

## Chapitre Cinq

### ÉLECTROMAGNÉTISME RELATIVISTE

#### CALCUL TENSORIEL

**1. Introduction.** - Nous supposons connue l'algèbre linéaire au programme des Classes Préparatoires aux Grandes Ecoles et des DEUG scientifiques. Nous en rappellerons quelques-unes des propriétés, ceci de façon à introduire les tenseurs qui jouent un rôle capital en Relativité générale. L'électromagnétisme servira de premier exemple d'utilisation de cette structure en physique

**2. Le tenseur électromagnétique.** - L'énergie sera notée ici  $\mathcal{E}$ , pour éviter la confusion avec le champ électrique  $\mathbf{E}$ . Les indices des quadrivecteurs seront notés : 0, 1, 2, 3; tandis que les composantes de  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  seront notées avec les indices  $x, y, z$ . Les équations (4,14) (4,15) et (4,18) donnent :

$$\begin{aligned}\Phi^0 &= \frac{1}{C} \frac{d\mathcal{E}}{d\tau} = \frac{1}{C} \mathbf{F} d\mathbf{l} = \frac{q}{C} \mathbf{E} d\mathbf{l} \\ \Phi^0 &= q (E^x U^1 + E^y U^2 + E^z U^3)\end{aligned}\quad (5, 1)$$

$$\begin{pmatrix} \Phi^1 \\ \Phi^2 \\ \Phi^3 \end{pmatrix} = \mathbf{F} \frac{dt}{d\tau} = q\mathbf{E}U^0 + qC \begin{pmatrix} U^1 \\ U^2 \\ U^3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B^x \\ B^y \\ B^z \end{pmatrix}\quad (5, 2)$$

(5,1) et (5,2) se regroupent dans (5,3) :

$$\begin{pmatrix} \Phi^0 \\ \Phi^1 \\ \Phi^2 \\ \Phi^3 \end{pmatrix} = qC \begin{pmatrix} 0 & \frac{E^x}{C} & \frac{E^y}{C} & \frac{E^z}{C} \\ \frac{E^x}{C} & 0 & B^z & -B^y \\ \frac{E^y}{C} & -B^z & 0 & B^x \\ \frac{E^z}{C} & B^y & -B^x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^0 \\ U^1 \\ U^2 \\ U^3 \end{pmatrix}\quad (5, 3)$$

$$\text{Soit : } \quad \Phi^\alpha = qCF^\alpha{}_\beta U^\beta\quad (5, 4)$$

$$\text{ou : } \quad \vec{\Phi} = qCF(\vec{U})\quad (5, 5)$$

$F$  est l'application linéaire de matrice :  $F^\alpha_\beta$ ;  $\beta$  indice en position basse à droite étant l'indice de colonne, et  $\alpha$  indice en position haute à gauche étant l'indice de ligne.

Voyons quelle est la loi de transformation des coefficients  $F^\alpha_\beta$  dans un changement de référentiel :

$$\begin{aligned}\Phi^\alpha &= \Lambda^\alpha_{\bar{\alpha}} \Phi^{\bar{\alpha}} = qCF^\alpha_\beta \Lambda^\beta_{\bar{\beta}} U^{\bar{\beta}} = \Lambda^\alpha_{\bar{\alpha}} qCF^{\bar{\alpha}}_{\bar{\beta}} U^{\bar{\beta}} \\ F^\alpha_\beta \Lambda^\beta_{\bar{\beta}} &= \Lambda^\alpha_{\bar{\alpha}} F^{\bar{\alpha}}_{\bar{\beta}}\end{aligned}$$

Multiplions l'équation matricielle précédente par  $\Lambda^{-1}$ . L'équation (3,18) permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\Lambda^{\bar{\gamma}}_\alpha \Lambda^\alpha_{\bar{\alpha}} F^{\bar{\alpha}}_{\bar{\beta}} &= \Lambda^{\bar{\gamma}}_\alpha F^\alpha_\beta \Lambda^\beta_{\bar{\beta}} \\ \delta^{\bar{\gamma}}_{\bar{\alpha}} F^{\bar{\alpha}}_{\bar{\beta}} &= F^{\bar{\alpha}}_{\bar{\beta}} = \Lambda^{\bar{\alpha}}_\alpha F^\alpha_\beta \Lambda^\beta_{\bar{\beta}} \\ F^{\bar{\alpha}}_{\bar{\beta}} &= \Lambda^{\bar{\alpha}}_\alpha \Lambda^\beta_{\bar{\beta}} F^\alpha_\beta\end{aligned}\tag{5,6}$$

$$\text{ou : } \quad \bar{F} = \Lambda^{-1} F \Lambda\tag{5,7}$$

$F$  est la matrice de l'application linéaire dans l'ancienne base,  $\bar{F}$  dans la nouvelle.  $\Lambda$  est la matrice de passage de l'ancienne à la nouvelle base. L'équation matricielle (5,7) est bien connue en algèbre linéaire, mais la forme (5,6) avec les composantes et en utilisant la notation du calcul tensoriel est moins connue.

On voit que l'on a un ensemble de nombre à deux indices, et la matrice de passage intervient deux fois; tandis que pour un vecteur qui est un ensemble de nombre à un indice, la matrice de passage intervenait une fois dans le changement des composantes d'une base à une autre.

Souvenons nous que c'est à partir de la loi (3,15) de transformation des composantes que nous avons défini les quadrivecteurs au § 8 du chapitre 3. La loi de transformation (5,6) va nous permettre en généralisant la loi (3,15) de définir les *tenseurs* : précisons cela :

Dans (5,6) l'indice en position haute se transforme comme celui des composantes d'un vecteur, on a un indice contravariant; l'indice en position basse se transforme comme les vecteurs de base, on a un indice covariant. La loi (5,6) généralise la loi de transformation des composantes d'un vecteur pour un ensemble de nombres à deux indices. On appelle *tenseur* tout ensemble de nombres (que nous appellerons également *tableau de nombres*) à zéro, un ou plusieurs indices, obéissant à des lois de transformation de ce type dans un changement de base : chaque indice en position haute se transformera de manière contravariante, tandis que chaque indice en position basse se transformera de manière covariante. Ces nombres indicés seront appelés les *composantes du tenseur* dans la base utilisée. Le nombre total d'indices est *l'ordre du tenseur*. Un nombre est un tenseur d'ordre zéro, un vecteur est un tenseur

une fois contravariant. Le tenseur  $F$ , appelé *tenseur électromagnétique*, est une fois covariant, une fois contravariant, on dit qu'on a un tenseur mixte, et on voit qu'un tenseur mixte est une application linéaire (équation (5,5)). Toute équation du type (5,4) mettant en jeu des tenseurs de différents ordres est automatiquement covariante dans un changement de référentiel.

En ce qui concerne la notation, nous noterons parfois  $F=(F^\alpha_\beta)$ , les parenthèses insistant sur le fait que l'on considère en bloc toutes les composantes, donc que l'on considère le tenseur. Par abus de langage, nous omettrons cependant parfois ces parenthèses.

De la même manière que  $F$  désigne aussi bien la matrice que le tenseur,  $(F^\alpha_\beta)$  pourra désigner également la matrice d'éléments  $F^\alpha_\beta$ , avec  $\alpha$  indice de ligne et  $\beta$  indice de colonne. Nous faisons cela car il n'y aura jamais d'ambiguïté; nous saurons toujours clairement si nous considérons la matrice ou le tenseur. Cela nous permet de ne pas surcharger la notation. La matrice pourra également être désignée par  $(F)$ , le tenseur étant alors désigné par  $F$ ; c'est à dire que les parenthèses insistent sur le fait qu'on considère la matrice (voir remarque au dessous de l'équation (5,42)).

On voit que la convention d'Einstein de position des indices permet d'écrire automatiquement la loi de transformation des composantes pour tout tenseur.

D'autre part, on voit que l'utilisation de l'espace de Minkowski, c'est à dire du formalisme quadridimensionnel permet déjà ici d'unifier  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$ ; la loi de force (4,14) semblait les faire intervenir d'une manière différente. Ils sont unifiés dans (5,3). Notons que cela est possible parce que le même paramètre  $q$  intervient pour l'électrostatique et le magnétisme (voir §6 chapitre 6). La transformation des composantes de  $F$  dans un changement de référentiel donne immédiatement la loi de transformation des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$

**3. Critère de tensorialité.** - Comment savoir si un tableau de nombres à plusieurs indices est un tenseur? Il suffit, pour avoir la réponse, d'examiner comment nous avons trouvé le tenseur électromagnétique  $F$ . Nous avons déduit la loi de transformation (5,6) pour les composantes de  $F$ , faisant du tableau de nombres de ses composantes un tenseur, de la loi (5,4) vraie dans toute base, connaissant les lois de transformation des composantes de  $\vec{\Phi}$  et  $\vec{U}$ . Supposons que l'on ait une égalité du type (5,4), faisant intervenir autant de tableaux de nombres indicés qu'on veut, le nombre d'indices des tableaux étant également quelconques. Supposons que l'on sache que l'égalité est vraie dans toutes les bases, les lois de transformation des tableaux de nombres indicés étant connues et correspondant bien à la loi de transformation des

composantes d'un tenseur, sauf pour un tableau de nombres dont la loi de transformation est inconnue. De l'égalité du type (5,4) et des lois de transformations connues, on déduira la loi de transformation inconnue, qui s'avèrera être automatiquement la loi de transformation des composantes d'un tenseur.

