Chapitre Quatre

LA RELATIVITÉ RESTREINTE : MÉCANIQUE

1. Abandon de l'impulsion newtonienne. - Maintenant que nous avons changé la loi de transformation des coordonnées dans un changement de référentiel, il nous faut voir si les lois de la mécanique sont encore covariantes. Nous allons examiner la covariance de la loi de conservation de l'impulsion (1,2) : $\Sigma \mathbf{P}_i = \mathbf{Cte}$, avec l'expression newtonienne de l'impulsion $\mathbf{P} = m\mathbf{v}$, donnée par cette même équation (1,2). Supposant cette loi vraie dans $\bar{\mathcal{R}}$, nous allons voir si elle est vraie dans $\mathcal{R}$.

Envisageons deux particules, M_1 de masse m_1 et M_2 de masse m_2. La particule M_1 est animée de la vitesse $\bar{v} \ll C$ vers la droite par rapport à $\bar{\mathcal{R}}$, tandis que M_2 est animée de la vitesse C vers la gauche, par rapport à $\bar{\mathcal{R}}$ (fig. 4.1) :

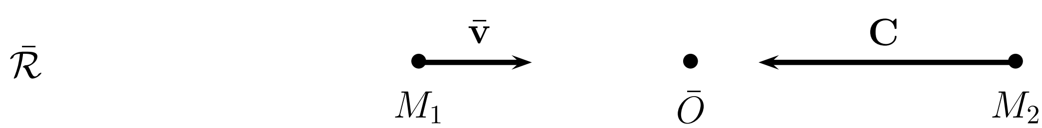


Fig. 4.1

Nous supposons que $m_1\bar{v} = m_2C$ de telle sorte que l'impulsion totale soit nulle. Une situation envisageable est donc que les deux particules se lient en $\bar{O}$ puis restent immobiles.

Vue dans $\mathcal{R}$, la situation finale consiste en deux particules animées de la même vitesse V, vitesse de $\bar{\mathcal{R}}$ par rapport à $\mathcal{R}$. Nous savons qu'une particule animée de la vitesse C dans un référentiel a cette vitesse par rapport à tout référentiel (nous avons construit la transformation de Lorentz pour qu'il en soit ainsi). D'autre part, les vitesses $\bar{v}$ et V étant supposées faibles devant celle de la lumière, la loi newtonienne de composition des vitesses joue pour la particule M_1. Nous pouvons maintenant examiner les impulsions vues de $\mathcal{R}$:

Avant le choc, nous avons :

$$\sum \mathbf{P}_i = m_1(\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{V}) - m_2\mathbf{C} = m_1\mathbf{V}$$

Après le choc :

$$\sum \mathbf{P}_i = (m_1 + m_2)\mathbf{V}$$

La loi de conservation de l'impulsion supposée vraie dans $\bar{\mathcal{R}}$ est donc fausse dans $\mathcal{R}$! Cette loi n'est pas covariante. Nous avons maintenant le choix de l'abandonner ou de modifier de manière adéquate l'expression mathématique de l'impulsion, de façon à rendre la loi covariante.

Rappelons nous que cette loi vient directement du principe de l'inertie que nous avons généralisé à un ensemble de plusieurs particules. Nous avons fait cela de façon à ne pas distinguer les particules élémentaires de celles qui ne le sont pas vis-à-vis du comportement externe. Il s'agit d'une telle exigence de simplicité et d'autocohérence de la théorie que nous allons essayer de conserver cette loi tout en la rendant covariante.

Il nous faut préciser ici que nous ne nous servons plus de la notion de centre de gravité, car elle n'est pas intrinsèque : pour déterminer la position de G, il nous faut envisager les différents points M_i simultanément, et cela dépend du référentiel choisi. G dépend donc du référentiel et n'a plus d'utilité.

2. L'impulsion relativiste. - Essayons d'utiliser la nouvelle structure découverte en relativité : les quadrivecteurs. Supposons donc qu'on arrive à définir un quadrivecteur impulsion. Une égalité entre quadrivecteurs est automatiquement covariante, et cela vient de l'existence même de l'espace de Minkowski; cependant nous allons le détailler ici avec les composantes. Nous avons alors, pour l'exemple des deux particules considéré au § 1, dans $\bar{\mathcal{R}}$:

$$P_1{}^{\bar{\beta}} + P_2{}^{\bar{\beta}} = Q_1{}^{\bar{\beta}} + Q_2{}^{\bar{\beta}}$$

$\vec{P}_1$ et $\vec{P}_2$ sont les impulsions des particules M_1 et M_2 avant le choc, $\vec{Q}_1$ et $\vec{Q}_2$ après le choc. Dans $\mathcal{R}$:

$$\begin{aligned} P_1{}^{\alpha} + P_2{}^{\alpha} &= \Lambda^{\alpha}{}_{\bar{\beta}} P_1{}^{\bar{\beta}} + \Lambda^{\alpha}{}_{\bar{\beta}} P_2{}^{\bar{\beta}} \\ &= \Lambda^{\alpha}{}_{\bar{\beta}} \left(P_1{}^{\bar{\beta}} + P_2{}^{\bar{\beta}}\right) = \Lambda^{\alpha}{}_{\bar{\beta}} \left(Q_1{}^{\bar{\beta}} + Q_2{}^{\bar{\beta}}\right) \qquad (4,1) \\ &= \Lambda^{\alpha}{}_{\bar{\beta}} Q_1{}^{\bar{\beta}} + \Lambda^{\alpha}{}_{\bar{\beta}} Q_2{}^{\bar{\beta}} = Q_1{}^{\alpha} + Q_2{}^{\alpha} \end{aligned}$$

La loi est donc vraie également dans $\mathcal{R}$, donc covariante. La suite d'égalités que nous venons d'écrire correspond tout simplement à l'écriture à l'aller ($\mathcal{R}$ vers $\bar{\mathcal{R}}$) et au retour ($\bar{\mathcal{R}}$ vers $\mathcal{R}$) de la stabilité de la relation d'équivalence (3,15) pour l'addition (à la base, avec la stabilité pour la loi externe, de l'existence de l'espace de MINKOWSKI), et au milieu, à l'écriture dans $\bar{\mathcal{R}}$ de la conservation de l'impulsion.

