Chapitre Dix

ANALYSE TENSORIELLE DANS UN ESPACE AFFINE MUNI D'UN PRODUIT SCALAIRE

1. Le tenseur métrique. - La donnée nouvelle est l'existence du tenseur métrique g tel que : $g(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$, produit scalaire des vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ (§ 5 , chapitre 5).

Notons déjà que toutes les propriétés trouvées au chapitre 5 concernant le tenseur métrique et ne faisant pas intervenir les coordonnées curvilignes sont bien entendu vraies. Il en est ainsi de (5,41) par exemple.

Nous avons alors un élément linéaire ds^2 par:

$$ds^2 = g(d\vec{M}, d\vec{M}) = d\vec{M} \bullet d\vec{M} \tag{10,1}$$

En coordonnées curvilignes quelconques :

$$ds^2 = \left(\frac{\partial}{\partial u^i} du^i\right) \bullet \left(\frac{\partial}{\partial u^j} du^j\right) = \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \bullet \frac{\partial}{\partial u^j}\right) du^i du^j$$

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j \tag{10,2}$$

Réciproquement, la donnée de l'élément linéaire (10,2) muni l'espace d'un produit scalaire, donc d'un tenseur métrique par :

$$g(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = g_{ij} a^i b^j \tag{10,3}$$

a^i et b^j étant les composantes des vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ dans la base mobile associée aux coordonnées curvilignes u^i.

Lorsque $ds^2 > 0$ on a un espace euclidien; c'est le cas de l'espace à trois dimensions. Lorsque le signe du ds^2 est quelconque, on dit qu'on a affaire à un espace pseudo-euclidien. C'est le cas de l'espace-temps de la Relativité restreinte; et ce que nous venons de dire généralise ce qui a été vu au § 9 du chapitre 3.

Ce tenseur g est une donnée sur l'espace vectoriel $\mathbb{E}$. On peut considérer que nous avons un champ de tenseurs sur l'espace $\mathcal{E}$, mais c'est alors, bien évidemment un champ constant, le même en tout point : $g(M) = g$. On en déduit $Dg = 0; dg = 0$ donc : $g_{ij;h} = 0$, soit :

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^h} - g_{im}\Gamma^m{}_{jh} - g_{mj}\Gamma^m{}_{ih} = 0 \tag{10,4}$$

Les symboles de CHRISTOFFEL seront par la suite indifféremment notés :

$$\Gamma^i{}_{jk} \qquad \text{ou} \qquad \Gamma^i_{j\,k}$$

Ce sont les identités de RICCI. On peut obtenir ces identités directement, en effet :

$$\begin{gathered} g_{ij} = \mathbf{e}_i \bullet \mathbf{e}_j \quad \Rightarrow \quad dg_{ij} = d\mathbf{e}_i \bullet \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i \bullet d\mathbf{e}_j \\ = \Gamma^m{}_{ih}\mathbf{e}_m du^h \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i \Gamma^m{}_{jh}\mathbf{e}_m du^h \quad \text{avec :} \\ g_{mj} = \mathbf{e}_m \bullet \mathbf{e}_j \quad \text{et} \quad g_{im} = \mathbf{e}_i \bullet \mathbf{e}_m \end{gathered}$$

En coordonnées rectilignes correspondant à une base fixe de l'espace vectoriel, $g_{ij} = Cte$. Dans une telle base fixe, (9,13) implique que tous les symboles de CHRISTOFFEL sont nuls. (10,4) est alors bien vérifiée.

Lorsque, pour $i \neq j$ $g_{ij} = 0$ et $g_{ii} = \pm 1$, on a la *forme réduite* du tenseur métrique, et il existe toujours des bases permettant d'obtenir cette forme réduite.

On peut montrer que le nombre de $+1$ et de -1 de la forme réduite du tenseur métrique ne dépend pas du repère choisi pour obtenir cette forme réduite et est une caractéristique du tenseur métrique (Théorème d'inertie de SYLVESTER). On l'appelle la *signature du tenseur métrique.* Ainsi, pour l'espace-temps de la Relativité restreinte, et avec notre convention du signe du ds^2 , la signature est $(+1, -1, -1, -1)$. On dit qu'on a une base orthonormée s'il n'y a que des $+1$, une base *type* dans le cas contraire. Les bases types sont la généralisation aux espaces pseudo-euclidiens des bases orthonormées des espaces euclidiens. Le choix d'une origine donne un repère orthonormé ou repère type suivant le cas. Les coordonnées correspondantes sont appelées coordonnées cartésiennes (ou rectilignes) types (ou orthonormées). Tout ceci ne fait que généraliser le vocabulaire introduit par (3,29) et le § 10 , du chapitre 3. Les coordonnées x^α utilisées au chapitre 3 sont des coordonnées rectilignes types; appelées dans le cas de la Relativité restreinte : coordonnées galiléennes types.

