3. La deuxième équation s'écrit, compte tenu de la première :

$$\int_{t + \delta t}^t C dt + \int_r^{r^\infty} \sqrt{B/A} dr + \int_{t^\infty}^{t^\infty + \delta t^\infty} C dt = \int_{r + \delta r}^{r^\infty} \sqrt{B/A} dr$$

$$- C \delta t + C \delta t^\infty = -\sqrt{B/A} \delta r$$

$$\delta t = \delta \tau / A$$

$$- C \frac{\delta \tau}{A} + C \delta t^\infty = -\sqrt{B/A} \delta r$$

$$- \frac{1}{A} + \frac{\delta t^\infty}{\delta \tau} = -\sqrt{\frac{B}{A}} \frac{1}{C} \frac{\delta r}{\delta \tau} = \frac{1}{A} \sqrt{\frac{r_s}{r}}$$

$$\frac{\delta t^\infty}{\delta \tau} = \frac{1}{A} \left(1 + \sqrt{\frac{r_s}{r}} \right)$$

$$\frac{\delta t^\infty}{\delta \tau} = \frac{1 + \sqrt{\frac{r_s}{r}}}{1 - \frac{r_s}{r}}$$

formule trouvée dans l'exercice 16.5 .

4. On en déduit, comme dans l'exercice 16.5 :

$$z = \frac{r_s + \sqrt{r r_s}}{r - r_s}$$

16.7

1.

$$t^\infty = t + \int_{r(t)}^{r^\infty} \frac{dt}{dr} dr$$

Pour un signal lumineux :

$$A C^2 dt^2 = B dr^2$$

$$t^\infty = t + \int_{r(t)}^{r^\infty} \frac{1}{C} \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} dr$$

2. $r \rightarrow r_s$; (16,31) donne $t \rightarrow +\infty$ et on voit que si $r = r_s$, l'intégrale diverge logarithmiquement.

La première divergence correspond au fait que l'objet n'atteint jamais la surface de Schwarzschild; il lui faudrait un temps infini.

La deuxième divergence montre que lorsque l'objet s'approche de la surface de Schwarzschild, le temps mit par les signaux lumineux qu'il envoie pour arriver au poste d'observation éloigné devient également infini.

Ces deux effets s'ajoutent pour empêcher de voir l'objet atteindre la surface de Schwarzschild.

$$3. z = dt^\infty/d\tau - 1 .$$

$$\frac{dt^\infty}{dt} = 1 - \frac{1}{C} \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r(t)}} \frac{dr(t)}{dt}$$

$$\frac{dt^\infty}{dt} = 1 + \frac{1}{C} \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) \sqrt{\frac{r_s}{r}} C$$

$$= 1 + \sqrt{\frac{r_s}{r}}$$

$$\frac{dt^\infty}{d\tau} = \frac{dt^\infty}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{1 + \sqrt{r_s/r}}{1 - r_s/r}$$

d'où l'on déduit z comme dans les exercices précédents.

4.

$$- \frac{C t}{r_s} = \text{Log}(r - r_s) + \text{Cte}$$

$$\int_{r(t)}^{r^\infty} \frac{1}{C} \frac{dr}{1 - r_s/r} = \int_{r(t)}^{r^\infty} \frac{1}{C} \frac{r dr}{r - r_s}$$

$$\frac{1}{C} \int_{r(t)}^{r^\infty} \frac{r_s dr}{r - r_s} = - \frac{1}{C} r_s \text{Log}(r - r_s) + \text{Cte}$$

$$t_{\infty} \approx t - \frac{1}{C} r_s \text{Log}(r - r_s) + \text{Cte}$$

$$t_{\infty} = -\frac{r_s}{C} \text{Log}(r - r_s) - \frac{r_s}{C} \text{Log}(r - r_s) + \text{Cte}$$

$$t_{\infty} = -\frac{2 r_s}{C} \text{Log}(r - r_s) + \text{Cte}$$

$$\frac{dt_{\infty}}{d\tau} = -\frac{2 r_s}{C(r - r_s)} \frac{dr}{d\tau} = \frac{2 r_s}{C(r - r_s)} C \sqrt{r_s/r}$$

$$\frac{dt_{\infty}}{d\tau} \approx \frac{2 r_s}{r - r_s} \quad \text{et} \quad z = \frac{dt_{\infty}}{d\tau} - 1 \approx \frac{2 r_s}{r - r_s}$$

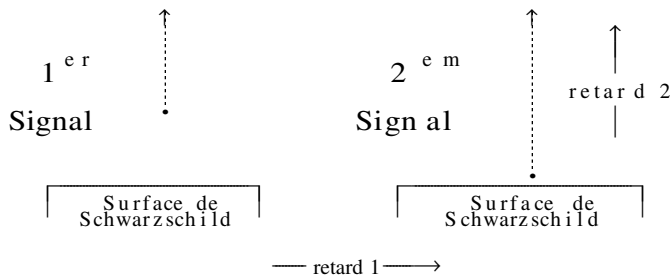
$$z = \text{Cte} \times e^{\frac{C t_{\infty}}{2 r_s}}$$

Telle est la forme de z en fonction du temps de réception t_{∞} , seule formule vérifiable expérimentalement.