Il nous reste a trouver un quadrivecteur, le plus simple possible, redonnant l'impulsion newtonienne pour les vitesses faibles.

m est un invariant ainsi que le temps propre τ; nous avons alors un quadrivecteur par :

$$\vec{P} = m\frac{d\vec{x}}{d\tau} \qquad (4,2)$$

Détaillons les termes de cette formule : on considère deux évènements infiniment proches qui sont l'existence de la particule à deux instants voisins. Il suffit, pour avoir une image mentale de cela, d'imaginer que la particule clignote. Les deux évènements sont deux allumages successifs du clignotant fixé sur la particule. $d\tau$ est alors la durée séparant ces deux allumages, telle qu'elle est indiquée par l'horloge étalon fixée sur la particule; c'est *l'accroissement infinitésimal de temps propre.* $d\vec{x}$ est le quadrivecteur déplacement de la particule entre ces deux évènements. $\vec{P}$, produit du quadrivecteur $d\vec{x}$ par le scalaire $\frac{m}{d\tau}$ est bien également un quadrivecteur. Écrivons ses composantes :

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} m & \frac{Cdt}{d\tau} \\ m & \frac{dx}{d\tau} \\ m & \frac{dy}{d\tau} \\ m & \frac{dz}{d\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & C & \cosh\varphi \\ m & \mathbf{v} & \cosh\varphi \end{pmatrix} = mC\vec{U} \qquad (4,3)$$

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} \cosh\varphi \\ \frac{\mathbf{v}}{C}\cosh\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dt & / & d\tau \\ dx & / & Cd\tau \\ dy & / & Cd\tau \\ dz & / & Cd\tau \end{pmatrix} = \frac{1}{C}\left(\frac{dx^\alpha}{d\tau}\right) \qquad (4,4)$$

$\vec{U}$ est appellée *quadrivitesse* de la particule. Ses trois composantes d'espace ont pour limite $\frac{v}{C}$ quand $v \ll C$.

On notera également :

$$\mathbf{U} = \frac{\mathbf{v}}{C}\cosh\varphi \quad ; \quad \vec{U} = \begin{pmatrix} U^0 \\ \mathbf{U} \end{pmatrix}$$

$$\vec{U}^2 = \frac{C^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}{C^2d\tau^2} = \frac{1 - \frac{v^2}{C^2}}{\frac{d\tau^2}{dt^2}}$$

(3,6) donne alors :

$$\vec{U}^2 = 1 \qquad (4,5)$$

et nous pouvon écrire :

$$ds^2 = d\vec{x}^2 = C^2d\tau^2 = C^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \qquad (4,6)$$

ds^2, intervalle infinitésimal est appelé *élément linéaire* ou *élément métrique*. Il généralise à l'espace de MINKOWSKI l'élément de longueur de l'espace dl vérifiant :

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Les signes moins dans l'élément linéaire viennent du fait qu'on a affaire a un espace pseudo-euclidien. On voit sur la formule (4,6) que lorsque l'élément linéaire est du genre temps, il est égal au produit du carré de la vitesse de la lumière par l'accroissement infinitésimal du temps propre $d\tau$.

Rappelons (§ 6 chapitre 3) que cette durée $d\tau$ est l'accroissement du temps dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}^0$ de la particule au moment considéré, référentiel dans lequel les deux évènements (deux allumages successifs, du clignotant) ont lieu au même endroit. Ce qui vient d'être dit s'écrit : $C^2 d\tau^2 = C^2 dt^2$ pour $dx = dy = dz = 0$. À partir de là, et de l'invariance de l'élément linéaire, on retrouve l'expression donnée en (4,6) de $d\tau^2$, puis en divisant (4,6) par $C^2 dt^2$, on retrouve (3,6). Enfin, en divisant (4,6) par $C^2 d\tau^2$, on retrouve $\vec{U}^2 = 1$.

Pour les vitesses faibles devant C, nous avons :

$$\vec{P} \simeq \begin{pmatrix} mC \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} \tag{4,7}$$

Nous retrouvons bien la loi de conservation de l'impulsion newtonienne (1,2) aux faibles vitesses, si nous supposons que le quadrivecteur $\vec{P}$ total d'un ensemble de particules isolées du reste de l'univers se conserve. Nous ferons donc cette hypothèse que l'expérience confirme.

La loi de conservation correspondant à la première composante de $\vec{P}$ traduit une autre loi : la conservation de l'énergie. En effet :

$$\begin{aligned} mC\cosh\varphi &\simeq mC\left(1+\frac{\varphi^2}{2}\right) \simeq mC\left(1+\frac{v^2}{2C^2}\right) \\ &= \frac{1}{C}\left(mC^2+\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{E}{C} \end{aligned}$$

avec :

$$E \simeq mC^2 + \frac{1}{2}mv^2 \tag{4,8}$$

$\frac{1}{2}mv^2$ est l'énergie cinétique newtonienne; mais il apparaît un terme d'énergie au repos lié directement à la masse, d'où la célèbre formule : $E = mC^2$.

Cela permet d'envisager, lors d'un choc, la création ou la destruction de particules, l'énergie de masse mC^2 étant convertie en vitesse des autres particules. Cela a couramment lieu dans les accélérateurs de particules; la Mécanique newtonienne était incapable de prendre en compte de telles expériences.