2. Calcul des symboles de Christoffel à partir du tenseur métrique. - Les identités de RICCI permettent en effet ce calcul. Opérons une permutation circulaire sur i, j, k :

$$\begin{cases} \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} &= g_{ih}\Gamma^h{}_{jk} &+ g_{hj}\Gamma^h{}_{ik} \\ \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} &= g_{jh}\Gamma^h{}_{ki} &+ g_{hk}\Gamma^h{}_{ji} \\ \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} &= g_{kh}\Gamma^h{}_{ij} &+ g_{hi}\Gamma^h{}_{kj} \end{cases}$$

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = 2g_{hk}\Gamma^h{}_{ij}$$

$$g^{lk}g_{kh} = \delta^l{}_h$$

$$g^{kl}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\right) = 2\Gamma^l{}_{ij}$$

$$\text{enfin} \quad l \to i; i \to j; j \to k; k \to h$$

$$\Gamma^i{}_{jk} = \frac{1}{2}g^{ih}\left(\frac{\partial g_{hk}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jh}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^h}\right) \qquad (10,5)$$

Ainsi, on peut calculer directement les symboles de Christoffel à partir du tenseur métrique, c'est à dire également directement à partir de l'expression de l'élément linéaire (10,2); sans utiliser les coordonnées cartésiennes liées à l'espace vectoriel "fixe" sur lequel est construit l'espace affine. Ce fait étend les résultats du § 5 , chapitre 9 résumés dans le dernier alinéa de ce paragraphe 5. Il représente une généralisation considérable de ces résultats, et permettra d'étendre ce calcul des symboles de Christoffel aux variétés différentiables pour lesquelles il n'existe pas d'espace vectoriel fixe global.

3. Exemple : calcul des symboles de Christoffel en coordonnées polaires du plan. - Nous effectuons ce calcul pour un coefficient particulier.

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 \quad \Rightarrow \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma^r{}_{\theta\theta} = \frac{1}{2}g^{rr}\left(0 + 0 - \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r}\right)$$

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = -\frac{1}{2}g^{rr}\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} = -r$$

Résultat déjà trouvé précédemment.

4. Les équations de Lagrange. - Nous allons dans le paragraphe suivant montrer que les droites, qui sont les chemins de direction constante, sont également les chemins de longueur minimale entre deux points, ceci dans un espace euclidien. Dans un espace pseudo-euclidien, il s'agit simplement des chemins d'intervalle stationnaire. Mais pour ce faire nous aurons besoin des équations de Lagrange que nous démontrons donc dans ce paragraphe.

On considère un chemin paramétré par la variable λ, on a donc : $M(\lambda)$, le point M est déterminé par la valeur du paramètre. Dans la suite, un point au dessus d'un symbole signifie que l'on a affaire à la dérivée de la fonction désignée par le symbole.

On considère l'intégrale suivante calculée le long du chemin :

$$S = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} L\,\left(u^i(\lambda), \dot{u}^i(\lambda), \lambda\right)\,d\lambda \tag{10,6}$$

Nous reprenons ici les notations utilisées en mécanique classique où S est appelée *l'action* et L le *lagrangien*; dans ce cas λ est le temps t, ce qui n'est pas le cas ici.

Nous cherchons quel est le chemin $u^i(\lambda)$ joignant deux points donnés qui rend stationnaire S. Considérons donc un chemin voisin se déduisant du chemin considéré par les variations $\delta u^i(\lambda)$ des fonctions $u^i(\lambda)$. Tous les chemins considérés ont les deux mêmes extrémités $M_1 = M(\lambda_1)$ et $M_2 = M(\lambda_2)$; de telle sorte que $\delta u^i(\lambda_1) = \delta u^i(\lambda_2) = 0$. Nous devons avoir $\delta S = 0$.