On voit que la formule fait intervenir un facteur 2 par rapport à la formule trouvée au paragraphe 17 donnant z en fonction du temps universel d'émission t .

Cette différence provient du fait que, au fur et à mesure que le temps s'écoule et que l'objet s'enfonce vers la surface de Schwarzschild, le retard d'arrivée de la lumière augmente. La formule donnant t_{∞} contient deux termes égaux : le retard et t , le retard augmentant exactement comme t .

Cela signifie que le signal qui arrive 1 seconde après le premier au poste d'observation, a été émis par le mobile 1/2 seconde seulement après le premier en temps universel, et possède un décalage vers le rouge moins fort que celui du rayonnement émis 1 seconde plus tard en temps universel.



La formule trouvée nous montre cependant que le décalage vers le rouge du signal reçu croît exponentiellement en fonction du temps de réception, et l'objet disparaît donc brutalement à la vue.

$$\frac{1}{C} \int_r^{r\infty} \frac{dr}{1 - r_s/r} \quad ; \quad u = r_s/r \quad ; \quad r = r_s/u$$

$$dr = - \frac{r_s}{u^2} du$$

$$\frac{1}{C} \int_{r_s/r}^{r_s/r\infty} - \frac{r_s du}{u^2 (1 - u)} = - \frac{r_s}{C} \int_{r_s/r}^{r_s/r\infty} \frac{du}{u^2 (1 - u)}$$

$$\frac{1}{u^2 (1 - u)} = \frac{1}{1 - u} + \frac{1}{u^2} + \frac{1}{u}$$

$$= - \frac{r_s}{C} \left[- \text{Log}(1 - u) - \frac{1}{u} + \text{Log } u \right]_{r_s/r}^{r_s/r\infty}$$

$$= - \frac{r_s}{C} \left[\text{Log} \frac{1 - r_s/r}{1 - r_s/r\infty} - \frac{r\infty}{r_s} + \frac{r}{r_s} + \text{Log} \frac{r}{r\infty} \right]$$

soit, en posant $x = r/r_s$ et $x\infty = r\infty/r_s$:

$$t\infty - t = - \frac{r_s}{C} \left[\text{Log} \frac{1 - 1/x}{1 - 1/x\infty} - x\infty + x + \text{Log} \frac{x}{x\infty} \right]$$

Changeons l'origine des temps en ce qui concerne la mesure du temps $t\infty$; on prend alors :

$$t\infty - t = - \frac{r_s}{C} \left[\text{Log} \left(1 - 1/x \right) + x + \text{Log } x \right]$$

et :

$$z = \frac{1 + \sqrt{x}}{x - 1}$$

16.9

1. On obtient : $\sqrt{a/r} = u$; $a/r = u^2$;
 $r = a/u^2$; $dr = - 2 a/u^3 du$

$$\int \frac{- \frac{2 a}{u^3} du}{u (1 - u^2)} = - 2 a \int \frac{du}{u^4 (1 - u^2)}$$

$$\frac{1}{u^4 (1 - u^2)} = \frac{1}{u^4} + \frac{1}{u^2} + \frac{1}{2(u+1)} - \frac{1}{2(u-1)}$$

$$\int \frac{du}{u^4(1-u^2)} = -\frac{1}{3u^3} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2} \text{Log} \frac{u+1}{u-1}$$

$$\int \frac{dr}{\sqrt{\frac{a}{r}} \left(1 - \frac{a}{r}\right)} =$$

$$-2a \left[-\frac{1}{3} \left(\frac{r}{a}\right)^{3/2} - \sqrt{\frac{r}{a}} + \frac{1}{2} \text{Log} \frac{\sqrt{r} + \sqrt{a}}{\sqrt{r} - \sqrt{a}} \right]$$

2.

$$dt = -\frac{1}{C} \frac{dr}{\sqrt{r_s/r} \left(1 - r_s/r\right)} \quad \Delta t = t - t_0$$

$$-C \left(t - t_0\right) =$$

$$\frac{2}{3\sqrt{r_s}} \left[r^{3/2} - r_0^{3/2} + 3r_s\sqrt{r} - 3r_s\sqrt{r_0} \right]$$

$$-r_s \text{Log} \frac{\left(\sqrt{r} + \sqrt{r_s}\right) \left(\sqrt{r_0} - \sqrt{r_s}\right)}{\left(\sqrt{r_0} + \sqrt{r_s}\right) \left(\sqrt{r} - \sqrt{r_s}\right)}$$

3. Il suffit de faire simplement $r_s \rightarrow 0$; il reste :

$$C(t_0 - t) = \frac{2}{3\sqrt{r_s}} \left(r^{3/2} - r_0^{3/2} \right)$$

$$t - t_0 = \frac{2}{3C\sqrt{r_s}} \left(r_0^{3/2} - r^{3/2} \right)$$

$$r_0 > r \quad \text{et} \quad t > t_0$$

analogue de (16,28). Dans cette dernière formule, on avait pris $r = r_s$, mais la formule s'applique pour toute valeur de r . La justification est que lorsque $r_s \rightarrow 0 \Leftrightarrow r/r_s \rightarrow +\infty$, $t \approx \tau$.