Remarquons cependant que la Mécanique newtonienne prend en compte la désintégration d'un système composé comme l'ionisation de l'atome d'hydrogène par exemple. La relativité permet de ne pas faire de distinction entre les particules élémentaires et celles qui ne le sont pas dans ce genre de réaction; voir à ce sujet le § 3. Ainsi, une expérience de désintégration ne permet pas de savoir si les particules en jeu sont élémentaires ou non. Cette idée de comportement extérieur commun pour les particules élémentaires et composées existait déjà en Mécanique newtonienne (§ 3 , chapitre 1). Elle est étendue grâce à la relativité au cas où le système n'est plus invariable (désintégration). Cette idée est également reprise en Mécanique quantique. En Mécanique quantique classique, on parle de l'état quantique d'un électron dans l'atome d'hydrogène; l'atome d'hydrogène est alors décrit par les nombres quantiques correspondant (orbitales). En Mécanique quantique relativiste, l'électron lui-même, pourtant considéré comme rigoureusement élémentaire est un état quantique.

La Relativité restreinte nous permet d'unifier deux lois distinctes de la Mécanique newtonienne, la conservation de l'impulsion et la conservation de l'énergie. De plus, nous avons approfondi la connaissance de cette dernière en découvrant un nouveau type d'énergie, l'énergie d'un corps immobile liée directement à sa masse.

Dorénavant, nous écrirons :

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} \frac{E}{C} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} \qquad (4,9)$$

Le vecteur de l'espace $\mathbf{P}$ est la généralisation de l'impulsion newtonienne que nous écrirons avec la même lettre.

$$E = mC^2 \cosh\varphi = \frac{mC^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{C^2}}} \qquad (4,10)$$

$$\mathbf{P} = m\mathbf{v} \cosh\varphi = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{C^2}}} \qquad (4,11)$$

Nous appellerons dorénavant le quadrivecteur $\vec{P}$: *quadrivecteur impulsion-énergie.*

$$\vec{P}^2 = m^2C^2\vec{U}^2 = m^2C^2 = \frac{E^2}{C^2} - \mathbf{P}^2$$

D'où la formule :

$$E^2 - \mathbf{P}^2C^2 = m^2C^4 \qquad (4,12)$$

qui remplace la formule newtonienne :

$$E = \frac{\mathbf{P}^2}{2m}$$

L'énergie E de la particule se compose donc de deux termes : mC^2 est *l'énergie de masse* ou *énergie de repos*, PC est *l'énergie cinétique* liée au mouvement

($P = \|\mathbf{P}\| = \sqrt{\mathbf{P}^2}$ est la norme de $\mathbf{P}$; la norme d'un vecteur noté en caractère gras sera toujours notée en caractère non gras).

3. Création d'une particule massique avec des particules de masses nulles. - Lorsque $m \to 0$, (4,3) montre que $\vec{P} \to 0$ (nous verrons au § 7 que nécessairement $v \ll C$; v est bornée) sauf si $\cosh\varphi \to +\infty$. Envisageons le cas limite obtenu quand $m\cosh\varphi$ a une limite finie : $\frac{E}{C^2}$. Nous avons une particule de masse nulle dont le quadrivecteur impulsion-énergie est donné par (4,9) avec $E = PC$. Cela correspond bien à la formule (4,12) avec $m = 0$. Toute l'énergie est sous forme cinétique. Il existe en effet de telles particules. Ainsi, le photon est de masse nulle avec $E = h\nu$, donc $P = \frac{h\nu}{C}$.

Considérons maintenant l'expérience de pensée suivante : dans $\bar{\mathcal{R}}$, une boîte de masse nulle (fig. 4.2) aux parois parfaitement réfléchissantes contient deux photons de même énergie faisant des allers et retours le long de l'axe des $\bar{y}$ en ayant toujours des vitesses opposées. Calculons le quadrivecteur impulsion-énergie total, tout d'abord avec ses composantes dans $\bar{\mathcal{R}}$:

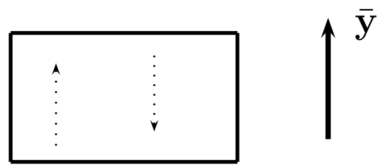


Fig. 4.2

$$P^{\bar{\beta}} = \begin{pmatrix} h\frac{\nu}{C} \\ 0 \\ h\frac{\nu}{C} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h\frac{\nu}{C} \\ 0 \\ -h\frac{\nu}{C} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2h\frac{\nu}{C} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} mC \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$m = \frac{2h\nu}{C^2} = \frac{E}{C^2}$; $E = 2h\nu$. E est l'énergie totale contenue dans la boîte. Ainsi, l'ensemble se comporte comme une particule massique immobile. Dans $\mathcal{R}$, et en supposant $v \ll C$:

$$P^{\alpha} = \begin{pmatrix} m \; C \; \cosh\varphi \\ m \; C \; \sinh\varphi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et la seule composante non nulle de $\mathbf{P}$ est $P^x = mC \sinh\varphi \simeq mC\frac{v}{C} = mv$.

On a bien encore le comportement d'une particule de masse m en Mécanique newtonienne. Si la boîte est toute petite, elle a l'apparence d'une telle particule. Si la boîte libère les deux photons, cela correspond à la désintégration de cette particule fictive. Le référentiel $\bar{\mathcal{R}}$ dans lequel le système constitué de la boîte et des deux photons vérifie $P^i = 0$ sera appelé *référentiel* ou *système du centre d'inertie*, et cette dénomination sera utilisée pour tout système composé, pour le référentiel dans lequel les composantes d'espace de l'impulsion-énergie totale sont nulles. Le référentiel du centre d'inertie est le référentiel $\mathcal{R}^0$ d'une particule élémentaire qui aurait le même quadrivecteur impulsion-énergie. Nous continuerons d'employer la notation $\mathcal{R}^0$. Dans le cadre de l'approximation newtonienne (particules de masses non nulles et de vitesse faible devant C), $\mathcal{R}^0$ serait le référentiel dans lequel le centre de gravité de l'ensemble est immobile. Le référentiel $\mathcal{R}$ pourra être appelé *système du laboratoire.*

Cet exemple que nous appellerons *expérience de la boîte aux deux photons* pourrait être reproduit avec un système comportant un nombre quelconque de particules. Nous arrivons à la conclusion qu'en ce qui concerne le quadrivecteur impulsion-énergie total, qui gouverne le comportement mécanique de l'ensemble vu de l'extérieur, on peut considérer que c'est celui d'une particule unique de masse $\frac{P^0}{C}$ dans le référentiel où $P^i = 0$; c'est à dire dans le référentiel $\mathcal{R}^0$ de cette particule fictive. La masse de cette particule fictive est égale à la somme des énergies dans ce référentiel divisée par C^2. La loi $E = mC^2$ s'applique donc pour un ensemble de particules considéré comme un tout.