$$\delta S = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left(\frac{\partial L}{\partial u^i}\,\delta u^i(\lambda) + \frac{\partial L}{\partial \dot{u}^i}\,\delta \dot{u}^i(\lambda)\right) d\lambda$$

$$\delta \dot{u}^i(\lambda) = \delta\left(\frac{du^i}{d\lambda}\right) = \frac{d}{d\lambda}\left(\delta u^i\right)$$

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}^i}\,\frac{d}{d\lambda}\left(\delta u^i\right)\,d\lambda = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}^i}\delta u^i\right)_{\lambda_1}^{\lambda_2} - \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \delta u^i \frac{d}{d\lambda}\frac{\partial L}{\partial \dot{u}^i}\,d\lambda$$

Les variations δu^i étant nulles aux deux extrémités, le premier terme du second membre disparaît. Il vient :

$$\delta S = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left(\frac{\partial L}{\partial u^i} - \frac{d}{d\lambda}\frac{\partial L}{\partial \dot{u}^i}\right)\delta u^i d\lambda = 0 \;;\; \forall\, \delta u^i(\lambda)$$

$$\Rightarrow\ \forall\, i:\quad \frac{d}{d\lambda}\frac{\partial L}{\partial \dot{u}^i} - \frac{\partial L}{\partial u^i} = 0 \tag{10,7}$$

Ce sont les *équations de Lagrange* du problème considéré.

5. Les droites, comme chemins d'intervalle stationnaire. - Nous allons montrer que dans un espace affine muni d'un élément linéaire strictement positif, c'est à dire dans un espace euclidien, les droites sont les chemins de longueur stationnaire. Nous montrerons ensuite qu'il s'agit d'un minimum; puis nous envisagerons le cas de l'espace pseudo-euclidien de la Relativité restreinte.

La longueur du chemin vaut : $S = \int_{M_1}^{M_2} \sqrt{ds^2}$

$$S = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} L\, d\lambda \quad ; \quad \text{avec} \quad L = \left(g_{kl} \frac{du^k}{d\lambda} \frac{du^l}{d\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{10,8}$$

Pour S stationnaire, les équations de Lagrange donnent :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{u}^i} = \frac{1}{L} g_{ik} \dot{u}^k \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial u^i} = \frac{1}{2L} g_{kl,i} \dot{u}^k \dot{u}^l$$

$$\text{avec :} \quad g_{kl,i} = \frac{\partial g_{kl}}{\partial u^i} \quad ; \quad \text{posons :} \quad ds = L d\lambda$$

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{L} g_{ik} L \frac{du^k}{ds} \right) - \frac{1}{2L} L L g_{kl,i} \frac{du^k}{ds} \frac{du^l}{ds} = 0$$

$$\frac{d\, g_{ik}}{d\lambda} \frac{du^k}{ds} + g_{ik} \frac{d}{d\lambda} \frac{du^k}{ds} - \frac{L}{2} g_{kl,i} \frac{du^k}{ds} \frac{du^l}{ds} = 0$$

$$\frac{dg_{ik}}{d\lambda} = \frac{dg_{ik}}{ds} L = g_{ik,l} \frac{du^l}{ds} L$$

$$L g_{ik,l} \frac{du^l}{ds} \frac{du^k}{ds} + g_{ik} L \frac{d^2 u^k}{ds^2} - \frac{L}{2} g_{kl,i} \frac{du^k}{ds} \frac{du^l}{ds} = 0$$

L ne s'annulle jamais, l'élément linéaire étant strictement positif; et on peut donc diviser par L.

Dans le premier terme, on peut échanger l et k qui sont des indices muets, puis permuter i et l, le tenseur métrique étant symétrique; $g_{ik,l}$ devient $g_{li,k}$; $\frac{du^l}{ds} \frac{du^k}{ds}$ ne change pas dans cette manipulation. Il vient :

$$g_{ik} \frac{d^2 u^k}{ds^2} + \frac{1}{2} \left(g_{ik,l} + g_{li,k} - g_{kl,i} \right) \frac{du^k}{ds} \frac{du^l}{ds} = 0$$

$$g^{hi} g_{ik} \frac{d^2 u^k}{ds^2} + \frac{1}{2} g^{hi} \left(g_{ki,l} + g_{il,k} - g_{kl,i} \right) \frac{du^k}{ds} \frac{du^l}{ds} = 0$$