4. $r \approx r_s$, il vient :

$$- C (t - t_0) = Cte + r_s \text{Log} \left(\sqrt{r} - \sqrt{r_s} \right)$$

$$\sqrt{r} - \sqrt{r_s} = Cte e^{-\frac{C (t - t_0)}{r_s}}$$

$$\left(\sqrt{r} - \sqrt{r_s} \right) \left(\sqrt{r} + \sqrt{r_s} \right) = r - r_s \approx \left(\sqrt{r} - \sqrt{r_s} \right) 2 \sqrt{r_s}$$

$$r - r_s = Cte e^{-\frac{C t}{r_s}}$$

5. En choisissant convenablement l'origine des temps pour t , on peut prendre :

$$t = 2,46 \cdot 10^{-5} \left[\text{Log} \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{2}{3} x^{3/2} - 2 \sqrt{x} \right]$$

De même pour $t_\infty - t$:

$$t_\infty - t = - 2,46 \cdot 10^{-5} \left[\text{Log} \left(1 - \frac{1}{x} \right) + x + \text{Log} x \right]$$

et $t_\infty = (t_\infty - t) + t$ avec une origine des temps judicieusement choisie.

D'autre part :

$$z = \frac{1 + \sqrt{x}}{x - 1}$$

On obtient alors le tableau suivant :

z	10^{-5}	$3.16 \cdot 10^{-5}$	10^{-4}	$3.16 \cdot 10^{-4}$	10^{-3}
x	10^{10}	10^9	10^8	10^7	10^6
$t_{\text{en } s}$	$- 1.6 \cdot 10^{10}$	$- 5.2 \cdot 10^8$	$- 1.6 \cdot 10^7$	$- 5.2 \cdot 10^5$	$- 16400$
$t_\infty - t_{\text{en } s}$	$- 2.46 \cdot 10^5$	$- 2.46 \cdot 10^4$	$- 2.46 \cdot 10^3$	$- 246$	$- 24.6$
$t_{\text{en } s}^\infty$	$- 1.6 \cdot 10^{10}$	$- 5.2 \cdot 10^8$	$- 1.6 \cdot 10^7$	$- 5.2 \cdot 10^5$	$- 16424$
	$- 519 \text{ ans}$	$- 16 \text{ ans}$	$- 6 \text{ mois}$	$- 6 \text{ jours}$	$- 4.6 \text{ heures}$

z	$3.17 \cdot 10^{-3}$	10^{-2}	$3.26 \cdot 10^{-2}$	0.11	0.43
x	10^5	10^4	1001	101	11
$t_{en\ s}$	- 519	- 16	- 0.521	- 0.0171	- $7.46 \cdot 10^{-4}$
$t_{en\ s}^\infty - t_{en\ s}$	- 2.46	- 0.246	- 0.0248	- 0.00259	- $3.27 \cdot 10^{-4}$
$t_{en\ s}^\infty$	- 521	- 16.6	- 0.54	- 0.02	- 0.0011
	- 8.7 mn				

z	2.41	20.48	200	2000	20000
x	2	1.1	1.01	1.001	1.0001
$t_{en\ s}$	- $7,26 \cdot 10^{-5}$	$2.14 \cdot 10^{-5}$	$0.81 \cdot 10^{-4}$	$1.38 \cdot 10^{-4}$	$1.95 \cdot 10^{-4}$
$t_{en\ s}^\infty - t_{en\ s}$	- $4.9 \cdot 10^{-5}$	$2.96 \cdot 10^{-5}$	$0.88 \cdot 10^{-4}$	$1.45 \cdot 10^{-4}$	$2.02 \cdot 10^{-4}$
$t_{en\ s}^\infty$	- $1.21 \cdot 10^{-4}$	$5.1 \cdot 10^{-5}$	$1.70 \cdot 10^{-4}$	$2.84 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-4}$

z	200000	2000 000	$2 \cdot 10^7$	$2 \cdot 10^8$	$2 \cdot 10^9$
x	1.00001	1.000001	1.0000001	$1 + 10^{-8}$	$1 + 10^{-9}$
$t_{en\ s}$	$2.51 \cdot 10^{-4}$	$3.08 \cdot 10^{-4}$	$3.65 \cdot 10^{-4}$	$4.2110 \cdot 10^{-4}$	$4.79 \cdot 10^{-4}$
$t_{en\ s}^\infty - t_{en\ s}$	$2.59 \cdot 10^{-4}$	$3.15 \cdot 10^{-4}$	$3.72 \cdot 10^{-4}$	$4.28 \cdot 10^{-4}$	$4.85 \cdot 10^{-4}$
$t_{en\ s}^\infty$	$5.1 \cdot 10^{-4}$	$6.24 \cdot 10^{-4}$	$7.37 \cdot 10^{-4}$	$0.85 \cdot 10^{-3}$	$0.96 \cdot 10^{-3}$

0.1136 10^{-3} 0.1133 10^{-3} 0.1131 10^{-3} 0.113 10^{-3}

0.057 10^{-3}

L'objet devient brutalement invisible en 1/10000 de seconde lorsque son décalage vers le rouge passe de 2.41 à 20.48 .