La masse de l'ensemble est supérieure à la somme des masses des particules constituantes à moins que celles-ci soient toutes au repos. Ainsi, en mécanique relativiste la loi d'addition des masses ne joue pas.

Prolongeant ce qui a été dit au § 5 du chapitre 1, rappelons qu'en Mécanique quantique relativiste, dans l'espace-temps, il n'y a que des particules, particules de matière ou particules de champ assurant les interactions. Ce qui vient d'être dit est donc vrai pour tout système. Ainsi, la masse d'un système composé est égal à la somme des énergies qu'il contient divisée par C^2 dans $\mathcal{R}^0$: énergie de masse des particules de matière, énergie cinétique de ces dernières, et énergies potentielles d'interaction correspondant aux énergies des particules de champ que contient le système. Si le système est contenu dans un petit volume, il se comportera comme une particule élémentaire en ce qui concerne son comportement mécanique vu de l'extérieur, comportement caractérisé par le quadrivecteur impulsion-énergie totale; et ceci tant que la masse totale du système (énergie dans $\mathcal{R}^0$ au facteur C^2 près) restera constante. Aucune expérience de mécanique ne permettra de savoir si le système est élémentaire ou composé, tant qu'il se comportera comme un tout invariable dans les expériences. Tel est le cas du proton par exemple, qui est en fait constitué de quarks et de gluons et dont la masse provient pour partie de l'énergie cinétique de ces quarks et gluons.

Nous avons donc bien réalisé le programme que nous nous étions fixé aux § 1 et § 2, à savoir garder en Mécanique relativiste le même comportement extérieur pour les particules élémentaires et celles qui ne le sont pas.

La masse m de la particule fictive, égale à $\frac{E}{C^2}$, sera parfois appelée *masse-énergie* pour rappeler son origine (somme des énergies) et son comportement (comme la masse d'une particule élémentaire). On prendra au choix, l'unité d'une masse, d'une impulsion, ou d'une énergie.

Par extension, on appellera parfois masse-énergie, la composante de temps P^0 du quadrivecteur impulsion-énergie d'un système composé, sans que les composantes d'espace P^i soient nulles; ceci car nous verrons que ce terme est doué de la capacité d'attirer gravitationnellement comme une masse (voir § 4 du chapitre 6).

4. La force en Mécanique relativiste. - La force a été définie grâce à l'égalité (1,2) permettant d'arriver par dérivation à (1,5) : $\Sigma\mathbf{F}_i = 0$. Il est naturel de vouloir conserver cette égalité. Il est alors nécessaire de dériver l'équation $\Sigma\mathbf{P}_i = \mathbf{Cte}$ par rapport à un paramètre commun à toutes les particules. Ce ne peut être un temps propre. Le plus simple est de prendre le temps du référentiel galiléen considéré. On pose donc :

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \tag{4,13}$$

Il y a là une certaine subtilité, car pour la définition de l'impulsion, on utilisait le temps propre τ et non pas t (en utilisant la notation $\mathbf{x} = \overrightarrow{OM}$) :

$$\mathbf{P} = m\frac{d\mathbf{x}}{d\tau}$$

Essayons de nous convaincre que la formule (4,13) est la bonne solution. Considérons une plaque immobile dans $\mathcal{R}$ (fig. 4.3), bombardée par un flux de particules venant de la gauche d'impulsions $\mathbf{P}_1$, et par un flux de particules venant de la droite d'impulsions $\mathbf{P}_2$. La plaque absorbe les particules et reste immobile. Il est naturel de dire qu'elle est soumise à deux forces égales en valeurs absolues et opposées. Ceci correspond à notre besoin d'utiliser (1,5).

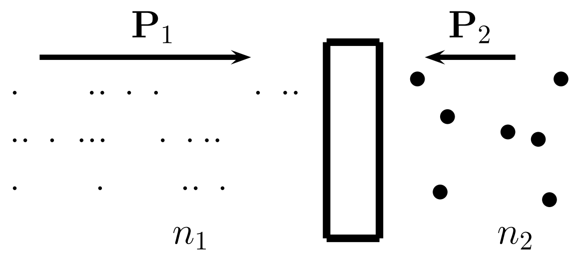


Fig. 4.3

Soit n_1 le nombre de particules arrivant par unité de temps de la gauche, et n_2 de la droite. En comptant les impulsions qui arrivent de la droite et de la gauche pendant le temps dt, et qui doivent être égales, nous arrivons à :

$$n_1 dt P_1 = n_2 dt P_2$$

Posons :

$$dP_1 = n_1 dt P_1 \quad \text{et} \quad dP_2 = n_2 dt P_2$$

$$dP_1 = dP_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dP_1}{dt} = \frac{dP_2}{dt}$$

Les particules venant de la gauche par exemple, peuvent être relativistes, tandis que celles venant de la droite ne le sont pas. Pour $\mathbf{P}_2$, on peut alors prendre l'expression classique, tandis que pour $\mathbf{P}_1$, on prend l'expression relativiste. $\mathbf{F}_2 = \dfrac{d\mathbf{P}_2}{dt}$ s'identifie donc à la force newtonienne, tandis que $\mathbf{F}_1 = \dfrac{d\mathbf{P}_1}{dt}$ résulte de notre volonté d'avoir $F_1 = F_2$ lorsque la plaque est en équilibre, sans nous préoccuper du type de particules en jeu.