Nous retrouvons bien (9,39) :

$$\frac{d^2 u^h}{ds^2} + \Gamma^h_{kl} \frac{du^k}{ds} \frac{du^l}{ds} = 0 \tag{10,9}$$

6. Les droites sont les chemins de longueur minimale dans un espace euclidien. - Nous pouvons prendre l'axe des x parallèle à la droite $M_1 M_2$ et x comme paramètre pour tout chemin voisin de la droite $M_1 M_2$. Posant $\dot{y} = \frac{dy}{dx}$ et $\dot{z} = \frac{dz}{dx}$, il vient :

$$S = \int_{M_1}^{M_2} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} > \int_{x_1}^{x_2} dx$$

Ainsi : $S > x_2 - x_1 = S_{\text{droite}}$.

7. Cas de l'espace pseudo-euclidien de la Relativité restreinte pour des intervalles du genre temps. - Considérons un chemin dans l'espace-temps reliant les évènements $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ tel qu'à aucun moment la vitesse de la lumière ne soit atteinte. L ne s'annule donc jamais. Pour avoir une quantité positive sous la racine carrée, il faut prendre :

$$ds^2 = C^2 d\tau^2 = C^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 > 0$$

S est égale à la durée totale du voyage pour aller de l'évènement $\mathcal{M}_1$ à $\mathcal{M}_2$, indiquée par une horloge solidaire du mobile au facteur C, vitesse de la lumière près :

En effet, il existe un référentiel galiléen $\bar{\mathcal{R}}$ dans lequel l'objet est immobile pendant la courte durée dt, près d'un évènement quelconque du chemin. Dans ce référentiel les horloges indiquent une durée écoulée égale à $d\tau$ puisqu'on y calcule (voir § 6 , chapitre 3 et (4,6)); rappelons que nous supposons que l'état d'accélération n'a pas d'influence sur l'écoulement <u>local</u> du temps) :

$$ds^2 = C^2 d\tau^2 = C^2 d\bar{t}^2 - 0 - 0 - 0 \quad \Rightarrow \quad d\tau = d\bar{t}$$

$d\bar{x} = d\bar{y} = d\bar{z} = 0$, l'objet étant immobile, $d\tau$ est donc la durée séparant les deux évènements infiniment voisins indiquée par une horloge solidaire du mobile. Ceci se reproduisant à chaque instant, il en résulte que :

$$S = C \int_{\mathcal{M}_1}^{\mathcal{M}_2} d\tau = C(\tau_2 - \tau_1) \qquad (10,10)$$

Nous allons montrer maintenant que S est maximale pour le chemin correspondant à la droite de l'espace-temps reliant $\mathcal{M}_1$ à $\mathcal{M}_2$.

Les deux évènements $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ étant séparés par un intervalle du genre temps, il existe un référentiel galiléen dans lequel ces deux évènements ont lieu au même endroit. Mesurons donc les coordonnées d'espace et de temps dans ce référentiel. Pour une droite d'espace-temps, les coordonnées du point courant sont des fonctions linéaires d'un paramètre λ dans un référentiel galiléen. Ce ne serait pas le cas dans un référentiel non galiléen. λ variant de 0 en $\mathcal{M}_1$ à 1 en $\mathcal{M}_2$, on a :

$$x^0 = Ct = \lambda C\left(t_{\mathcal{M}_2} - t_{\mathcal{M}_1}\right) + Ct_{\mathcal{M}_1}$$
$$x^i = \lambda\left(x^i_{\mathcal{M}_2} - x^i_{\mathcal{M}_1}\right) + x^i_{\mathcal{M}_1} = x^i_{\mathcal{M}_1} = Cte \ ; \quad i = 1, 2, 3$$
$$\text{On a donc :} \qquad dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0$$
$$S_{\text{droite}} = \int_{\mathcal{M}_1}^{\mathcal{M}_2} C dt = C\left(t_{\mathcal{M}_2} - t_{\mathcal{M}_1}\right) \qquad (10,11)$$

L'objet est donc constamment immobile dans le référentiel considéré pour la ligne droite d'espace temps. Prenons un chemin différent de la ligne droite; on peut paramétrer ce chemin par le temps t du référentiel précédent, on a : $x(t), y(t), z(t)$.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{C^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} = \int_{t_1}^{t_2} C\, dt \sqrt{1 - \sum_i \left(\frac{1}{C}\frac{dx^i}{dt}\right)^2}$$

$$S < \int_{t_1}^{t_2} C\, dt = S_{\text{droite}}$$

Ainsi la ligne droite d'espace-temps, qui correspond à un objet constamment immobile dans un référentiel galiléen, donc à un objet non accéléré, correspond au chemin de temps maximal indiqué par une horloge solidaire de l'objet.