D'autre part, on voit que vers la fin du tableau, t_{∞} augmente d'environ 0.113 millième de seconde pour chaque multiplication par 10 de z. Or :

$$z = \text{Cte } e^{+\frac{t_{\infty}}{2 r_s / C}} = \text{Cte } e^{+ t_{\infty} / 4.9 \cdot 10^{-5}}$$

donc :

$$10 = e^{+\Delta t_{\infty}/4.9 \cdot 10^{-5}} \quad \text{soit } \Delta t_{\infty} = 4.9 \cdot 10^{-5} \text{ Log } 10$$

$$\Delta t_{\infty} = 0.113 \cdot 10^{-3} .$$

De plus, on voit que cet intervalle de temps vient pour moitié de $\Delta t = 0.0565 \cdot 10^{-3}$ et $\Delta(t_{\infty}-t) = 0.0565 \cdot 10^{-3}$.

6. $8 \text{ mn} = 480 \text{ s}$. Les effets de ralentissement du temps et de contraction des longueurs étant négligeables dès que l'on est un peu éloigné de la surface de Schwarzschild, on a donc : $r/C \approx 480$ tandis que $r_s/C = 2.46 \cdot 10^{-5}$. On a donc $x = 480/2.46 \cdot 10^{-5} = 19512195 \text{ s}$. On obtient donc $z = 2.26 \cdot 10^4$ et $t_{\infty} = -1414003 \text{ s}$. L'instant $t_{\infty} = 0$ correspond à peu près exactement au moment de l'extinction de l'objet (voir tableau), donc le temps vaut 16.37 jours.

$$7. v^2 = 2 G M/r$$

$$\sqrt{r} \, dr = \sqrt{2 G M} \, dt$$

$$\frac{2}{3} \left(\frac{r}{C} \right)^{3/2} = \sqrt{\frac{2 G M}{C^3}} \, t$$

et l'on obtient $t = 16.36$ jours.

16.10 On peut penser faire monter l'horloge de façon à ce que son temps propre s'écoule plus vite que sur terre. Mais si on la fait monter trop haut pendant le temps considéré, on l'accélère trop, ce qui, compte tenu de l'effet de relativité restreinte, ralentit l'écoulement du temps.

La trajectoire optimale qui maximise l'écoulement du temps propre est celle qui correspond au mouvement de chute libre, la particule étant lancée vers le haut à l'instant t_a , de façon à retomber juste à l'instant t_b .

Les particules libres décrivent en effet les géodésiques de l'espace-temps d'après le paragraphe 3 du chapitre 12 . D'après les paragraphes 4 et 5 du chapitre 10 et le § 3 du chapitre 11 ainsi que le § 6 du chapitre 10 ces géodésiques rendent stationnaire le temps propre et cela correspond à une maximisation. Le chemin de temps propre maximal entre deux évènements est donc celui correspondant au mouvement d'une particule libre reliant ces deux évènements.

16.11 1. D'après l'élément linéaire de Schwarzschild, pour un objet immobile, on a :

$$d\tau_i = \sqrt{1 - r_s/r} dt$$

2. L'équation des géodésiques (16,7) donne pour un objet en orbite circulaire dans le plan équatorial ($\alpha = 0$) :

$$-\frac{r}{B} \left(\frac{d\theta}{dp} \right)^2 + \frac{A' C^2}{2 B} \left(\frac{dt}{dp} \right)^2 = 0$$

D'autre part (16,5) donne :

$$C^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) C^2 dt^2 - r^2 d\theta^2$$

Il vient :

$$C^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) C^2 dt^2 - r^2 \frac{r_s}{r^2} \frac{1}{r} \frac{C^2}{2} dt^2$$

$$C^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{3 r_s}{2 r} \right) C^2 dt^2$$

$$d\tau_c = \sqrt{1 - 3 r_s/2 r} dt$$

3. Pour la trajectoire circulaire d'un photon, on sait que le temps propre ne s'écoule pas. Un photon ne vieillit pas! Et $d\tau_c = 0$ donne $3 r_s/2 r = 1$ soit $r = 3 r_s/2$, ce qui est bien le résultat trouvé au § 15 .

4. (16,7) donne :

$$r d\theta^2 = \frac{A' C^2}{2} dt^2$$

soit

$$r d\theta^2 = \frac{r_s C^2}{2 r^2} dt^2$$

avec $r_s = 2 G M/C^2$.

$$dt = \sqrt{\frac{r^3}{G M}} d\theta \quad \text{et} \quad T = 2 \pi \sqrt{\frac{r^3}{G M}}$$

ce qui est le résultat newtonien!