Prenons un exemple concret : on peut avoir une plaque noire exposée à la lumière et subissant la pression de radiation des photons du côté gauche, tandis que du côté droit elle est maintenue immobile grâce à un ressort ou au choc mou de particules non relativistes. Lorsque la plaque est à l'équilibre, on écrit bien $F_1 = F_2$. Les égalités :

$$\frac{dP_1}{dt} = \frac{dP_2}{dt} = F_2$$

impliquent alors :

$$F_1 = \frac{dP_1}{dt}$$

Remarquons que toutes les forces usuelles autres que la gravitation sont de nature électromagnétique. Elles peuvent donc s'interpréter comme dues à un flux de photons virtuels relativistes; elles sont égales au flux d'impulsion de ces photons.

En conclusion, la force est donc égale au flux d'impulsion.

L'expérience montre d'ailleurs que c'est cette force qui est utilisée en électromagnétisme dans la formule :

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \tag{4,14}$$

5. Quadrivecteur force. - Le quadrivecteur :

$$\vec{\Phi} = \frac{d\vec{P}}{d\tau} = \begin{pmatrix} \frac{1}{C}\frac{dE}{d\tau} \\ \mathbf{F}\frac{dt}{d\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{C}\frac{dE}{dt}\cosh\varphi \\ \mathbf{F}\cosh\varphi \end{pmatrix} \tag{4,15}$$

est appelé le *quadrivecteur force*. Utilisons le pour voir quelle est la loi de transformation de la force dans le passage de $\bar{\mathcal{R}}$ à $\mathcal{R}$. Considérons une particule immobile dans $\bar{\mathcal{R}}$, de masse invariable m.

$$\Phi^{\bar{0}} = 0 \quad ; \quad \Phi^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}{}_{\bar{\beta}}\ \Phi^{\bar{\beta}} \text{ donne :}$$

$$\Phi^1 = F^x \cosh\varphi = \Phi^{\bar{1}}\cosh\varphi = F^{\bar{x}}\cosh\varphi$$

$$\text{car } \Phi^{\bar{1}} = F^{\bar{x}} \text{ . Il vient : } F^x = F^{\bar{x}}.$$

$$\Phi^2 = F^y\cosh\varphi = \Phi^{\bar{2}} = F^{\bar{y}}$$

de même avec l'axe des z. Ainsi :

$$F^y = \frac{F^{\bar{y}}}{\cosh\varphi} = F^{\bar{y}}\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}$$

Finalement :

$$F_{\mathcal{R}} = F_{\parallel,\bar{\mathcal{R}}} + F_{\perp,\bar{\mathcal{R}}}\ \sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}} \tag{4,16}$$

Les symboles $\parallel$ et $\perp$ signifiant parallèle et perpendiculaire au mouvement de la particule. La force n'est donc pas un invariant en mécanique relativiste.

6. Travail de la force. - Considérons une particule de masse invariable m (m peut être nulle) et dont l'énergie varie continuement sous l'action d'une force $\mathbf{F}$:

$$E^2 = \mathbf{P}^2C^2 + m^2C^4 \text{ donne } E\,dE = \mathbf{P}\,d\mathbf{P}\,C^2$$

$$\text{Soit : } \quad dE = \frac{\mathbf{P}}{E}\frac{d\mathbf{P}}{dt}C^2\,dt$$

or :

$$\frac{\mathbf{P}}{E} = \frac{m\cosh\varphi\ \mathbf{v}}{mC^2\cosh\varphi} = \frac{\mathbf{v}}{C^2} \tag{4,17}$$

$$\Rightarrow \qquad dE = \frac{\mathbf{v}}{C^2}\frac{d\mathbf{P}}{dt}\ dt\ C^2$$

$$dE = \mathbf{F}\,dl \tag{4,18}$$

La variation d'énergie est égale au produit scalaire de la force extérieure appliquée à la particule par le vecteur déplacement élémentaire, c'est à dire au travail de la force. Ainsi, l'expression newtonienne du travail de la force est encore valable. Cela est naturel : en effet les forces classiques de la Mécanique newtonienne sont causées par des particules de champ pouvant aller à la vitesse de la lumière (photons, gravitons). Si l'on suppose qu'il y a conservation d'énergie entre les particules de matière obéissant à la Mécanique newtonienne et ces particules de champ, la formule (4,18) doit être retrouvée dans le cadre de la physique relativiste. Notons que la conservation de l'énergie, ajoutée au fait que le $d\mathbf{l}$ subi par un système est égal à celui subi par le système complémentaire, impose que l'on doit avoir le principe de l'action et de la réaction, si l'on veut que le travail soit donné toujours par la formule (4,18). Cela justifie encore la définition de la force du § 4 :

$$\begin{aligned} dE_1 = \mathbf{F}_{2/1}\,d\mathbf{l}_1 = -dE_2 = \mathbf{F}_{2/1}\,d\mathbf{l}_2 \\ = -\mathbf{F}_{1/2}\,d\mathbf{l}_2 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{F}_{2/1} = -\mathbf{F}_{1/2} \end{aligned}$$

En conclusion, la formule (4,18) s'applique dès que l'on a une particule invariable dont l'énergie varie continuement sous l'action d'un flux de particules. Bien sûr, elle ne s'applique plus lors des désintégrations de particules élémentaires, la particule suivie devant garder un certain temps son identité. (4,15) donne $\Phi^0 = \mathbf{F}\mathbf{v}\frac{\cosh\varphi}{C}$.

7. Vitesse limite des particules matérielles. - Montrons qu'aucune particule massique ne peut dépasser la vitesse de la lumière : (4,11) implique en effet que $P \to \infty$ quand $v \to C$.

Pour que v atteigne C en un temps fini, cela nécessiterait que P atteigne une valeur infinie en un temps fini, donc cela nécessiterait une force $F = \frac{dP}{dt}$ infinie, ce qui est impossible.