Une égalité du type (5,4) est donc un *critère de tensorialité* pour un tableau de nombres inconnu, si tous les autres tableaux sont des tenseurs.

**4. Égalité de deux tenseurs.** - Dès que deux tenseurs ont les mêmes composantes dans une base, ils sont égaux, car la loi de transformation des composantes assure l'égalité des composantes dans toute base; c'est à dire l'égalité des deux tenseurs.

**5. Le tenseur métrique.** - Dans toute la suite de ce chapitre, sauf exception, nous utiliserons les mêmes notations que dans l'étude de l'espace de Minkowski : vecteur en caractère non gras avec une flèche au dessus, et indices avec les lettre grecques, ceci bien que, à priori, dans ce qui suit, le nombre de dimensions de l'espace soit quelconque. Considérons donc un espace vectoriel quelconque muni d'un produit scalaire, et posons :

$$g(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \bullet \vec{b} \quad (5, 8)$$

Les égalités (3,26) et (3,28) traduisent la linéarité de  $g$  :

$$g(\lambda \vec{a}, \vec{b}) = \lambda g(\vec{a}, \vec{b}) \quad (5, 9)$$

$$g(\vec{a}, \vec{c} + \vec{d}) = g(\vec{a}, \vec{c}) + g(\vec{a}, \vec{d}) \quad (5, 10)$$

L'égalité (3,27) traduit la symétrie de  $g$  :

$$g(\vec{a}, \vec{b}) = g(\vec{b}, \vec{a}) \quad (5, 11)$$

$g$  est une forme bilinéaire symétrique. Dans une base quelconque, on a :

$$g(\vec{a}, \vec{b}) = g(a^\alpha \vec{e}_\alpha, b^\beta \vec{e}_\beta) = a^\alpha b^\beta g_{\alpha,\beta} \quad (5, 12)$$

avec :

$$g_{\alpha,\beta} = g(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta) \quad (5, 13)$$

Dans un changement de base :

$$g_{\bar{\alpha},\bar{\beta}} = g(\Lambda^{\alpha}_{\bar{\alpha}} \vec{e}_\alpha, \Lambda^{\beta}_{\bar{\beta}} \vec{e}_\beta) = \Lambda^{\alpha}_{\bar{\alpha}} \Lambda^{\beta}_{\bar{\beta}} g_{\alpha,\beta} \quad (5, 14)$$

$$\begin{aligned} g_{\bar{\alpha},\bar{\beta}} &= \Lambda^{\alpha}_{\bar{\alpha}} g_{\alpha,\beta} \Lambda^{\beta}_{\bar{\beta}} \\ g_{\bar{\alpha},\bar{\beta}} &= [(g)\Lambda]_{\alpha\bar{\beta}} \Lambda^{\alpha}_{\bar{\alpha}} \\ &= {}^t [(g)\Lambda]_{\bar{\beta},\alpha} \Lambda^{\alpha}_{\bar{\alpha}} = ({}^t [(g)\Lambda] \Lambda)_{\bar{\beta},\bar{\alpha}} \end{aligned}$$

Compte tenu de la symétrie de  $g$  :

$$g_{\bar{\beta},\bar{\alpha}} = ({}^t [(g) \Lambda] \Lambda)_{\bar{\beta},\bar{\alpha}}$$

qui peut s'écrire matriciellement sous la forme bien connue en algèbre linéaire :

$$(\bar{g}) = {}^t \Lambda (g) \Lambda \quad (5, 15)$$

Les nombres  $g_{\alpha,\beta}$  muni de leur loi de transformation (5,14) constituent donc un tenseur deux fois covariant. Ce tenseur correspond au produit scalaire donnant la métrique de l'espace vectoriel. On l'appelle le *tenseur métrique*  $g$ .

Lorsqu'il pourra y avoir ambiguïté pour un symbole, nous mettrons deux flèches superposées au dessus, de façon à préciser que nous avons affaire à un tenseur d'ordre 2. Nous avons donc ici :

$$g = \vec{\vec{g}}$$

De toute façon, les tenseurs d'ordre 2 seront toujours écrits en caractère non gras, avec deux flèches ou non au dessus.

Dans le cas de l'espace de Minkowski, le tenseur métrique est noté  $\eta$  et appelé le *tenseur de Minkowski*. Dans une base type, on a :

$$g_{\alpha,\beta} = \eta_{\alpha,\beta} = \vec{e}_\alpha \bullet \vec{e}_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5, 16)$$

La notation  $\eta_{\alpha,\beta}$  correspondra toujours aux composantes du tenseur de Minkowski exprimées dans une base type.

Ainsi à une forme bilinéaire est associé un tenseur deux fois covariant. Cette propriété va nous permettre de définir en toute généralité les tenseurs au § 7; mais, dans un premier temps, il nous faut rappeler les principales propriétés des formes linéaires.

**6. Les formes linéaires.** - Une forme linéaire  $\varphi$  est une application linéaire de l'espace vectoriel  $\mathbb{E}$  dans  $\mathbb{R}$  :

$$\vec{a} \in \mathbb{E} \quad \xrightarrow{\varphi} \quad \varphi(\vec{a}) \in \mathbb{R}$$

ainsi :

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda, \vec{a}) &= \lambda \varphi(\vec{a}) \\ \varphi(\vec{a} + \vec{b}) &= \varphi(\vec{a}) + \varphi(\vec{b}) \end{aligned}$$

L'ensemble des formes linéaires constitue un espace vectoriel  $\mathbb{E}^*$  (prononcé  $\mathbb{E}$  dual) dit *dual* de  $\mathbb{E}$ . La somme et le produit par un nombre étant définis par :

$$\begin{aligned} (\varphi + \psi)(\vec{a}) &= \varphi(\vec{a}) + \psi(\vec{a}) \\ (\lambda\varphi)(\vec{a}) &= \lambda\varphi(\vec{a}) \end{aligned}$$

A toute base  $\{\vec{e}_\alpha\}$  de  $\mathbb{E}$  correspond la base dite *duale* de la base précédente :  $\{e^{*\alpha}\}$  de  $\mathbb{E}^*$ , les formes linéaires  $e^{*\alpha}$  étant définies par :

$$e^{*\alpha}(\vec{e}_\beta) = \delta^\alpha_\beta \quad (5,17)$$

L'indice doit être mis en position haute pour les formes linéaires, compte tenu de la convention d'Einstein, et de leur loi de transformation dans un changement de base de  $\mathbb{E}$ . En effet : soit le changement de base  $\{\vec{e}_\alpha\} \longrightarrow \{\vec{e}_{\bar{\alpha}}\}$  :

$$\begin{aligned} e^{*\bar{\beta}}(\vec{e}_\alpha) &= e^{*\bar{\beta}}(\Lambda^{\bar{\alpha}}_\alpha \vec{e}_{\bar{\alpha}}) = \Lambda^{\bar{\alpha}}_\alpha e^{*\bar{\beta}}(\vec{e}_{\bar{\alpha}}) \\ &= \Lambda^{\bar{\alpha}}_\alpha \delta^{\bar{\beta}}_{\bar{\alpha}} = \Lambda^{\bar{\beta}}_\alpha = \Lambda^{\bar{\beta}}_\beta \delta^\beta_\alpha = \Lambda^{\bar{\beta}}_\beta e^{*\beta}(\vec{e}_\alpha) \\ &\Rightarrow e^{*\bar{\beta}} = \Lambda^{\bar{\beta}}_\beta e^{*\beta} \end{aligned} \quad (5,18)$$

L'indice en position haute correspond bien à la loi de transformation contravariante. Pour toute forme  $\varphi$  on peut écrire :

$$\varphi = \varphi_\alpha e^{*\alpha} \quad (5,19)$$

avec la convention d'Einstein de sommation implicite et de position des indices. L'indice en position basse pour  $\varphi_\alpha$  correspond bien à une loi de transformation covariante; il est en effet facile de vérifier que :

$$\varphi_{\bar{\alpha}} = \Lambda^\alpha_{\bar{\alpha}} \varphi_\alpha \quad (5,20)$$

A toute forme linéaire  $\varphi$  est ainsi associé un tableau de nombres à un indice se transformant suivant (5,20), donc un tenseur une fois covariant. Réciproquement, à tout tableau de nombre  $\varphi_\alpha$  à un indice se transformant suivant (5,20), donc à tout tenseur une fois covariant, on peut associer la forme linéaire définie par (5,19) dont les  $\varphi_\alpha$  sont les composantes. Il y a donc identité entre les tenseurs une fois covariants et les formes linéaires. On a alors :

$$\varphi(\vec{e}_\alpha) = \varphi_\beta e^{*\beta}(\vec{e}_\alpha) = \varphi_\beta \delta^\beta_\alpha = \varphi_\alpha \quad (5,21)$$

puis :

$$\varphi(a^\alpha \vec{e}_\alpha) = a^\alpha \varphi(\vec{e}_\alpha) = a^\alpha \varphi_\alpha \quad (5,22)$$

Nous allons maintenant introduire une nouvelle notation pour les formes linéaires de la base duale. Soit :

$$\begin{array}{ccc} \vec{v} & = & v^\alpha \vec{e}_\alpha \\ & \xrightarrow{e^{*\beta}} & v^\beta \end{array}$$

en effet :

$$e^{*\beta}(\vec{v}) = e^{*\beta}(v^\alpha \vec{e}_\alpha) = v^\alpha \delta^\beta_\alpha = v^\beta \quad (5,23)$$

La  $\beta^{\text{eme}}$  forme linéaire de base associe donc au vecteur  $\vec{v}$  sa  $\beta^{\text{eme}}$  composante. Nous introduirons alors la notation :

$$e^{*\beta} = dx^{*\beta} \quad (5, 24)$$

Nous utilisons ici  $dx^{*\beta}$  et non pas  $x^{*\beta}$ , ce qui peut paraître surprenant, mais autrement la notation ne pourrait pas être généralisée aux coordonnées curvilignes (voir § 4 du chapitre 9; voir également § 16 de ce chapitre).