On en déduit le fameux paradoxe des jumeaux de Langevin : un des deux jumeaux reste immobile tandis que l'autre fait un aller et retour avec une fusée, donc en suivant un chemin d'espace-temps qui n'est pas une ligne droite. Ce dernier a moins vieilli que le jumeau immobile lorsqu'ils se retrouvent. Ceci d'autant plus qu'il s'est approché de la vitesse de la lumière, car à la limite pour un aller et retour à la vitesse de la lumière :

$$1 - \frac{\sum_i \left(\dot{x}^i\right)^2}{C^2} = 0 \quad ; \quad \text{et} \quad S = 0 = C\left(\tau_2 - \tau_1\right)$$

En ce sens un photon ne vieillit pas, son temps propre ne s'écoule pas, il est partout en même temps au sens de son temps à lui. Ainsi, s'il faut par exemple 200 000 ans pour faire l'aller et retour de notre galaxie vu de la Terre, pour le voyageur, s'il peut subir d'énormes accélérations, il peut faire ce voyage en un temps aussi petit qu'il veut (voir exercice 4.5).

8. Cas des intervalles du genre espace. - Dans ce cas, nous devons prendre : $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - C^2 dt^2$, de façon à pouvoir calculer $\sqrt{ds^2}$. On a encore $L \neq 0$, et la démonstration du § 5 fonctionne.

Deux évènements séparés par un intervalle du genre espace se produisent simultanément dans un certain référentiel galiléen. Raisonnons dans ce référentiel. La ligne droite d'espace-temps joignant les deux évènements est, dans le référentiel précédent la ligne droite de l'espace à trois dimensions constituée d'évènements simultanés. Or de tous les chemins à temps constants de l'espace à trois dimensions, la ligne droite minimise S, qu'on appelle alors $S_{\substack{\text{droite}\\ \text{simultanées}}}$.

On peut en effet paramétrer les chemins par la coordonnée x par exemple. L'axe des x est choisi de façon à ce que $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ se produisent aux points d'espace M_1 et M_2 tels que M_1M_2 soit parallèle à l'axe des x. Si x est monotone le long des chemins, on a alors :

$$S = \int_{M_1}^{M_2} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2 - C^2 dt^2} = \int_{x_1}^{x_2} dx\,\sqrt{1 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

On est ramené au cas du § 6 et S est minimale pour la ligne droite de l'espace à trois dimensions.

Cependant, un chemin en ligne droite dans l'espace à trois dimensions et constitué d'évènements non simultanés rend S encore plus petite; en effet :

$$S = \int_{x_1}^{x_2} dx\,\sqrt{1 - C^2 dt^2} < \int_{x_1}^{x_2} dx = S_{\substack{\mathrm{d}\\ \mathrm{s}}}$$

Dans ce cas, la ligne droite de l'espace-temps qui rend S stationnaire n'est ni un maximum, ni un minimum! Cela est équivalent à une fonction de deux variables par exemple qui est stationnaire, sans être ni maximale, ni minimale, la surface $z = f(x, y)$ ayant la forme d'une selle de cheval ou d'un col en montagne.

9. Cas des intervalles du genre lumière. - Pour deux évènements séparés par des intervalles du genre lumière, tout chemin voisin peut avoir des parties avec $dx^2 + dy^2 + dz^2 - C^2 dt^2 > 0$, et d'autres parties où ce nombre est négatif. On ne peut donc pas définir d'intégrale donnant S.

Ensemble des droites =

[Ensemble des droites d'intervalle espace
$\cup$
Ensemble des droites d'intervalle temps] Rend S stationnaire

Ensemble des droites d'intervalle temps $\longrightarrow$ maximise S

$\cup$

[Ensemble des droites d'intervalle lumière] S non définie

Les trajectoires des particules matérielles joignent des intervalles du genre temps. Pour ces trajectoires, il y a équivalence entre la définition des droites de l'espace-temps comme chemins de direction constante, et comme chemin de temps propre maximal.