8. Vitesse limite de toutes les interactions. - Aucune interaction ayant un effet physique ne peut se propager plus vite que la lumière. Cela entre en effet en contradiction avec la causalité qui implique que la cause d'un phénomène doit toujours précéder son effet.

Considérons un signal partant de $\bar{O} = O$ à $t = \bar{t} = 0$ et arrivant en A ($\bar{x} > 0$) au temps $\bar{t} > 0$ avec $\bar{v} = \frac{\bar{x}}{\bar{t}} > C$. Utilisons la transformation de Lorentz.

$Ct = \bar{x}\sinh\varphi + C\bar{t}\cosh\varphi < 0$; à condition que φ soit négatif donc $V = \frac{\sinh\varphi}{\cosh\varphi}$

également, et que :
$$\frac{\sinh\varphi}{\cosh\varphi} < -C\frac{\bar{t}}{\bar{x}} = -\frac{C}{v}$$
soit :
$$\frac{|V|}{C} > \frac{C}{v}$$
Ce qui est possible, car $\frac{C}{v} < 1$.

Dans $\mathcal{R}$ le signal est émis en A avant d'être reçu en O, alors que dans $\bar{\mathcal{R}}$, c'est l'inverse, il est émis en O et reçu en A. Notons que $\bar{\mathcal{R}}$ se déplace vers la gauche, vu de $\mathcal{R}$. La vitesse C n'est donc pas seulement la vitesse de la lumière, mais également la vitesse limite de toute interaction ayant un effet physique. Ce résultat est intéressant, car nous avons construit la Relativité restreinte en faisant jouer un rôle particulier à la vitesse de la lumière, donc à l'interaction électromagnétique. Nous aurions pu construire cette théorie sans faire jouer ce rôle particulier à cette interaction, en postulant que toutes les interactions ont une vitesse limite commune : C, la même dans tous les référentiels.

Il est important de noter que la propriété précédente de vitesse finie C pour toutes les interactions entre en contradiction avec la notion de corps solide. En effet, un ébranlement a une extrémité d'un corps solide, c'est à dire un déplacement de cette extrémité, doit se répercuter instantanément dans tout le solide, donc se propager à une vitesse infinie, toutes les parties du solide restant à distance constante les unes des autres. Or la notion de corps solide est pour nous fondamentale, puisque nous nous en sommes servi au § 1 du chapitre 1 pour définir les référentiels galiléens. Nous pouvons sauver la situation dans la mesure ou un corps déformable se comporte comme un corps solide tant qu'il n'est soumis à aucune contrainte.

Il est intéressant de remarquer que la Mécanique quantique réintroduit la notion de solide parfait ayant une extension spatiale précise. Ainsi, un atome d'hydrogène dans son état quantique fondamental a une extension spatiale décrite par l'orbital de l'électron bien précise et invariable. De même, dans l'effet Mössbauer, le cristal de fer recule en bloc lors de l'émission d'un photon γ.

La contradiction avec la Relativité restreinte est levée grâce au principe d'incertitude qui assure le flou nécessaire quant aux positions géométriques d'un solide. Lors de la réduction du paquet d'onde, il y a mise en place instantanée de l'emplacement du solide dans son ensemble. Cela correspond à la même non localité que celle observée dans les expériences de corrélation de deux photons par exemple (inégalités de Bell, expérience d'Aspect). Il y a corrélation entre les deux bouts du solide. Mais cette corrélation ne permet pas de transporter de l'information d'un bout à un autre. Ce n'est qu'après la réduction du paquet d'onde effectuée, que l'on peut vérifier que le solide a la bonne longueur.

9. Les antiparticules. - L'existence des antiparticules se déduit de la prise en compte conjointe de la Relativité restreinte et de la Mécanique quantique. Nous allons le montrer par un raisonnement intuitif.

Nous avons vu au § 5 du chapitre 1 qu'en Théorie quantique des champs, les interactions s'interprètent comme des échanges de particules virtuelles entre les particules de matière (diagrammes de Feynman). On peut montrer que ces particules virtuelles ne sont pas tenues à ne pas dépasser la vitesse de la lumière. Intuitivement, cela vient du principe d'incertitude qui offre une telle possibilité, compte tenu des incertitudes sur les variables classiques, en particulier sur la vitesse. Nous avons vu au § 8 que si $\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1} > C$ dans un référentiel $\mathcal{R}$, on peut avoir $t_2 > t_1$ dans $\mathcal{R}$ et $\bar{t}_2 < \bar{t}_1$ dans $\bar{\mathcal{R}}$, pour une certaine vitesse V de $\bar{\mathcal{R}}$ par rapport à $\mathcal{R}$. En conséquence une particule virtuelle allant de O vers A dans $\bar{\mathcal{R}}$, peut être vue comme allant de A vers O dans $\mathcal{R}$. Mais si, dans $\bar{\mathcal{R}}$, on voit une particule chargée positivement allant dans un sens, dans $\mathcal{R}$ on verra une particule chargée négativement allant dans l'autre sens. Il faut être en effet d'accord sur le transport effectif de charge entre O et A dans le processus. Nous verrons en effet au § 11 que la charge électrique est invariante dans un changement de référentiel. Tous les observateurs doivent donc être d'accord sur le transfert de charge observé. Si on voit une particule virtuelle échangée dans $\bar{\mathcal{R}}$, dans $\mathcal{R}$ on voit donc son *antiparticule*. A toute particule est donc associée une antiparticule de même masse mais de charge opposée. Ceci s'étend aux particules de matière et aux particules neutres. Enfin certaines particules sont identiques à leurs antiparticules.