**7. Les tenseurs.** - Nous utiliserons parfois des lettres latines comme indices dans la suite, pour aérer la notation, surtout quand il y aura beaucoup d'indices différents. Nous introduisons maintenant une nouvelle définition des tenseurs, qui s'avèrera identique à celle du § 2 Un tenseur  $T$ ,  $p$  fois contravariant,  $q$  fois covariant, est une forme multilinéaire associant à  $p$  formes linéaires et  $q$  vecteurs un nombre réel :

$$(\dots, \varphi^i, \dots, \vec{u}_j, \dots) \in \dots \times \mathbb{I}\mathbb{E}^* \times \dots \times \mathbb{I}\mathbb{E} \times \dots \xrightarrow{T} T(\dots, \varphi^i, \dots, \vec{u}_j, \dots) \in \mathbb{R}$$

Dans les parenthèses, il y a dans un ordre quelconque dépendant de  $T$  une suite de formes linéaires et de vecteurs. Nous appellerons la donnée du nombre et de la position des indices contravariants et covariants du tenseur la *variance* de ce tenseur.

Nous aurons par exemple :

$$T(\varphi, \vec{u}, \vec{v})$$

Dans la suite, nous prendrons toujours par commodité de notation, cet exemple d'un tenseur une fois contravariant, deux fois covariant ( $p = 1$ ;  $q = 2$ ). D'une manière générale, la linéarité demandée impose :

$$T(\dots, \lambda \varphi^i, \dots) = \lambda T(\dots, \varphi^i, \dots)$$

idem avec  $\vec{u}$ .

$$T(\dots, \varphi + \psi, \dots) = T(\dots, \varphi, \dots) + T(\dots, \psi, \dots)$$

idem avec  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

Un vecteur est un tenseur une fois contravariant par :

$$\vec{a}(\varphi) = \varphi(\vec{a}) \quad (5, 25)$$

Le tenseur métrique est bien selon cette définition un tenseur deux fois covariant.

**8. Identification d'un tenseur mixte d'ordre 2 à une application linéaire.** - En ce qui concerne un tenseur mixte d'ordre 2 une fois covariant et une fois contravariant, comme le tenseur électromagnétique, on peut l'identifier à une application linéaire, comme nous l'avons vu au § 2; en effet au tenseur  $T$  est associée d'une manière canonique l'application linéaire  $f$  par :

$$T(\varphi, \vec{a}) = \varphi(f(\vec{a})) \quad (5, 26)$$

Le vecteur  $f(\vec{a})$ , forme linéaire sur  $\mathbb{E}^*$  est tel que :

$$\varphi \xrightarrow{f(\vec{a})} f(\vec{a})[\varphi] = \varphi(f(\vec{a})) = T(\varphi, \vec{a})$$

On peut donc noter par abus de langage :

$$f(\vec{a})(\cdot) = T[\cdot, \vec{a}] = T(\vec{a})(\cdot) \quad (5, 27)$$

et  $f = T$ .

Ainsi un vecteur  $\vec{a}$  permet d'associer linéairement au tenseur une fois contravariant une fois covariant  $T$  le tenseur une fois contravariant, donc le vecteur  $T(\vec{a})$ . On a donc fait sauter une covariance et diminué la variance totale, c'est à dire l'ordre de 1. Nous verrons au § 15 avec l'équation (5,59) qu'il y a bien accord avec l'association à une application linéaire vue au § 2 par (5,4).

**9. Enlèvement d'une covariance d'un tenseur grâce à un vecteur.**

- Nous allons voir que l'on peut faire l'opération précédente sur tout tenseur possédant au moins un indice covariant. Notons que le cas de formes linéaires est évident; on obtient un scalaire; c'est la définition de ces formes.

Prenons maintenant l'exemple d'un tenseur une fois contravariant et deux fois covariant :

$$T(\varphi, \vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{R}$$

On peut grâce au vecteur  $\vec{a}$  associer, selon le même procédé qu'en (5,27) un tenseur une fois contravariant, une fois covariant :

$$U : \quad U(\cdot, \cdot) = T(\cdot, \cdot, \vec{a}) \quad (5, 28)$$

$$U(\varphi, \vec{u}) = T(\varphi, \vec{u}, \vec{a}) \quad (5, 29)$$

Grâce au vecteur  $\vec{a}$  on a bien fait sauter une covariance de  $T$ . Par convention, nous ferons toujours sauter celle qui est le plus à droite.

Nous noterons encore :

$$U = T(\vec{a}) \quad (5, 30)$$

**10. Composantes d'un tenseur.** - Nous allons maintenant voir quelles sont les composantes d'un tenseur dans une base, et retrouver ainsi la définition des tenseurs du § 2

$$T(\varphi, \vec{u}, \vec{v}) = T(\varphi_i e^{*i}, u^j \vec{e}_j, v^k \vec{e}_k) = \varphi_i u^j v^k t^i_{jk} \quad (5, 31)$$

En posant :

$$t^i_{jk} = T(e^{*i}, \vec{e}_j, \vec{e}_k) \quad (5, 32)$$

Nous noterons toujours avec un  $t$  minuscule les composantes d'un tenseur  $T$  a priori quelconque, pour aérer la notation. Cependant, dans le cas du tenseur d'impulsion-énergie, le tenseur ainsi que les composantes seront toujours notés avec le symbole  $T$  majuscule.

Ce tableau de nombres à  $p + q$  indices (ici,  $1 + 2$ ) ainsi construit correspond bien à un tenseur au sens du § 2; en effet ces nombres se transforment bien dans un changement de base comme les composantes d'un tenseur :

$$T(e^{*\bar{i}}, \vec{e}_{\bar{j}}, \vec{e}_{\bar{k}}) = \Lambda^{\bar{i}}_i \Lambda^j_{\bar{j}} \Lambda^k_{\bar{k}} T(e^{*i}, \vec{e}_j, \vec{e}_k) \quad (5, 33)$$

Ceci, en exprimant les vecteurs et formes linéaires liés à la base  $\{\vec{e}_i\}$  par leurs expressions dans la base  $\{\vec{e}_{\bar{i}}\}$ .

Réciproquement, à un tableau de nombres vérifiant la relation (5,33) dans un changement de base correspond une forme multilinéaire et une seule, dont les valeurs sur les vecteurs et les formes linéaires de bases sont justement données par ces nombres. Les valeurs pour tout ensemble de vecteurs et formes linéaires s'en déduisent suivant l'équation (5,31) par linéarité. Ainsi la correspondance est faite entre les deux définitions des tenseurs : *comme ensemble de nombres vérifiant une loi de transformation dans un changement de base, et comme forme multilinéaire.*

Remarquons qu'on retrouve bien les composantes d'un vecteur par (5,32), car (5,25) donne :

$$\vec{v}(e^{*i}) = e^{*i}(\vec{v}) = v^i \quad (5, 34)$$

grâce à (5,23). Il y a bien de même accord de (5,32) avec les composantes d'une forme linéaire grâce à (5,21).

**11. Combinaison linéaire de deux tenseurs de même variance.** - Prenons l'exemple suivant d'un tenseur une fois contravariant deux fois covariant :

$$(\lambda T + \mu U)(\varphi, \vec{u}, \vec{v}) = \lambda T(\varphi, \vec{u}, \vec{v}) + \mu U(\varphi, \vec{u}, \vec{v}) \quad (5, 35)$$

Nous généralisons ainsi la définition qui a été faite au début du § 6 pour les formes linéaires, et qui a été utilisée dans les équations (5,18) et (5.21).

On a bien évidemment :

$$(\lambda T + \mu U)^i_{jk} = \lambda t^i_{jk} + \mu u^i_{jk} \quad (5, 36)$$

**12. Abaissement et élévation d'indices.** Le tenseur métrique  $g$  permet de transformer les indices covariants en contravariants et réciproquement, donc d'associer d'une manière canonique, à un tenseur donné, un ensemble de tenseurs du même ordre ayant un nombre d'indices covariants et contravariants différents. Identifiant tous ces tenseurs, on peut dire qu'il permet ainsi de changer la *variance* d'un tenseur à son gré. Voyons comment nous réalisons cela sur l'exemple du tenseur électromagnétique :

Au tenseur mixte  $F^\alpha_\beta$  on peut associer le tenseur  $F_{\alpha\beta}$  deux fois covariant par :

$$F_{\alpha\beta} = g_{\alpha\mu} F^\mu_\beta \quad (5, 37)$$

Il est facile de vérifier qu'on a la bonne loi de transformation des composantes.