5. t_i étant le temps d'une horloge étalon fixe à la distance r , on a, pour un photon, la vitesse de la lumière mesurée localement étant toujours égale à C : $C = 2 \pi r / T_i$; T_i est la période, mesurée localement avec une horloge étalon fixe à la distance r , pour un tour. On a $r = 3 r_s/2$.

$$C = \frac{3 \pi r_s}{T_1} \quad T_1 = \frac{3 \pi r_s}{C}$$

puis $T_1 = T \sqrt{1 - r_s/r} = T \sqrt{3}$

Il vient :

$$T = \frac{3 \sqrt{3} \pi r_s}{C}$$

D'un autre côté, d'après la question 4 :

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{r^3}{G M}} = 2 \pi \sqrt{\frac{3 r_s}{2}} \left(\frac{3 r_s}{2} \right) \sqrt{\frac{2}{r_s C^2}}$$

et on retrouve le même résultat pour T .

6. On a :

$$\tau_c = \tau_i \frac{\sqrt{1 - 3 r_s/2r}}{\sqrt{1 - r_s/r}}$$

$$\tau_c = \tau_i \left(1 - \frac{3 r_s}{4 r} + \frac{r_s}{2 r} \right) = \tau_i \left(1 - \frac{r_s}{4 r} \right)$$

$$r_s = \frac{2 G M}{C^2} ; \quad \frac{v^2}{r} = \frac{G M}{r^2} ; \quad v^2 = \frac{G M}{r}$$

$$\tau_c = \tau_i \left(1 - \frac{G M}{2 r C^2} \right) = \tau_i \left(1 - \frac{v^2}{2 C^2} \right)$$

$$\tau_c = \tau_i \sqrt{1 - v^2/C^2}$$

ce qui est le résultat de la Relativité restreinte.

16.12 Nous notons simplement v pour v_1 ; $v = v_1$; voir le § 21 pour la définition de v_1 .

$$\omega \sqrt{1 - v^2/C^2} = \text{Cte} ; \quad r/\lambda = \text{Cte}$$

$$\lambda = \frac{2 \pi C^2}{\omega v} ; \quad \omega = \frac{\omega_\infty}{\sqrt{A}}$$

Il vient : $\frac{1 - v^2/C^2}{A} = \text{Cte}$

$$\frac{r v}{\sqrt{A}} = \text{Cte} ; \quad \frac{r^2 v^2}{A} = \text{Cte}$$

$$(2 r v^2 + 2 r^2 v v') A - r^2 v^2 A' = 0$$

$$- \frac{2 v v'}{C^2} A - \left(1 - \frac{v^2}{C^2}\right) A' = 0$$

$$v v' = - \left(1 - \frac{v^2}{C^2}\right) A' \frac{C^2}{2 A}$$

$$2 r v^2 A - r^2 \left(1 - \frac{v^2}{C^2}\right) A' C^2 - r^2 v^2 A' = 0$$

soit
$$v^2 = \frac{r A' C^2}{2 A} \quad ; \text{ il vient :}$$

$$v = \frac{r d\theta}{dt} = \frac{r d\theta}{dt} \frac{1}{\sqrt{A}}$$

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{v^2 A}{r^2} = \frac{A' C^2}{2 r}$$

ce qui est le résultat déjà trouvé.

16.13 1. Dérivons l'équation (16,21) par rapport à q :

$$2 \left(\frac{dr}{dq}\right) \frac{d^2 r}{dq^2} = - \frac{r_s}{r^2} \left(\frac{dr}{dq}\right) - J^2 \frac{d}{dr} \left[\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \frac{1}{r^2} \right] \left(\frac{dr}{dq}\right)$$

Compte tenu du lien entre q et τ , on obtient :

$$2 \frac{d^2 r}{C^2 d\tau^2} = - \frac{r_s}{r^2} - \frac{2 J^2}{r^4} \left(\frac{3}{2} r_s - r \right)$$

(16,17), (16,11) et (16,13) avec (16,20) donnent, en un point où $dr/dt = 0$:

$$J^2 = \frac{r^4}{A^2 C^2} \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \underbrace{\frac{1}{\frac{1}{A} - \frac{r^2}{A^2 C^2} \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}}_{+}$$

et on voit que J^2 dépend de la vitesse et croit avec celle-ci. Finalement :

$$F = m \frac{d^2 r}{d\tau^2} = - \frac{1}{2} \frac{r_s C^2 m}{r^2} - \frac{J^2 m C^2}{r^4} \left(\frac{3}{2} r_s - r \right)$$

2. On a bien la somme d'un terme constant et d'un terme dépendant de la vitesse. Remplaçant r_s par sa valeur, le premier terme vaut $- G m M/r^2$; c'est bien l'attraction newtonienne. Pour le deuxième terme, avec $r \gg r_s$, et $d\theta/dt$ faible :

$$J^2 \approx \frac{r^4}{A C^2} \omega^2$$

et on obtient $m \omega^2 r/A \approx m \omega^2 r$; c'est bien la force centrifuge.