Construisons par exemple le diagramme de Feynman du processus d'interaction faible transformant un proton en neutron, tandis qu'un électron est transformé en neutrino. La particule virtuelle échangée est un boson W^+ dans un cas W^- dans l'autre (fig. 4.4) :

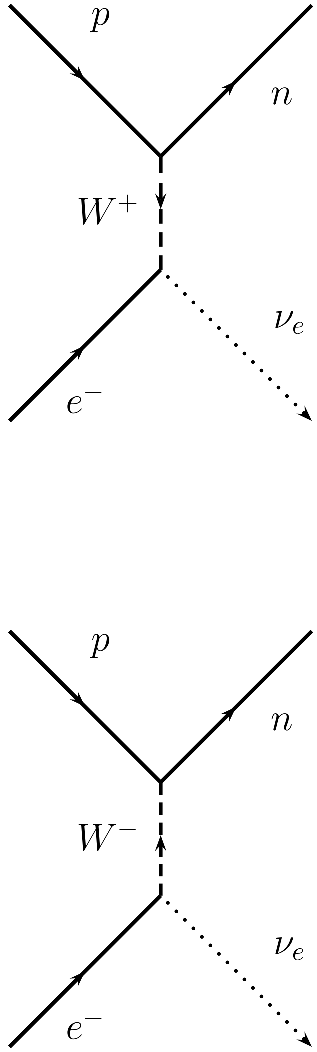


Fig. 4.4

D'une manière générale, on peut effectuer les transformations suivantes sur un diagramme :

-On peut changer toutes les particules en leurs antiparticules, avec changement de la parité donc de l'hélicité. Cela correspond à l'invariance globale sous la symétrie CP : C transformation générale de toutes les charges en leurs opposées, ou conjuguaison de charge, donc passage aux antiparticules, et P changement de la parité donc de l'hélicité.

-On peut changer le sens de toutes les flèches. Cela correspond à l'invariance globale sous la symétrie T, changement de sens de l'écoulement du temps.

Notons qu'on a découvert quelques réactions, dont en particulier une réaction faisant intervenir le système $K^0\,\bar{K}^0$, n'obéissant pas séparément à la symétrie CP. Puisque la symétrie CPT est toujours vérifiée, d'après le théorème célèbre CPT de la Théorie quantique des champs, cette réaction n'obéit pas non plus à la symétrie T seule.

-On peut inverser une flèche à la condition de changer la particule correspondante en son antiparticule, et de changer également la parité, donc l'hélicité de cette particule. Cela s'appelle la *symétrie croisée.* (*crossing symmetry*). Cela revient à faire subir à la particule concernée, la symétrie locale CPT. En utilisant ces trois procédés, des diagrammes précédents, on peut déduire celui correspondant à la désintégration du neutron (fig. 4.5) :

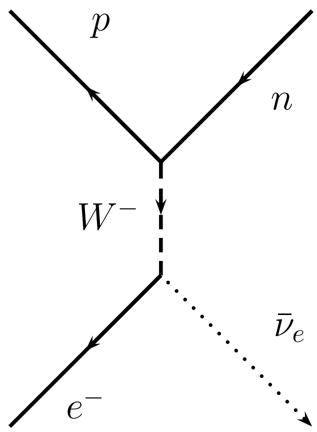


Fig. 4.5

10. Le Problème des deux barres : invariance de la force par unité de longueur. - Considérons une particule d'une barre, soumise à la force appliquée par l'autre barre. Cette force est perpendiculaire au mouvement et (4,16) donne :

$$F_{\mathcal{R}} = F_{\perp,\mathcal{R}} = F_{\perp,\bar{\mathcal{R}}}\ \sqrt{1-\frac{v^2}{C^2}}$$

Mais le nombre de particules chargées par unité de longueur dans $\mathcal{R}$ est plus grand que dans $\bar{\mathcal{R}}$ d'un facteur $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{C^2}}}$ à cause de la contraction des longueurs.

Il en résulte que :

$$\frac{F_{\mathcal{R}}}{l} = \frac{F_{\bar{\mathcal{R}}}}{\bar{l}}$$

Nous devons donc retrouver dans les deux repères la même force par unité de longueur. Nous pouvons d'ailleurs donner une interprétation imagée de cette propriété : imaginons que les barres soient maintenues immobiles dans $\bar{\mathcal{R}}$ grâce aux forces de pression de pistons régulièrement espacés le long des barres. Vu de $\mathcal{R}$, à cause de la contraction des longueurs, l'espacement de ces pistons est réduit du facteur : $\sqrt{1-\frac{v^2}{C^2}}$; mais les phénomènes se produisant dans $\bar{\mathcal{R}}$ sont vus dans $\mathcal{R}$ ralentis de ce même facteur; il en est ainsi du mouvement des molécules frappant les parois des pistons et y délivrant leurs impulsions qui elles, restent inchangées étant perpendiculaires au mouvement. Leurs débits, donc finalement les forces appliquées, sont donc réduits de ce facteur. Les forces sont plus faibles, les longueurs plus petites, les deux phénomènes se compensent exactement. Nous allons vérifier dans le paragraphe suivant que les lois de l'électromagnétisme sont bien en accord avec cette loi de transformation de la force, donc que cet ensemble de la physique est bien globalement covariant.

11 Calcul de la force électromagnétique dans les deux référentiels.

- Dans $\bar{\mathcal{R}}$:

$$F_{\bar{\mathcal{R}}} = F_E = \frac{\bar{\lambda}^2 \bar{l}}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Dans $\mathcal{R}$: remarquons tout d'abord la propriété fondamentale <u>d'invariance de la charge électrique</u>; la charge d'une particule est la même vue de n'importe quel référentiel. Ainsi la charge de l'électron de l'atome d'hydrogène annule parfaitement la charge du proton quelle que soit la vitesse de l'électron, donc quel que soit l'état d'excitation de l'atome.

Ajoutons à cela le fait que la charge électrique est <u>quantifiée</u>, multiple de celle de l'électron, ou de celle des quarks les moins chargés (charge $\frac{1}{3}$), si l'on tient compte de ces derniers. Ces deux faits, alliés à l'existence de charges <u>positives</u> et <u>négatives</u> permettent bien à l'interaction électrostatique de disparaître complètement pour un atome neutre, vu de l'extérieur, quel que soit son état, et de manière générale pour toute matière dans l'univers, à grande échelle, les charges positives annulant rigoureusement les charges négatives. Ainsi seule la gravitation intervient à l'échelle de l'univers.