On identifie ces deux tenseurs associés canoniquement, et on dit qu'on a ainsi les composantes deux fois covariantes de  $F$ . Nous ferons une telle identification et utiliserons un tel vocabulaire pour toute élévation et abaissement d'indice.

Il est important de maintenir les positions horizontales des indices, de façon à se souvenir que  $F_{\alpha\beta}$  vient de  $F^\alpha_\beta$ ,  $\alpha$  étant déjà à gauche. En effet,  $F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}$  et il faut se souvenir de la convention qui consiste à mettre l'indice abaissé à gauche de celui qui ne l'est pas dans l'exemple que nous considérons. Cette convention se retrouve dans la mise à gauche de  $\alpha$  dans  $F^\alpha_\beta$  si nous nous imposons la règle du respect de l'ordre horizontal lors de l'abaissement ou de l'élévation d'un indice, règle que nous suivrons dans la suite. Dans (5,37), il y a bien sommation sur l'indice  $\mu$  de colonne pour la matrice ( $g$ ) et de ligne pour la matrice ( $F$ ). Pour  $F_{\alpha\beta}$ ,  $\alpha$ , indice à gauche, est alors bien un indice de ligne, et  $\beta$  indice à droite est bien un indice de colonne. Cette convention sera toujours adoptée pour la représentation matricielle d'un tableau de nombres indicés, les deux indices étant à la même hauteur. La convention de mettre  $\alpha$  à gauche dans  $F^\alpha_\beta$  permet bien ainsi d'obtenir la convention précédente. Notons que nous prenons la même convention (lignes et colonnes de la matrice) pour la position horizontale et verticale des indices des matrices de passage (équations (3,15); (3,16); (3,17)).

Nous avons donc :

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E^x}{C} & \frac{E^y}{C} & \frac{E^z}{C} \\ -\frac{E^x}{C} & 0 & -B^z & B^y \\ -\frac{E^y}{C} & B^z & 0 & -B^x \\ -\frac{E^z}{C} & -B^y & B^x & 0 \end{pmatrix}$$

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E^x}{C} & -\frac{E^y}{C} & -\frac{E^z}{C} \\ \frac{E^x}{C} & 0 & -B^z & B^y \\ \frac{E^y}{C} & B^z & 0 & -B^x \\ \frac{E^z}{C} & -B^y & B^x & 0 \end{pmatrix}$$

(voir ci-dessous pour l'obtention de  $F^{\alpha\beta}$ )

On vérifie bien que ces deux tenseurs sont antisymétriques.

Remarquons que :

$$\begin{aligned} F(\vec{u}, \vec{v}) &= F_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta = g_{\alpha\lambda} F^\lambda{}_\beta u^\alpha v^\beta \\ &= g_{\alpha\lambda} u^\alpha F(v^\beta) = g[\vec{u}, F(\vec{v})] = \vec{u} \bullet F(\vec{v}) \end{aligned} \quad (5, 38)$$

On voit sur cet exemple sans l'utilisation des composantes, comment  $g$  permet d'associer à une application linéaire (un tenseur mixte) un tenseur deux fois covariants (une forme bilinéaire). Des formules analogues existent pour tout passage d'indices contravariants en indices covariants et réciproquement, de telle manière qu'on peut se passer des composantes dans ce genre de définition.

Elevant la composante covariante de  $F^\alpha{}_\beta$  de façon à obtenir  $F^{\alpha\beta}$  nous parlerons des composantes deux fois contravariantes de  $F$ . Voyons ci-dessous comment faire cela : Soit  $(\gamma) = (\gamma^{\lambda\alpha})$  la matrice inverse de  $(g) = (g_{\alpha\mu})$ .  $(\gamma)$  comme  $(g)$  est symétrique. On a :

$$\begin{aligned} \gamma^{\lambda\alpha} g_{\alpha\mu} &= \delta^\lambda{}_\mu \quad (5, 39) \\ \gamma^{\lambda\alpha} F_{\alpha\beta} &= \gamma^{\lambda\alpha} g_{\alpha\mu} F^\mu{}_\beta = \delta^\lambda{}_\mu F^\mu{}_\beta = F^\lambda{}_\beta \end{aligned}$$

$(\gamma^{\lambda\alpha})$  permet bien ainsi de monter les indices, puisque à partir de  $F_{\alpha\beta}$  on a retrouvé  $F^\alpha{}_\beta$  (changeant la notation  $\lambda$  en  $\alpha$  et réciproquement).

$$F^\alpha{}_\beta = \gamma^{\alpha\lambda} F_{\lambda\beta} \quad (5, 40)$$

On pose alors :

$$F^{\alpha\beta} = \gamma^{\beta\lambda} F^\alpha{}_\lambda$$

La formule (5,39) permet alors de dire que  $\delta^\lambda{}_\mu$  est le tenseur mixte associé au tenseur métrique par changement de la variance de ce tenseur. Ainsi à la forme bilinéaire de la métrique est associée l'application linéaire unité :

$$\vec{y} = (\delta)(\vec{x})$$

donne en effet :

$$y^\alpha = \delta^\alpha_\beta x^\beta = x^\alpha$$

voir § 2 formules (5,4) et (5,5). En particulier, cela est évident par (5,38) avec :

$$F(\vec{u}, \vec{v}) = g(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u} \bullet \vec{v} \Rightarrow F(\vec{v}) = \vec{v}$$

$\delta = (\delta^\alpha_\beta)$ , tenseur mixte dont l'application linéaire correspondante est l'application linéaire unité, est appelé *tenseur de KRONECKER*. Il a bien évidemment les mêmes composantes dans n'importe quelle base. En effet, la matrice de l'application linéaire unité, matrice des composantes du tenseur de KRONECKER est la matrice unité ( $I$ ) dans n'importe quelle base.

On pose  $\delta_\beta^\alpha = \delta^\alpha_\beta$ , et ces deux tenseurs mixtes une fois contravariant et une fois covariant pour le premier, une fois covariant et une fois contravariant pour le second, sont identifiés à la même application linéaire, l'application linéaire unité, et ont pour composantes la matrice unité (voir également la remarque en dessous de l'équation (5,47)).

Continuons maintenant à élever les indices du tenseur métrique; élevons le deuxième indice de façon à obtenir ce que nous nommerons donc  $g^{\alpha\beta}$  :

$$g^{\alpha\beta} = \gamma^{\beta\lambda} \delta^\alpha_\lambda = \gamma^{\beta\alpha} = \gamma^{\alpha\beta} \quad (5,41)$$

et on se sert donc des composantes  $g^{\alpha\beta}$  pour monter les indices. (5,40) devient alors :

$$F^\alpha_\beta = g^{\alpha\lambda} F_{\lambda\beta} \quad (5,42)$$

Ainsi la matrice inverse de ( $g$ ), matrice des composantes deux fois covariantes de  $g$ , est également celle des composantes deux fois contravariantes du tenseur  $g$ .

Le produit scalaire de deux vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  s'écrit :

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = g_{\alpha\beta} a^\alpha b^\beta = a^\alpha b_\alpha = a_\beta b^\beta \quad (5,43)$$

les  $a_\alpha$  étant les composantes covariantes du vecteur  $\vec{a}$  (idem pour  $\vec{b}$ ), c'est à dire les composantes de la forme linéaire associée canoniquement à  $\vec{a}$  grâce au tenseur métrique. On peut donc écrire, employant la même notation pour le vecteur et la forme linéaire qui lui est identifiée (voir (5,22)).

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{a}(\vec{b}) = \vec{b}(\vec{a}) \quad (5,44)$$

Autrement dit la forme linéaire associée à un vecteur  $\vec{a}$  par passage aux composantes covariantes est celle donnant comme image du vecteur  $\vec{v}$  le produit scalaire  $\vec{a} \bullet \vec{v}$  :

$$\vec{v} \xrightarrow{\vec{a}} \vec{a} \bullet \vec{v}$$

**13. Produit tensoriel.** - Prenons ici l'exemple d'un tenseur  $T$  une fois covariant, une fois contravariant et d'un tenseur  $U$  deux fois contravariant, une fois covariant. On définit alors le produit tensoriel de  $T$  et  $U$  noté  $T \otimes U$  par :

$$T \otimes U (\varphi, \vec{a}, \psi_1, \psi_2, \vec{b}) = T(\varphi, \vec{a}) U(\psi_1, \psi_2, \vec{b}) \quad (5, 45)$$

Si  $T \in \mathbb{E}_1$  et  $U \in \mathbb{E}_2$ , on dit que  $T \otimes U \in \mathbb{E}_1 \otimes \mathbb{E}_2$ .

$\mathbb{E}_1 \otimes \mathbb{E}_2$  est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires possibles d'éléments de la forme  $T \otimes U$  avec  $T \in \mathbb{E}_1$  et  $U \in \mathbb{E}_2$ . Un tel élément :  $T \otimes U$  est dit décomposable, ce qui n'est pas les cas de l'élément général de  $\mathbb{E}_1 \otimes \mathbb{E}_2$ . On voit que  $\mathbb{E}_1 \otimes \mathbb{E}_2$  est l'ensemble des applications multilinéaires de  $\mathbb{E}^* \times \mathbb{E} \times \mathbb{E}^* \times \mathbb{E} \times \mathbb{E}$  dans  $\mathbb{R}$ . Donc  $\mathbb{E}_1 \otimes \mathbb{E}_2 = \mathbb{E} \otimes \mathbb{E}^* \otimes \mathbb{E} \otimes \mathbb{E} \otimes \mathbb{E}^*$ .