10. Volume d'un domaine, élément de volume. - En Relativité générale, nous serons amenés à prendre des coordonnées curvilignes quelconques. Nous aurons besoin de connaître la valeur de l'élément de volume exprimé avec ces coordonnées. Nous allons voir ci-dessous que l'on peut également trouver une formule élégante pour la divergence d'un champ de vecteurs. À ce propos, rappelons que les équations de conservation écrites pour le tenseur d'impulsion-énergie $\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0$ ont été écrites en utilisant les coordonnées rectilignes types x^α de l'espace-temps, pour lesquelles les symboles de CHRISTOFFEL sont nuls. En coordonnées curvilignes, il faudra utiliser la formule (9,34) avec les symboles de CHRISTOFFEL, ou la formule (10,22) que nous allons trouver ci-dessous pour la divergence.

Nous commençons par la notion de volume, en rappelant sa définition en coordonnées rectilignes orthonormées ou types.

Dans l'espace physique à trois dimensions, pour définir le volume d'un domaine $\mathcal{D}$, on prend un repère orthonormal et on définit $\mathcal{V}$ par :

$$\mathcal{V} = \int_{\mathcal{D}} dx^1\, dx^2\, dx^3 \tag{10,12}$$

x^1, x^2, x^3 étant les trois coordonnées orthonormales.

$$d\mathcal{V} = dx^1 dx^2 dx^3 \tag{10,13}$$

$d\mathcal{V}$ est appelé *élément de volume*. Tel est en effet le point de départ obligé de la construction de cette notion de volume faisant intervenir pour sa définition des repères particuliers.

Rappelons que d'une manière générale, pour définir le volume dans un espace affine à n dimensions non muni d'un produit scalaire, on choisit arbitrairement un repère de l'espace, et on prend pour convention que le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs de bases est 1. Cela revient à choisir que le déterminant de ces n vecteurs de bases vaut 1, et cela fixe la constante de proportionnalité indéterminée dans l'expression du déterminant de n vecteurs. On dit alors que l'espace est *jaugé*. Dans le cas d'un espace muni d'un produit scalaire, la formule (10,12) correspond au fait qu'on choisi une base orthonormée (ou base type) comme base de déterminant 1, ce qui est naturel.

Un exemple de structure d'espace affine non muni d'un produit scalaire est l'espace du diagramme pression-volume d'un fluide en thermodynamique. Ayant choisi l'unité de volume et l'unité de pression arbitrairement, l'élément de "volume" unité qui est ici un élément d'aire, correspond à un parallèlogramme construit avec l'unité de pression et l'unité de volume (fig. 10.1).

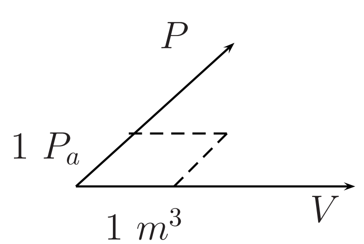

Fig. 10.1

Dans un tel espace, les notions affines comme celle de parallèlisme ont un sens, tandis que les notions métriques comme celle de produit scalaire ou de longueur d'un arc de courbe n'en ont pas. Ainsi, pour un cycle, donc une trajectoire fermée dans l'espace (P, V), l'aire du cycle a un sens et correspond au travail échangé, tandis que la circonférence n'a pas de longueur définie, s'exprimant en unité de pression parallèlement à l'axe des volumes et en unité de volume parallèlement à l'axe des pressions; aucune unité n'étant disponible dans le cas général, les deux unités pression et volume n'étant pas reliées.

Dans un espace muni d'un produit scalaire, la notion de longueur d'un arc de courbe existe, et également celle de volume. Ces deux notions et les unités correspondantes sont reliées de façon à ce que la formule donnant le volume d'un hyperparallélépipède rectangle soit :

$$\mathcal{V} = l_1 l_2 ... l_n \qquad (10,14)$$

avec le coefficient 1 devant $l_1 ... l_n$.

Cette formule est en effet la même que celle (10,13) donnant l'élément de volume en coordonnées orthonormales ou types. Le coefficient de proportionnalité est pris arbitrairement égal à 1 (le choix d'une unité par le choix du coefficient 1 dans une formule est courant en physique). Tel est le sens du choix précédemment précisé d'une base orthonormée (ou base type) comme base de déterminant 1 donc de volume unité dans un tel espace.