3. Pour r supérieur à $3/2 r_s$, rayon de la trajectoire circulaire de la lumière, on a bien une force centrifuge tendant à éloigner l'objet de l'astre. Pour $r = 3/2 r_s$, la force centrifuge est nulle quelle que soit la vitesse! Définissant les lignes "droites" de l'espace comme les lignes parcourues par la lumière (définition différente de celle utilisant une ficelle tendue), on peut en effet considérer que l'objet va en ligne droite!

Pour $r < 3/2 r_s$, la force centrifuge est négative et propulse l'objet vers l'astre, cette propulsion augmentant, comme J^2 , avec la vitesse.

4. Ce comportement inhabituel de la force centrifuge dans un champ gravitationnel intense a d'importantes applications en astrophysique.

Ainsi, lorsqu'une masse de gaz tournante se contracte en conservant sa masse et son moment cinétique, elle s'aplatit progressivement sous l'action de la force centrifuge. Mais, dans les dernières phases de la contraction, lorsque le champ gravitationnel est très fort, la masse de gaz cesse de s'aplatir et au contraire regagne de la sphéricité sous l'action de cette même force centrifuge.

Chapitre 17

17.1 1.

$$p = \infty \quad \text{lorsque} \quad r_0 = \frac{2\sqrt{2}}{3} \hat{R}$$

(17,36) donne :

$$d\tau = \left[\frac{3}{2} \sqrt{1 - \frac{r_0^2}{\hat{R}^2}} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{r^2}{\hat{R}^2}} \right] dt$$

Le terme entre crochet est celui que l'on trouve au dénominateur dans l'expression de p de la formule (17,39). Il s'annule pour $p = \infty$ au centre. Donc $p = \infty$ pour $r = 0 \Rightarrow d\tau = 0 \times dt$; $\lambda_t = \infty \times \lambda_r$. Et :

$$z = \frac{\lambda_t - \lambda\tau}{\lambda\tau} = \infty$$

Le décalage vers le rouge est infini.

2. N'importe quel flux de particules venant de l'infini, des neutrinos par exemple, dont on sait qu'ils peuvent traverser sans interagir des quantités énormes de matière, donneront un flux infini au centre, le temps ne s'y écoulant plus vu de l'extérieur :

Pour un écoulement stationnaire de ces particules, la conservation du débit aux différents niveaux donne en effet $dN_r/dt = \text{Cte}$ (fig. 17.1); dN_r est le nombre de particules franchissant la sphère de rayon r pendant le temps dt mesuré à l'infini.

Pour $r = 0$ on obtient alors :

$$\frac{dN_0}{d\tau} = \frac{dN_0}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \text{Cte} \times \infty$$

Ce débit infini mesuré localement correspond à un terme de pression infini dans le tenseur d'impulsion-énergie : débit radial d'impulsion radiale infini.

La pression infinie est bien reliée au fait que le temps ne s'écoule plus, ce qui empêche toute possibilité "d'équilibrage" d'un flux de particules venant du dessus. Ceci correspond tout à fait à l'explication intuitive qui a été donnée au § 16 du chapitre 8 .

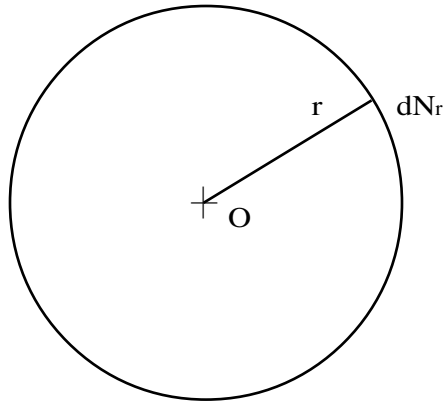


Fig. 17.1

3. (17,36) donne pour $r = r_0$:

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{r_0^2}{R^2}} dt$$

$$\lambda_{\infty} = \frac{\lambda_{r_0}}{\sqrt{1 - \frac{r_0^2}{R^2}}}$$

$$z = \frac{\lambda_{\infty} - \lambda_{r_0}}{\lambda_{r_0}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_0^2}{R^2}}} - 1$$

avec $r_0 = \frac{2\sqrt{2}}{3} \hat{R}$; $1 - \frac{r_0^2}{R^2} = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$

et $z = 2$.

On retrouve bien le fait, mentionné au § 10 , que la pression devient infinie au centre avant que l'horizon de Schwarzschild n'existe réellement à l'extérieur de l'astre, c'est à dire avant que $z = \infty$. Cela est évident, puisque lorsqu'on s'enfonce dans l'astre, le temps s'écoule de plus en plus lentement. C'est donc au centre de l'astre qu'il s'écoule le plus lentement, et c'est là qu'il cesse de s'écouler en premier, lorsque la masse augmente jusqu'à sa valeur critique.

4. Le fait que certains quasars aient un décalage vers le rouge supérieur à 2 implique qu'il ne peut s'agir d'astres en équilibre, le décalage vers le rouge étant supposé d'origine gravitationnel. Or nous avons vu au § 17 du chapitre 16 que le décalage vers le rouge d'un astre en effondrement gravitationnel n'est pas constant mais évolue au contraire très rapidement de façon à rendre l'astre brutalement invisible.