Le produit tensoriel est donc associatif. Il est important de respecter l'ordre des  $\mathbb{E}$  et  $\mathbb{E}^*$ , car l'abaissement et l'élévation d'indices définis au § 12 transforment un  $\mathbb{E}$  en  $\mathbb{E}^*$  et réciproquement.  $T \in \mathbb{E} \otimes \mathbb{E}^*$  par exemple, devient :  $T \in \mathbb{E} \otimes \mathbb{E}$ . Or ceci doit respecter l'ordre horizontal des indices, car la permutation de deux indices rendus au même niveau peut changer la valeur de la composante. Voir ce qui a été dit au § 12 pour  $F^\alpha_\beta$ ,  $\alpha$  étant à gauche de  $\beta$ . Examinons ce que cela donne pour un tenseur  $T$  obtenu par produit tensoriel d'une forme linéaire  $\psi$  et d'un vecteur  $\vec{v}$ . On sait que ce tenseur est identifiable à une application linéaire  $f$ .

$$\begin{aligned} \psi \otimes \vec{v} (\varphi, \vec{a}) &= \varphi (f(\vec{a})) = \psi(\vec{a}) \vec{v}(\varphi) = \\ &\psi(\vec{a}) \varphi(\vec{v}) = \varphi(\psi(\vec{a}) \vec{v}) \\ \text{ainsi :} \quad f(\vec{a}) &= \psi(\vec{a}) \vec{v} \end{aligned} \quad (5, 46)$$

On peut donc noter :

$$(\psi \otimes \vec{v}) (\vec{a}) = \psi(\vec{a}) \vec{v} \quad (5, 47)$$

L'application linéaire associée au produit tensoriel  $\vec{v} \otimes \psi$  est la même. On aura donc également :

$$(\vec{v} \otimes \psi) (\vec{a}) = \psi(\vec{a}) \vec{v} = \vec{v} \psi(\vec{a}) \quad (5, 48)$$

On peut en effet noter le produit d'un vecteur par un nombre en plaçant ce nombre à droite. On arrive aux notations utilisées en Mécanique quantique :

$$\vec{v} = |\vec{v} \rangle \quad , \quad \psi = \langle \psi | \quad , \quad \vec{v} \otimes \psi = |\vec{v} \rangle \langle \psi | \quad (5, 49)$$

$$\psi(\vec{a}) = \langle \psi | \vec{a} \rangle \quad (\vec{v} \otimes \psi) (\vec{a}) = |\vec{v} \rangle \langle \psi | \vec{a} \rangle \quad (5, 50)$$

$|\vec{v} \rangle \langle \psi | \vec{a} \rangle$  peut s'interpréter comme le produit du vecteur  $|\vec{v} \rangle$  par le nombre  $\langle \psi | \vec{a} \rangle$ , ou comme la valeur prise par l'opérateur  $|\vec{v} \rangle \langle \psi |$  pour le vecteur  $|\vec{a} \rangle$ .  $\langle \psi | \vec{a} \rangle = |\vec{a} \rangle \bullet |\psi \rangle$ , produit scalaire du vecteur  $|\vec{a} \rangle$  par le vecteur  $|\psi \rangle$  canoniquement associé dans un espace muni d'un produit scalaire à la forme

linéaire  $\langle \psi |$ ; ceci par passage des composantes covariantes aux composantes contravariantes : équations (5,43) et (5,44).  $\langle \vec{u} |$  étant la forme linéaire associée à  $|\vec{u}\rangle$  également par changement de variance, l'équation (5,44) s'écrit :

$$|\vec{u}\rangle \bullet |\vec{v}\rangle = \langle \vec{u} | (|\vec{v}\rangle) = \langle \vec{u} | \vec{v}\rangle \quad (5,51)$$

(5,38) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} F(|\vec{u}\rangle, |\vec{v}\rangle) &= |\vec{u}\rangle \bullet F(|\vec{v}\rangle) = \langle \vec{u} | (F(|\vec{v}\rangle)) \\ &= F(\langle \vec{u} |, |\vec{v}\rangle) = \langle \vec{u} | F|\vec{v}\rangle \end{aligned} \quad (5,52)$$

L'avant dernière égalité correspond à (5,26). La notation :  $|\vec{a}\rangle \langle \vec{b}| F|\vec{c}\rangle$  par exemple, peut alors s'interpréter d'une multitude de manières différentes donnant toutes le même résultat. Notons que les formules de la Mécanique quantique sont parfois un peu différentes, du fait que les espaces vectoriels sont sur le corps des complexes  $\mathbb{C}$ .  $\vec{e}_\lambda \otimes e^{*\lambda}$  est l'opérateur projection sur le vecteur  $\vec{e}_\lambda$ . Nous avons la relation de fermeture bien connue en Mécanique quantique :

$$(\delta^\alpha_\beta) = I = \sum_\lambda \vec{e}_\lambda \otimes e^{*\lambda}$$

et

$$(\delta_\beta^\alpha) = \sum_\lambda e^{*\lambda} \otimes \vec{e}_\lambda$$

Identifiant  $(\delta^\alpha_\beta)$  et  $(\delta_\beta^\alpha)$  comme cela a été suggéré lors de la définition du tenseur de Kronecker, on a :

$$(\delta^\alpha_\beta) = (\delta_\beta^\alpha) = \sum_\lambda |\vec{e}_\lambda\rangle \langle \vec{e}_\lambda| \quad (5,53)$$

Il est facile de vérifier que si les composantes d'un tenseur  $T$  sont  $t^i_{jk}$ , alors,  $T$  peut s'écrire :

$$T = t^i_{jk} \vec{e}_i \otimes e^{*j} \otimes e^{*k} \quad (5,54)$$

en effet (5,45) donne :

$$\begin{aligned} T(e^{*i'}, \vec{e}_{j'}, \vec{e}_{k'}) &= (t^i_{jk} \vec{e}_i \otimes e^{*j} \otimes e^{*k}) (e^{*i'}, \vec{e}_{j'}, \vec{e}_{k'}) \\ &= t^i_{jk} \left( \vec{e}_i \otimes e^{*j} \otimes e^{*k} \left( e^{*i'}, \vec{e}_{j'}, \vec{e}_{k'} \right) \right) \\ &= t^i_{jk} \delta^{i'}_i \delta^j_{j'} \delta^k_{k'} = t^{i'}_{j'k'} \end{aligned}$$

Les indices primés sont des indices différents des indices non primés, mais pour les vecteurs de base de la même base. Dans la base choisie,  $T$  a les bonnes composantes pour toutes les valeurs des indices  $i', j', k'$ , cela est donc vrai pour les composantes dans toute base, la loi de transformation étant la bonne.

Reprenons les tenseurs  $T$  et  $U$  de l'équation (5,45) :

$$T \otimes U (e^{*i}, \vec{e}_j, e^{*k}, e^{*l}, \vec{e}_m) = T(e^{*i}, \vec{e}_j) U(e^{*k}, e^{*l}, \vec{e}_m)$$

donc :

$$(T \otimes U)^i_{j \quad m}{}^{kl} = t^i_j U^{kl}_m \quad (5,55)$$

ainsi, le produit tensoriel de deux tenseurs se traduit en ce qui concerne les composantes par leur produit.

En Mécanique quantique, on utilise des produits tensoriels de tenseurs sur des espaces vectoriels différents, tandis qu'ici nous avons toujours utilisé au bout du compte  $\mathbb{E}$  et  $\mathbb{E}^*$  uniquement. Cela ne pose pas de problème réellement nouveau et (5,55) par exemple est encore vraie.

**14. Contraction .** - Lorsque un tenseur possède deux indices, l'un en position contravariante, l'autre en position covariante, on peut sommer par rapport à ces deux indices, et on obtient un nouveau tenseur dit contracté du précédent. Le résultat ne dépend pas de la base choisie pour faire l'opération, et les nouvelles composantes obtenues obéissent bien à la loi de transformation des composantes d'un tenseur. L'ordre du tenseur a été ainsi diminué de deux.

Ainsi, au tenseur  $T^\alpha_\beta$  on peut associer le tenseur d'ordre 0 ou nombre  $T^\alpha_\alpha$  ; on retrouve la *trace* d'une application linéaire qui est ainsi automatiquement invariante.