Remarquons que la Relativité restreinte, grâce à la constante universelle C , vitesse de la lumière, permet de relier les unités de longueurs et de temps, donnant une commune mesure à ces deux grandeurs. La notion de longueur d'un chemin (intégrale du temps propre) dans l'espace-temps prend alors un sens. La Relativité restreinte permet donc de passer de la structure affine newtonienne de l'espace-temps à la structure métrique (espace affine muni d'un produit scalaire).

11. Volume d'un domaine et élément de volume en coordonnées curvilignes. - Soit $u^{\bar{i}}\left(x^i\right)$ un système de coordonnées curvilignes. On sait par la théorie du changement de variables dans un calcul d'intégrales multiples que :

$$\mathcal{V} = \int_{\mathcal{D}} dx^1 ... dx^n = \int_{\mathcal{D}} |det \frac{\partial x^i}{\partial u^{\bar{i}}}| \, du^1 ... du^n \qquad (10,15)$$

Nous avons généralisé la formule (10,12) pour un espace à n dimensions. Les coordonnées x^i sont des coordonnées rectilignes types ou orthonormées. Généralisant la notation utilisée en Relativité restreinte, nous écrirons le tenseur métrique exprimé avec ces coordonnées (η_{ij}). Nous noterons $\eta = det\,\eta_{ij}$. On a : $\eta_{ij} = \pm\delta^i{}_j \quad$ et $\quad \eta = \pm 1$.

L'élément de volume exprimé avec les coordonnées curvilignes $u^{\bar{i}}$ vaut, d'après (10,15) :

$$d\mathcal{V} = dx^1...dx^n = |det\frac{\partial x^i}{\partial u^{\bar{i}}}|du^1...du^n \qquad (10,16)$$

Le déterminant considéré s'appelle le *jacobien* de la transformation faisant passer des coordonnées $u^{\bar{i}}$ aux x^i . D'autre part, on a grâce à (9,20) :

$$g_{\bar{i}\bar{j}} = \frac{\partial x^i}{\partial u^{\bar{i}}}\eta_{ij}\frac{\partial x^j}{\partial u^{\bar{j}}}$$

Cette formule peut s'interpréter comme un produit de trois matrices. Posons :

$$\mathfrak{g} = det\, g_{\bar{i}\bar{j}}$$

Il vient, la première matrice étant égale à la troisième :

$$\mathfrak{g} = \eta\,|det\,\frac{\partial x^i}{\partial u^{\bar{i}}}|^2 \qquad (10,17)$$

Cette formule implique que le déterminant du tenseur métrique garde toujours le même signe quelles que soient les coordonnées choisies. Il vient :

$$\sqrt{|\mathfrak{g}|} = |det\,\frac{\partial x^i}{\partial u^{\bar{i}}}|$$

$$\text{et} \quad d\mathcal{V} = dx^1...dx^n = \sqrt{|\mathfrak{g}|}\,du^1...du^n \qquad (10,18)$$

En coordonnées curvilignes u^i , l'élément de volume de l'espace-temps vaut :

$$d\mathcal{V} = \sqrt{-\mathfrak{g}}\,du^0du^1du^2du^3 \qquad (10,19)$$

et le volume d'un domaine $\mathcal{D}$ vaut :

$$\mathcal{V} = \int_{\mathcal{D}}\sqrt{-\mathfrak{g}}\,du^0du^1du^2du^3 \qquad (10,20)$$

Dans le cas de la géométrie euclidienne du plan par exemple :

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \sqrt{\mathfrak{g}} = r$$

$$d\mathcal{V} = dx\,dy = r\,dr\,d\theta$$

12. Expression de la divergence en coordonnées curvilignes. - Utilisons l'expression de la divergence donnée par l'équation (9,37) au moyen des symboles de Christoffel (ici, r est un indice muet n'ayant rien à voir avec les coordonnées polaires) :

$$div\,\mathbf{V} = \frac{\partial V^i}{\partial u^i} + \Gamma^{i}_{ri} V^r$$

Les identités de Ricci donnent :

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^h} = g_{im}\Gamma^{m}_{j\ h} + g_{mj}\Gamma^{m}_{i\ h}$$

La multiplication contractée par g^{ij} donne :

$$g^{ij}\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^h} = \Gamma^{j}_{jh} + \Gamma^{i}_{ih}$$

Et, puisque i et j sont des indices muets, et compte tenu de la symétrie des symboles de Christoffel par rapport aux deux indices du bas :

$$\Gamma^{i}_{ir} = \frac{1}{2} g^{ij}\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^r}$$