La seule origine possible du décalage vers le rouge des quasars, constant pour chaque quasar étudié, est celle d'un mouvement rapide d'éloignement (il n'y a jamais décalage vers le bleu!) qui ne peut s'expliquer que dans le cadre de l'expansion de l'univers (voir le chapitre 18). Le fait que ce décalage soit constant implique que toutes les régions émissives subissent le même décalage. Il ne peut donc pas y avoir, surajouté au décalage vers le rouge cosmologique, un décalage gravitationnel. Les régions émissives doivent donc être assez éloignées de la sphère de Schwarzschild.

Chapitre 18

18.1 $v = 41 \times 50 / 3.27 = 627 \text{ km/s}$

18.2 1.

$$E_c = \iiint \frac{1}{2} \rho v^2 d\tau = \int_0^S \frac{1}{2} \rho H^2 r^2 4 \pi r^2 dr$$

$$E_c = 2 \pi \rho H^2 \frac{S^5}{5}$$

2. La solution est donnée par l'équation (17,47).

$$3. \quad E_c + E_p = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho = 3 H^2/8 \pi G .$$

On a $v(r,t) = H(t) r$.

1.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 3 \rho H = 3 \rho \frac{S'}{S}$$

il vient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + 3 \rho \frac{S'}{S} = 0$$

et on retrouve (18,23) avec $p = 0$.

2. L'équation d'Euler s'écrit :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{v} = - \frac{G}{r^2} \frac{4}{3} \pi \rho r^3 \mathbf{u}$$

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \left(H x \frac{\partial}{\partial x} + H y \frac{\partial}{\partial y} + H z \frac{\partial}{\partial z} \right) \begin{pmatrix} H x \\ H y \\ H z \end{pmatrix}$$

On obtient, en x :

$$H' x + H^2 x = - \frac{4}{3} \pi G \rho x$$

or $H = S'/S$; il vient :

$$\frac{S''}{S} - \frac{S'^2}{S^2} + \frac{S'^2}{S^2} = - \frac{4}{3} \pi G \rho$$

$$S'' = - \frac{4}{3} \pi G \rho S$$

Partons maintenant de (18,22) que nous dérivons :

$$2 S' S'' = \frac{8 \pi G}{3} \rho S^2 + \frac{16 \pi G}{3} \rho S' S$$

compte tenu de l'équation de continuité, on arrive bien à la même équation différentielle en S .

1. On trouve $\rho_c = 3 \cdot 10^{-27} \text{ kg/m}^3$; $n_p \approx 2 \text{ m}^{-3}$.

$$2. \quad V = \pi d^2 h/4 = 6.65 \cdot 10^{61} \text{ m}^3 ;$$

$M = 3.98 \cdot 10^{41} \text{ kg}$; il vient :

$$\rho_{\text{voie lactée}} = 5.98 \cdot 10^{-21} .$$

3.

$$\rho = \rho_{\text{v.l.}} \times \frac{(10^{-7})^3}{10^{-14}} \approx 6 \cdot 10^{-28}$$

$$\frac{\rho}{\rho_c} \approx 0.2 \quad ; \quad q_0 \approx 0.1$$

Cette valeur de q_0 est, en ordre de grandeur, proche de 0.5 , la valeur de q_0 pour un espace plat. La présence de matière cachée peut donc amener q_0 à la valeur de 1/2 .

18.5

$$1. \quad 1.086 (1 - 1/2) z - 1.086 (1 - 0.1) z = - 1$$

$$z = 2.3$$

L'objet est plus lumineux dans le cas de l'espace plat.

2. (18,98) donne :

$$t = 16/(3.3)^{3/2} = 2.67 \text{ G.a.l.}$$

$$t_0 - t_1 = 13.3 \text{ milliards d'années lumières.}$$

3. Il faut donc sonder l'univers très loin pour avoir une différence d'éclat significative permettant de trancher.

18.6

$$(1 + z)^{1/2} = 1 + \frac{z}{2} - \frac{z^2}{8}$$

il reste à diviser en puissance croissante $z + z^2/4$ par $1 + z$ et on trouve :

$$r_1 = \frac{C}{S_0 H_0} \left(z - \frac{3}{4} z^2 \right)$$

ce qui est (18,55) avec $q_0 = 1/2$.

18.7

$$\sqrt{1 + 2 q_0 z} = 1 + q_0 z - \frac{q_0^2 z^2}{2}$$

d'où la valeur de d_L .