**15. Règle d'enlèvement d'une variance avec les composantes.** - Nous avons avec (5,54) :

$$T(\varphi, \vec{u}, \vec{a}) = t^i_{jk} \vec{e}_i \otimes e^{*j} \otimes e^{*k}(\varphi, \vec{u}, \vec{a})$$

puis avec (5,29) et (5,45) :

$$= U(\varphi, \vec{u}) = t^i_{jk} \vec{e}_i(\varphi) e^{*j}(\vec{u}) e^{*k}(\vec{a})$$

$$\Rightarrow U = t^i_{jk} e^{*k}(\vec{a}) \vec{e}_i \otimes e^{*j} \quad (5,56)$$

$$U^i_j = t^i_{jk} e^{*k}(\vec{a}) \quad (5,57)$$

$$U^i_j = t^i_{jk} a^k \quad (5,58)$$

On a ce qu'on appelle la *multiplication contractée* par le vecteur  $\vec{a}$  : multiplication tensorielle suivie de la contraction sur les deux indices covariants et contravariants voisins.

$$U = T(\vec{a}) = (T \otimes \vec{a})_{\text{contracté}} \quad (5,59)$$

Le changement de la variance d'une composante d'un tenseur s'interprète d'ailleurs comme le produit contracté avec le tenseur métrique deux fois covariant ou deux fois contravariant. Ainsi par exemple :

$$(v_\alpha) = g((v^\alpha)) = (g \otimes (v^\alpha))_{\text{contracté}}$$

L'existence du tenseur métrique correspond donc à l'existence d'un isomorphisme canonique entre  $\mathbb{E}$  et  $\mathbb{E}^*$

$$\mathbb{E} \xrightarrow{g} \mathbb{E}^*$$

Le tenseur mixte associé à  $g$  réalise l'isomorphisme de  $\mathbb{E}$  sur  $\mathbb{E}$  et est donc évidemment l'application linéaire identité. De même, on avait :

$$T(\vec{a}) = f(\vec{a}) = t^i_j e^{*j}(\vec{a}) \vec{e}_i$$

ce qui revient en fait à utiliser (5,47).

$$\begin{aligned} f(\vec{a}) &= t^i_j a^j \vec{e}_i \\ [f(\vec{a})]^i &= t^i_j a^j \end{aligned} \quad (5,60)$$

Cela prouve que la matrice de l'application linéaire  $f$  est identique au tableau des composantes du tenseur mixte  $T$  auquel elle est associée, avec l'indice contravariant en haut à gauche, indice de ligne, et l'indice covariant en bas à droite, indice de colonne. Cela fait aussi l'accord avec l'identification entre tenseurs mixtes d'ordre 2 et applications linéaires faite, à l'aide des composantes, au § 2. Remarquons qu'on a :

$$[(\vec{v} \otimes \psi)(\vec{a})]^i = (\vec{v} \otimes \psi)^i_j a^j$$

d'après (5,58)

$$= v^i \psi_j a^j \quad \text{avec (5,55)} = [\psi(\vec{a})\vec{v}]^i \quad \text{avec (5,22)}$$

et on a bien (5,47).

**16. Dérivation d'un champ de tenseurs.** - Un *champ de tenseurs* défini dans l'espace à trois dimensions ordinaire est la donnée en chaque point de cet espace d'un tenseur, par ses composantes par exemple. Il va de soi que la variance des tenseurs (nombres d'indices contravariants et covariants) reste la même en chaque point. On supposera toujours que les fonctions composantes définies ainsi dans l'espace ont des dérivées partielles d'ordres aussi grands qu'on veut. D'une manière générale, un champ de tenseurs est la donnée d'une application de  $\mathcal{E}$  dans  $\dots \otimes \mathbb{E} \otimes \dots \otimes \mathbb{E}^* \dots$ ;  $\mathcal{E}$  désignant l'espace affine associé à l'espace vectoriel  $\mathbb{E}$ .

$$M \in \mathcal{E} \xrightarrow{\text{champ de tenseurs}} T(M) \in \dots \otimes \mathbb{E} \otimes \dots \otimes \mathbb{E}^* \dots$$

Prenons ici l'exemple d'un champ de tenseurs deux fois contravariants et une fois covariants ; on peut lui associer un champ de tenseurs deux fois contravariant et deux fois covariant par :

$$(DT)^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} = \frac{\partial T^{\alpha\beta}{}_{\gamma}}{\partial x^{\delta}} \quad (5,61)$$

Il est facile de vérifier qu'on a la bonne loi de transformation pour les composantes.  $DT$  est la *dérivée covariante de  $T$* . Il va de soi que dans (5,61) la dérivée partielle est calculée par rapport à  $x^{\delta}$ , pour l'expression des composantes de  $DT$  dans la base  $\{\vec{e}_{\delta}\}$  associée à ces coordonnées par  $\overrightarrow{OM} = x^{\delta}\vec{e}_{\delta}$ ;  $M$  étant le point courant où est évalué le tenseur  $T$ . Il vient donc :

$$DT = \frac{\partial T^{\alpha\beta}{}_{\gamma}}{\partial x^{\delta}} \vec{e}_{\alpha} \otimes \vec{e}_{\beta} \otimes e^{*\gamma} \otimes e^{*\delta} \quad (5,62)$$

Avec  $\overrightarrow{M_1M_2} = d\vec{M} = dx^{\delta}\vec{e}_{\delta}$ , et compte tenu de (5,30) et (5,58) :

$$\left[ DT(d\vec{M}) \right]_{\gamma}^{\alpha\beta} = \frac{\partial T^{\alpha\beta}{}_{\gamma}}{\partial x^{\delta}} dx^{\delta} = dT^{\alpha\beta}{}_{\gamma} \quad (5,63)$$

Les composantes  $dT^{\alpha\beta}{}_{\gamma}$  sont les composantes du tenseur  $dT$ . On a :

$$\begin{aligned} T(M_2) - T(M_1) &= dT + \vec{\varepsilon} \|\overrightarrow{M_1M_2}\| \\ \vec{\varepsilon} &\longrightarrow \vec{0} \quad \text{quand} \quad \overrightarrow{M_1M_2} \longrightarrow \vec{0} \end{aligned}$$

Lorsque  $d\vec{M}$  est infiniment petit,  $dT$  est donc la variation au premier ordre du tenseur  $T$  pour la translation de vecteur  $d\vec{M}$ ; mais bien sûr dans toutes les équations écrites,  $d\vec{M}$  est quelconque et n'est pas nécessairement "petit".

(5,30) s'écrit dans le cas particulier envisagé ici :

$$dT = DT(d\vec{M}) \quad (5,64)$$

Dans le cas où  $T$  est un vecteur, c'est à dire quand on a affaire à un champ de vecteur,  $DT$  est un tenseur mixte donc une application linéaire. C'est l'application linéaire tangente ou *différentielle* du champ de vecteur. Par abus de langage, on appelle parfois également différentielle la valeur prise pour un accroissement arbitraire  $d\vec{M}$ .

Prenons le cas de l'espace-temps de la Relativité restreinte, la quadrivitesse  $\vec{U}$  est telle que :

$$\vec{U} = \frac{1}{C} \frac{d\overrightarrow{OM}}{d\tau} \quad \text{et} \quad \vec{\Phi} = mC \frac{d\vec{u}}{d\tau}$$

$\overrightarrow{dOM}$  et  $d\vec{U}$  sont des exemples pour la formule (5,64),  $T$  étant un vecteur. La divergence d'un champ de vecteurs est le tenseur d'ordre 0 contracté de la dérivée *covariante* du champ de vecteurs :

$$\text{div } \vec{v} = (D\vec{v})^\alpha{}_\alpha = \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\alpha} \quad (5,65)$$

La divergence est donc la trace de l'application linéaire différentielle du champ de vecteur, d'où son invariance dans un changement de coordonnées.

Dans le cas où  $T$  est un scalaire  $U$  :

$$DU = \frac{\partial U}{\partial x^\delta} e^{*\delta} = \text{grad}^*U \quad (5,66)$$

Le gradient de  $U$  est donc la forme linéaire dérivée covariante du champ de scalaire  $U$ . C'est à dire la différentielle de ce champ de scalaire. Par abus de langage, la valeur prise pour un accroissement arbitraire,  $dU = DU(d\vec{M})$  est également appelée différentielle. Dans le cas où  $U = x^\alpha$ ,  $\alpha^{\text{em}}$  fonction coordonnée, on a :

$$DU = D(x^\alpha) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\delta} e^{*\delta} = e^{*\alpha} = dx^{*\alpha} \quad (5,67)$$

ainsi, la différentielle de la  $\alpha^{\text{ème}}$  fonction coordonnée est la  $\alpha^{\text{ème}}$  forme linéaire de la base duale. Par abus de langage,  $dx^\alpha = dx^{*\alpha}(d\vec{M})$  est également appelée différentielle, cette dernière relation, expression particulière de (5,64), n'étant autre que (5,23), et cela justifie la notation  $dx^{*\alpha}$ .