Nous savons que (g^{ik}) est la matrice inverse de (g_{ik}), donc :

$$g^{ik} = \frac{\Delta^{ik}}{\mathfrak{g}}$$

Où Δ^{ik} est le cofacteur de l'élément g_{ik} . En développant le déterminant $\mathfrak{g}$ par rapport à la k^{em} colonne :

$$\mathfrak{g} = \left. \underset{m \neq i}{g_{mk}\,\Delta^{mk}} + \underbrace{g_{ik}\,\Delta^{ik}}_{\text{ssi}} \right]_{\text{ssk}}$$

Or Δ^{ik} ne contient pas la variable g_{ik}; de là, on voit que :

$$\frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial g_{ik}} = \Delta^{ik}$$

Remplaçons Δ^{ik} par cette expression, il vient :

$$g^{ik} = \frac{1}{\mathfrak{g}}\frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial g_{ik}}$$

$$\text{et :} \qquad \Gamma^{i}_{ri} = \frac{1}{2}\frac{1}{\mathfrak{g}}\frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial g_{ij}}\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^r}$$

$$\Gamma^{i}_{ri} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u^r}\ \ln|\mathfrak{g}|$$

Dans le cas où $\mathfrak{g} < 0$, on a donc :

$$\Gamma^{i}_{ri} = \frac{\partial}{\partial u^r}\ \ln\sqrt{-\mathfrak{g}} \qquad (10,21)$$

$$\begin{aligned} div\,\mathbf{V} &= \frac{\partial V^i}{\partial u^i} + \frac{\partial}{\partial u^r}\ \ln\sqrt{-\mathfrak{g}}\,V^r \\ &= \frac{1}{\sqrt{-\mathfrak{g}}}\left(\sqrt{-\mathfrak{g}}\frac{\partial V^i}{\partial u^i} + V^i\frac{\partial}{\partial u^i}\sqrt{-\mathfrak{g}}\right) \end{aligned}$$

$$div\,\mathbf{V} = \frac{1}{\sqrt{-\mathfrak{g}}}\,\frac{\partial}{\partial u^i}\left(V^i\sqrt{-\mathfrak{g}}\right) \qquad (10,22)$$

Dans l'espace-temps de la Relativité restreinte, et en coordonnées curvilignes quelconques, nous devrons donc remplacer la relation :

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0 \quad \text{par} \quad \frac{\partial}{\partial u^\beta}\left(\sqrt{-\mathfrak{g}}\,T^{\alpha\beta}\right) = 0 \qquad (10,23)$$

L'expression $\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta}$ est en effet la quatre-divergence du quadrivecteur $\mathbf{V}^\alpha = T^{\alpha\beta}\,\mathbf{e}_\beta$.

EXERCICES

10.1

Dans cet exercice, nous voulons calculer la divergence d'un champ de vecteur $\mathbf{V}$ en coordonnées sphériques (coordonnées polaires de l'espace).

Les vecteurs de bases usuellement utilisés sont :

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial}{\partial r} \quad ; \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{r\ \cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\theta} \quad ; \quad \varepsilon_3 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

φ est la latitude et θ la longitude. On a :

$$\|\varepsilon_1\| = \|\varepsilon_2\| = \|\varepsilon_3\| = 1$$

$$\mathbf{V} = V^1\frac{\partial}{\partial r} + V^2\frac{\partial}{\partial\theta} + V^3\frac{\partial}{\partial\varphi} = V^r\varepsilon_1 + V^\theta\varepsilon_2 + V^\varphi\varepsilon_3$$

1. Calculez V^1, V^2, V^3 en fonction de V^r, V^θ, V^φ.

2. Exprimez l'élément linéaire (élément de longueur) en coordonnées sphériques de l'espace, et en déduire $\sqrt{\mathfrak{g}}$.

3. Calculez la divergence en coordonnées polaires de l'espace grâce à (10,22).

10.2

On désire, dans cet exercice, calculer le laplacien en coordonnées polaires de l'espace au moyen de la formule (9,38).

1. λ étant la latitude, θ la longitude, et r la distance à l'origine, exprimez l'élément linéaire.

2. Calculez tous les symboles de Christoffel non nuls au moyen de (10,5).

3. Calculez les composantes $\mathbf{grad}^i\varphi$.

4. En déduire le laplacien de φ.