18.8

$$k = - 1 \quad ; \quad q_0 < 1/2 .$$

$$\int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1+r^2}} = \text{Argsh } r_1$$

En effet :

$$y = \text{Argsh } x \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

(18,78) donne :

$$\int \frac{C dt}{S(t)} = \int \frac{C}{S_0} \frac{1}{S} \frac{1}{H_0} \left(1 - 2 q_0 + \frac{2 q_0}{x} \right)^{-1/2} dx$$

$$= C \int \frac{1}{S_0 H_0} \frac{dx}{x} \left(1 - 2 q_0 + \frac{2 q_0}{x} \right)^{-1/2} dx$$

$$\text{ch } \psi - 1 = \frac{1 - 2 q_0}{q_0} x$$

$$= C \int \frac{1}{S_0 H_0} \frac{1}{x} q_0 \frac{(\text{ch } \psi - 1)}{(1 - 2 q_0)^{3/2}} d\psi$$

$$= \psi(t_0) - \psi(t_1) ; \quad \text{car } C = H_0 S_0 \sqrt{1 - 2 q_0}$$

(d'après (18,74))

$$= \text{Argch} \left(1 + \frac{1 - 2 q_0}{q_0} \right) - \text{Argch} \left(1 + \frac{1 - 2 q_0}{q_0} \frac{1}{1+z} \right)$$

(18,19) donne :

$$r_1 = \text{sh} \left[\text{Argch} \left(1 + \frac{1 - 2 q_0}{q_0} \right) \right] \left(1 + \frac{1 - 2 q_0}{q_0} \frac{1}{1+z} \right)$$

$$- \text{sh} \left[\text{Argch} \left(1 + \frac{1 - 2 q_0}{q_0} \frac{1}{1+z} \right) \right] \left(1 + \frac{1 - 2 q_0}{q_0} \right)$$

$$\text{sh} (\text{Argch } x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

On obtient la même chose qu'au § 40 avec un changement de signe sous la racine carrée.

$$r_1 = \frac{1}{q_0^2(1+z)} \left[\sqrt{1 - 2 q_0} (q_0 z + 1 - q_0) \right.$$

$$\left. - \sqrt{1 + 2 q_0} z \sqrt{1 - 2 q_0} (1 - q_0) \right]$$

et (18,74) avec $-C^2 = S_0^2 H_0^2 (2 q_0 - 1)$ redonne bien (18,95).

18.9 Compte tenu de ce qui a été dit au § 7 du chapitre 18, nous avons :

$$R_{rr} = - \frac{B'}{r B}$$

puis, avec l'équation de la fin du § 20 du chapitre 18 :

$$R_{rr} = - \frac{B'}{r B} - \frac{S^2}{1 - k r^2} \left(\frac{S''}{C^2 S} + \frac{2 S'^2}{C^2 S^2} \right)$$

$$R_{rr} = - \frac{2 k}{1 - k r^2} - \frac{S^2}{1 - k r^2} \left(\frac{S''}{C^2 S} + \frac{2 S'^2}{C^2 S^2} \right)$$

L'équation du champ en r-r s'écrit donc :

$$- \frac{2 k}{1 - k r^2} - \frac{S^2}{1 - k r^2} \left(\frac{S''}{C^2 S} + \frac{2 S'^2}{C^2 S^2} \right) + \frac{1}{2} \frac{S^2}{1 - k r^2} \left(\frac{6 k}{S^2} + \frac{6 S''}{C^2 S} + \frac{6 S'^2}{C^2 S^2} \right) = - \frac{8 \pi G}{C^4} \frac{\rho S^2}{1 - k r^2}$$

$$k C^2 + 2 S S'' + S'^2 = - \frac{8 \pi G}{C^2} \rho S^2$$

(18,22) donne alors :

$$\frac{8 \pi G}{3} \rho S^2 + \frac{8 \pi G}{C^2} \rho S^2 = - 2 S S''$$

D'autre part, la dérivée de (18,22) donne :

$$S'' = \frac{8 \pi G}{3} \rho \frac{S^2}{2 S'} + \frac{8 \pi G}{3} \rho S$$

Il vient :

$$\frac{8 \pi G}{3} \rho + \frac{8 \pi G}{C^2} \rho = - \frac{2 S''}{S} = - \frac{8 \pi G}{3} \rho \frac{S}{S'} - 2 \frac{8 \pi G}{3} \rho$$

soit :

$$\rho' + 3 \left(\rho + \frac{\rho}{C^2} \right) \frac{S'}{S} = 0$$

Ainsi, l'équation du champ en r-r avec celle en t-t, nous donne l'équation dynamique (18,23) comme prévu.

18.11 1. On obtient :

$$S'' = - \frac{4 \pi G}{3} \left(\rho + \frac{3 \rho}{C^2} \right) S$$

$$2. \quad S'' = - G M/S^2 = - 4/3 \pi G \rho S .$$

On voit qu'il s'ajoute à ρ le terme $3p/C^2$ montrant bien que les trois composantes de pression du tenseur d'impulsion-énergie agissent gravitationnellement.

3. Dans le cas du faux vide :

$$p = -\rho C^2 = -\frac{\Lambda C^4}{8\pi G} < 0$$

(18,23) donne alors $\rho^* = 0$, puis $p^* = -\rho^* C^2 = 0$

4.

$$S = Cte e^{\sqrt{\Lambda C^2/3} t}$$

L'exponentielle d'exposant négatif disparaît en effet rapidement.

La pression négative se comporte d'une manière répulsive du point de vue gravitationnel, d'où une période d'expansion exponentielle de l'univers appelée *inflation*.