Dans un espace muni d'un produit scalaire, on peut associer canoniquement un vecteur :  $\overrightarrow{\text{grad}U}$  avec (5,44) par :

$$\forall \vec{a} \quad \overrightarrow{\text{grad}U} \bullet \vec{a} = \text{grad}^*U(\vec{a})$$

$$dU = DU(d\vec{M}) = \text{grad}^*U(d\vec{M}) \quad (5,68)$$

$$\text{donc :} \quad dU = \overrightarrow{\text{grad}U} \bullet d\vec{M} \quad (5,69)$$

$$\left(\overrightarrow{\text{grad}U}\right)^\alpha = g^{\alpha\beta} (\text{grad}^*U)_\beta = g^{\alpha\beta} \frac{\partial U}{\partial x^\beta} \quad (5,70)$$

Les composantes covariantes du vecteur  $\overrightarrow{OM}$ , qu'on peut appeler les *coordonnées covariantes de M* sont obtenues par :

$$x_\alpha = g_{\alpha\beta} x^\beta \quad (5,71)$$

Notons que les composantes covariantes d'un vecteur sont les produits scalaires de ce vecteur avec les vecteurs de base. (5,21) et (5,44) donnent en effet :

$$v_\alpha = \vec{v}(\vec{e}_\alpha) = \vec{v} \bullet \vec{e}_\alpha = v^\beta \vec{e}_\beta \bullet \vec{e}_\alpha = v^\beta g_{\alpha\beta}$$

$$x^\beta = g^{\alpha\beta} x_\alpha \quad (5,72)$$

On a  $\forall U$  :

$$\frac{\partial U}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial U}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial U}{\partial x^\beta} g^{\alpha\beta} \quad (5,73)$$

ainsi :

$$\left( \overrightarrow{\text{grad}U} \right)^\alpha = \frac{\partial U}{\partial x_\alpha} \quad (5,74)$$

D'autre part on a, par (5,73), la relation entre opérateurs de dérivation :

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} = g^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \quad (5,75)$$

**17. Electromagnétisme relativiste.** - Il est facile de voir que les deux équations :

$$\mathbf{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \mathit{div}\mathbf{B} = 0$$

sont équivalentes à :

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial F_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta} = 0 \quad (5,76)$$

tandis que :

$$\mathit{div}\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{et} \quad \mathbf{rot}\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

sont équivalentes à :

$$\frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = -\mu_0 j^\alpha \quad (5,77)$$

avec :

$$j^\alpha = \begin{pmatrix} \rho C \\ \mathbf{j} \end{pmatrix} \quad (5,78)$$

L'équation (5,77) étant vraie dans tout repère,  $j^\alpha$  est nécessairement un quadri-vecteur (voir §3 critère de tensorialité). L'équation (5,76) implique qu'il existe un quadri-vecteur  $\vec{A}$  tel que :

$$F_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} \quad (5,79)$$

(5,79) avec (5,3) et avec

$$\mathbf{B} = \mathbf{rot}\mathbf{A} \quad \text{et} \quad \mathbf{E} = -\mathbf{grad}V - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \quad (5,80)$$

impliquent alors que :

$$A^\alpha = \begin{pmatrix} V \\ \frac{C}{\mathbf{A}} \end{pmatrix} \quad (5,81)$$

$V$  et  $\mathbf{A}$  sont les potentiels scalaires et vecteurs de l'électromagnétisme classique ; et les équations (5,80) sont résumées dans (5,79).

Supposons que nous soyons en présence d'un seul type de charges toutes animées de la même vitesse localement autour du point d'espace-temps considéré. Appelons  $\rho_0$  la densité volumique de charge correspondante dans le référentiel  $\mathcal{R}^0$  où les particules sont au repos. Appelons  $n_0$  le nombre de particules par unité de volume dans ce référentiel. Supposons que les particules aient toutes la même charge  $q$  :  $\rho_0 = n_0q$

$$j^0 = \rho C = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}} C$$

Le dénominateur provient de la contraction des longueurs. On voit que :

$$j^0 = \rho_0 C U^0 = n_0 q C U^0$$

$$j^i = \rho v^i = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}} v^i = \rho_0 C U^i = n_0 q C U^i$$

Ainsi :

$$\vec{j} = \rho_0 C \vec{U} = n_0 q C \vec{U} \quad (5, 82)$$

La conservation de la charge électrique s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad ; \quad \text{qui donne} \quad \frac{\partial j^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0 \quad (5, 83)$$

La conservation de la charge électrique s'exprime ainsi par la nullité de la divergence du quadrivecteur courant.

Les équations de l'électromagnétisme ont ainsi toutes été mises sous forme quadridimensionnelle. Elles forment ce qu'on appelle *l'Electromagnétisme relativiste*.

**18. Effets magnétiques des courants électriques et relativité.** - Pour montrer la nécessité de la Relativité restreinte, nous avons montré qu'il y a contradiction entre l'interaction électromagnétique dans son ensemble (électrostatique et magnétisme) et la Mécanique newtonienne. Nous allons maintenant renverser l'argument et montrer que la connaissance de la seule interaction électrostatique, alliée à la Relativité restreinte, implique l'existence d'effets magnétiques liés à la présence de charges en mouvement. Ce nouveau point de vue est intéressant, car il sera repris en Relativité générale pour découvrir la structure de l'interaction gravitationnelle à partir de la seule loi connue de la Gravitation universelle de Newton. Cette loi est la partie "électrostatique" de l'interaction gravitationnelle totale qui sera ainsi découverte.

Pour ce faire, nous allons considérer une expérience de pensée inspirée de l'expérience des deux barres, mais un peu différente. Considérons deux barres (1) et (2), de densités volumiques de charges  $\rho_1$  et  $\rho_2$  dans les référentiels où elles sont immobiles. La barre (1) est immobile dans  $\mathcal{R}$ , et la barre (2) est immobile dans  $\bar{\mathcal{R}}$ . Supposons enfin que :

$$\rho_1 = \frac{\rho_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (5,84)$$

Si seule l'interaction électrostatique est prise en compte, dans  $\mathcal{R}$  les deux barres ont la même action électrique sur une particule chargée. L'augmentation de la densité volumique de charge pour la barre (2) due à la contraction des longueurs et l'égalité (5,84) impliquent en effet ce résultat.

Cependant, dans  $\bar{\mathcal{R}}$ , la barre (2) est immobile et la barre (1) est animée de la vitesse  $v$  vers la gauche. Les densités volumiques de charges vues dans ce repère sont donc  $\rho_2$  et  $\frac{\rho_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ , deux densités différentes. Les deux barres qui avaient la même action dans  $\mathcal{R}$ , n'ont pas la même action dans  $\bar{\mathcal{R}}$ , ce qui est impossible. Pour lever la contradiction, il faut supposer qu'il y a une action électrique liée à la vitesse des barres qui compense l'effet précédent. C'est en effet la vitesse des barres qui change d'un référentiel à l'autre. Il doit donc y avoir un effet magnétique lié au mouvement des charges. Dans le paragraphe suivant nous allons reprendre cet argument sous une forme mathématique de façon à prouver que la source du champ électromagnétique est le quadrivecteur courant complet.

**19. Ce qui intervient : le quadrivecteur courant.** - Dans ce paragraphe, nous ne supposons plus connu le fait que la source de l'interaction électromagnétique est le quadrivecteur  $j^\alpha$  (résultat du § 17, équation (5,77)). Nous allons au contraire le retrouver en essayant d'allier l'interaction électromagnétique seule avec la relativité. Un raisonnement analogue sera repris pour la gravitation. Si la densité de charge est  $\rho_0$  dans le référentiel  $\mathcal{R}^0$  où l'objet chargé est au repos, elle vaut  $\frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$  dans un référentiel où il est animé de la vitesse  $v$ . Définissons le quadrivecteur courant par  $j^\alpha = \rho_0 C U^\alpha$ ; on s'aperçoit que la densité de charge est égale à la composante temporelle  $\frac{j^0}{C}$  car  $U^0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ . Pour un ensemble de charges en mouvement avec des vitesses différentes, définissons  $j^\alpha$  comme la somme des différents quadrivecteurs courants des différentes charges;  $j^\alpha$  est encore un quadrivecteur, chaque terme de la somme se transformant de la même manière dans un changement de référentiel. La densité de charge globale, dans un référentiel, à l'origine de l'interaction électrostatique, sera encore égale à  $\frac{j^0}{C}$ , composante temporelle de  $\frac{j^\alpha}{C}$  dans ce référentiel.

Considérons maintenant pour cet ensemble de charges le passage de  $\bar{\mathcal{R}}$  à  $\mathcal{R}$  ; on a :

$$j_{\mathcal{R}}^0 = j_{\bar{\mathcal{R}}}^0 \cosh \varphi + j_{\bar{\mathcal{R}}}^1 \sinh \varphi \quad (5, 85)$$

$$V = \tanh \varphi$$

(il n'y a pas de confusion possible entre la vitesse et le potentiel) est la vitesse de  $\bar{\mathcal{R}}$  par rapport à  $\mathcal{R}$  et n'a rien à voir avec les différentes vitesses des particules chargées considérées. On voit donc que l'action électrostatique vue de  $\mathcal{R}$  liée à  $j_{\mathcal{R}}^0$  fait intervenir l'action électrostatique vue de  $\bar{\mathcal{R}}$  (modifiée par  $\cosh \varphi$ ) et une partie  $j_{\bar{\mathcal{R}}}^1$  liée directement à la vitesse des charges dans  $\bar{\mathcal{R}}$ . Modifier  $j_{\bar{\mathcal{R}}}^1$  en laissant constant  $j_{\bar{\mathcal{R}}}^0$  modifie  $j_{\mathcal{R}}^0$  donc modifie l'interaction électromagnétique dans  $\mathcal{R}$ , donc a priori dans tout repère. Ainsi  $j_{\bar{\mathcal{R}}}^1$  doit avoir un effet dans  $\bar{\mathcal{R}}$ . C'est l'effet magnétique des charges en mouvement.

**20. Invariance de jauge de l'électromagnétisme.** Soit  $\chi(x^0, x^1, x^2, x^3)$  une fonction quelconque des coordonnées d'espace-temps. Posons :

$$A'_\alpha = A_\alpha + \frac{\partial \chi}{\partial x^\alpha} \quad (5, 86)$$

$$\frac{\partial A'_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A'_\alpha}{\partial x^\beta} = F_{\alpha\beta} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} = F_{\alpha\beta} \quad (5, 87)$$

Ainsi, le quadrivecteur potentiel  $A_\alpha$  n'est pas unique. Tout quadrivecteur qui s'en déduit par la formule (5,86) avec  $\chi$  quelconque convient également. La possibilité de faire les calculs en électromagnétisme avec différents quadrivecteurs potentiels s'appelle *l'invariance de jauge* de l'électromagnétisme. Le choix d'un quadrivecteur potentiel précis s'appelle le choix d'une jauge. Cette propriété d'invariance de jauge qui se retrouve pour toutes les interactions est fondamentale et est à la base des théories modernes des interactions appelées théories de jauge.

**21. Création du quadrivecteur potentiel par le quadrivecteur courant.** - Nous allons mettre cette dernière équation sous forme relativiste. Elle correspond aux équations classiques de l'électrostatique et de la magnétostatique :

$$\nabla^2 V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \quad \text{et} \quad \nabla^2 \mathbf{A} + \mu_0 \mathbf{j} = 0 \quad (5, 88)$$

En coordonnées galiléennes types,  $g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta}$  et (5,75) donne :

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \quad (5, 89)$$

On a :

$$\frac{\partial}{\partial x_0} = \frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x_i} = -\frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (5, 90)$$

(5,79) s'écrit alors :

$$F^{\alpha\beta} = \frac{\partial A^\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial A^\alpha}{\partial x_\beta} \quad (5,91)$$

et (5,77) donne :

$$\frac{\partial^2 A^\beta}{\partial x_\alpha \partial x^\beta} - \frac{\partial^2 A^\alpha}{\partial x_\beta \partial x^\beta} = -\mu_0 j^\alpha \quad (5,92)$$

Posons :

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\beta \partial x^\beta} = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \square \quad (5,93)$$

L'opérateur  $\square$  s'appelle le *d'alembertien*.

$$\square = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \quad (5,94)$$

L'équation (5,86) donne :

$$\frac{\partial A^\beta}{\partial x^\beta} = \frac{\partial A'^\beta}{\partial x^\beta} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_\beta \partial x^\beta} = \frac{\partial A'^\beta}{\partial x^\beta} - \square \chi \quad (5,95)$$

L'équation :

$$\square \chi = f(x, y, z, t) = \frac{\partial A'^\beta}{\partial x^\beta}$$

a une solution pour toute fonction  $f$  suffisamment régulière, et nous pouvons donc choisir  $\vec{A}$  de façon à avoir :

$$\frac{\partial A^\beta}{\partial x^\beta} = 0 \quad (5,96)$$

C'est la *jauge de LORENTZ*. (5,92) donne alors :

$$\frac{\partial^2 A^\alpha}{\partial x_\beta \partial x^\beta} = \mu_0 j^\alpha$$

soit :

$$\square \vec{A} = \mu_0 \vec{j} \quad (5,97)$$

en posant :

$$\square \vec{A} = \begin{pmatrix} | \\ \square A^\alpha \\ | \end{pmatrix}$$

L'équation (5,97) exprime la création du champ, décrit par le quadrivecteur potentiel, par le mouvement des charges, décrit par le quadrivecteur courant. Elle est à la base de la quantification du champ électromagnétique en Electrodynamique quantique. On accorde en effet maintenant une réalité physique au quadrivecteur  $\vec{A}$ , bien que sa valeur dépende de la jauge (expérience d'interférence d'électrons d'Aharonov).

## EXERCICES

### 5.1

Vérifiez que  $\varphi_{\bar{\alpha}} = \Lambda^{\alpha}_{\bar{\alpha}} \varphi_{\alpha}$ .

### 5.2

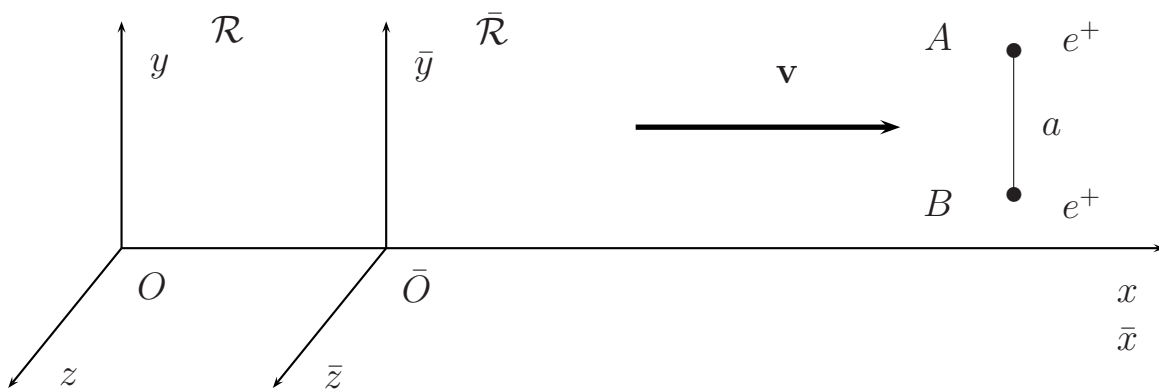
Vérifiez que (5,25) est compatible avec (5,35).

### 5.3

Vérifiez que l'on a la bonne loi de transformation des composantes pour  $F_{\alpha\beta}$  à partir de (5,37).

### 5.4

Cet exercice a pour but d'étudier l'interaction électrique entre deux positrons  $A$  et  $B$  (charge  $+e$ ) animés d'un mouvement rectiligne uniforme de vitesse  $\mathbf{v}$  (dans le référentiel  $\mathcal{R}$ ), perpendiculaire à la droite les joignant (droite parallèle aux axes  $\mathbf{y}$  et  $\bar{\mathbf{y}}$ ), séparés par une distance constante  $a$ . Les positrons sont immobiles dans  $\bar{\mathcal{R}}$ .



**1.** Calculez la force de répulsion électrostatique subie par le positron  $A$  dans le référentiel  $\bar{\mathcal{R}}$ .

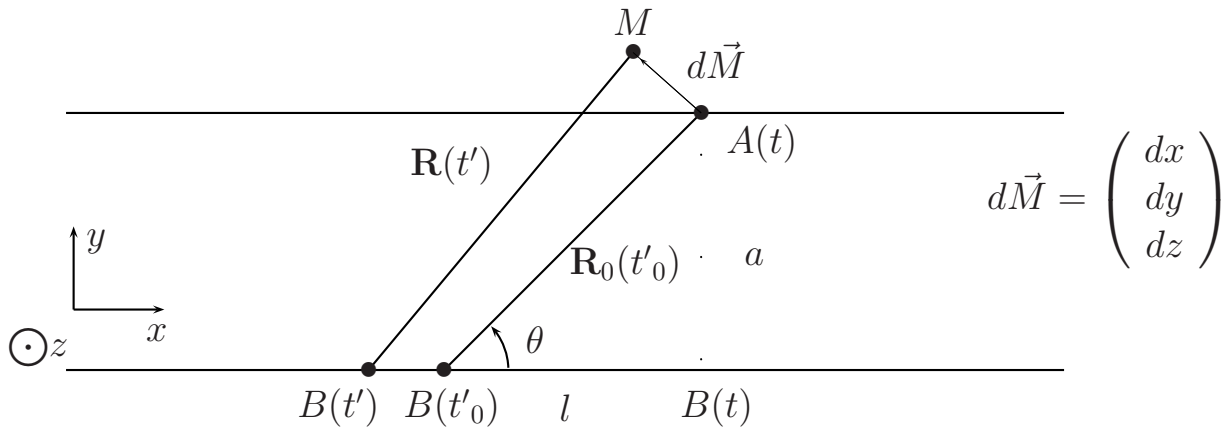
**2.** En déduire, par la formule de transformation des forces, la force subie par le positron  $A$ , vue dans  $\mathcal{R}$ .

3. Interprétez cette force en terme de photons virtuels.

4. On demande de calculer dans  $\mathcal{R}$ , les potentiels créés par  $B$  et vus en  $A$ . Pour cela, on rappelle la formule des potentiels de LIENARD et WIECHERT :

$$\phi(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{R(t') - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}(t')}{c}}$$

$$\mathbf{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e\mathbf{v}}{R(t') - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}(t')}{c}}$$



$\mathbf{R}$  est le vecteur mené du point où se trouve la charge créant les potentiels et allant au point d'observation variable  $M$ . Les quantités sont prises à l'instant  $t'$  tel que :

$$t' + \frac{R(t')}{c} = t$$

5. Dédurre des potentiels, les champs en  $A$ , créés par  $B$ .

6. Dédurre de la question 5, la force subie par  $A$  dans  $\mathcal{R}$ .

7. Dédurre, grâce au formalisme du tenseur électromagnétique, les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  dans  $\mathcal{R}$ , à partir de leur valeur dans  $\bar{\mathcal{R}}$ ; conclusion ?