Il résulte de cette propriété d'invariance de la charge et de la contraction des longeurs que :

$$\lambda = \frac{\bar{\lambda}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{C^2}}}$$

$$F_{\mathcal{R}} = F_E + F_B = \frac{\lambda^2 l}{2\pi\varepsilon_0 r} - \frac{\mu_0 \lambda^2 v^2 l}{2\pi r}$$

or

$$\varepsilon_0 \mu_0 C^2 = 1$$

donc :

$$F_{\mathcal{R}} = \frac{\lambda^2 l}{2\pi\varepsilon_0 r}\left(1-\frac{v^2}{C^2}\right) = \frac{\bar{\lambda}^2 l}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

ainsi :

$$\frac{F_{\mathcal{R}}}{l} = \frac{F_{\bar{\mathcal{R}}}}{\bar{l}}$$

comme prévu au paragraphe précédent.

EXERCICES

4.1 Les ondes de matière de de Broglie

De Broglie suppose qu'à une particule ponctuelle de masse m, immobile dans le référentiel $\mathcal{R}^0 = \bar{\mathcal{R}}$, est associée une onde stationnaire dans ce même référentiel. Stationnaire signifie que, dans toute l'étendue de l'onde, les vibrations seront en concordance de phase. La pulsation ω_0 de cette onde dans $\bar{\mathcal{R}}$ est supposée vérifier la relation de de Broglie : $\hbar\omega_0 = mC^2$. L'expression de la fonction d'onde est alors, en chaque point de l'espace :

$$\psi(\bar{x}, \bar{t}) = Ae^{-i\omega_0\bar{t}}$$

1. Exprimez la même fonction d'onde, vue dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$, où la vitesse du corpuscule est v.

2. Montrez que dans le référentiel du laboratoire, la pulsation vue est :

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}}$$

3. Montrez que, dans le référentiel du laboratoire, le phénomène devient une onde progressive où une même phase arrive successivement en des points différents. Quelle est la vitesse de phase V de l'onde?

4. Montrez que, dans $\mathcal{R}$, on a la relation de de Broglie $\lambda = \frac{h}{P}$, P étant l'impulsion relativiste de la particule.

5. Montrez que l'ensemble des composantes :

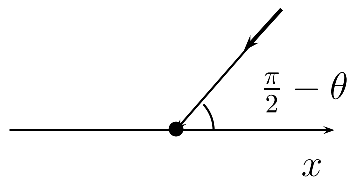
$$\vec{k} = \begin{pmatrix} \frac{\omega}{C} \\ k^x \\ k^y \\ k^z \end{pmatrix}$$

avec $\|k\| = \frac{2\pi}{\lambda}$, se transforme comme un quadrivecteur dans un changement de référentiel. À quel autre quadrivecteur est-il proportionnel?

6. Qu'obtient-on pour $v \to C$, $\omega_0 \to 0$ avec $\omega_0 \cosh\varphi \to \omega$, ω étant une limite finie?,

4.2 Etude de l'aberration de la lumière

Dans $\mathcal{R}$, un rayon lumineux arrive depuis les x positifs en O en faisant l'angle $\frac{\pi}{2} - \theta$ avec l'axe des x.



1. Calculez l'angle $\bar{\theta}$ de ce rayon, vu de $\bar{\mathcal{R}}$.

2. Montrez que l'on retrouve la valeur newtonienne pour $v \ll C$; quelle est la valeur de $\bar{\theta}$ quand $v = C$.

3. Application numérique pour la lumière venant des étoiles sur la Terre, quand $\theta = 0$. On donne : $v = 30km/s$.

4.3 Interprétez la relation : $F_{\parallel,\mathcal{R}} = F_{\parallel,\bar{\mathcal{R}}}$ en prenant l'exemple d'une force de pression longitudinale obtenue par le choc des molécules d'un gaz dans la chambre d'un piston.

4.4 L'effet Doppler : Un rayonnement se déplaçant dans le sens des x positifs est vu avec la fréquence ν dans le référentiel $\mathcal{R}$. Il est vu avec la fréquence $\bar{\nu}$ dans le référentiel $\bar{\mathcal{R}}$ animé de la vitesse v par rapport à $\mathcal{R}$.

1. En exprimant le quadrivecteur impulsion-énergie d'un photon dans $\mathcal{R}$ et dans $\bar{\mathcal{R}}$, calculez ν en fonction de $\bar{\nu}$.

2. En déduire le décalage vers le rouge $z = \frac{(\bar{\lambda} - \lambda)}{\lambda}$.

3. .Donnez la formule approchée quand $v \ll C$.

4. Quelle est la limite de z quand $v \to C$?

4.5 Le mouvement hyperbolique

Cet exercice étudie le mouvement d'un objet de masse m soumis à la force constante $F = mg$ à partir de l'instant $t = 0$, instant où l'objet est immobile.

1. Exprimez la vitesse v en fonction du temps du référentiel fixe : t.

2. En déduire la fonction $x(t)$.

3. Montrez que la courbe $x(t)$ est une hyperbole.

4. Exprimez le temps propre τ du mobile en fonction de t.

5. Calculez le temps propre τ nécessaire pour que l'objet franchisse la distance de 50 000 années lumière (on prendra $g = 9,81 m/s^2$).

6. On suppose que le diamètre de notre galaxie, la Voie Lactée, fait approximativement 100 000 années lumière.

Une fusée part de la Terre et accélère avec l'accélération constante $g = 9,81 m/s^2$ jusqu'au centre de notre galaxie. Ensuite, elle freine de la même manière, après un retournement, pour s'immobiliser à l'autre bout de la galaxie.

Calculez la durée totale du voyage aller et retour pour un observateur terrestre, et pour un passager. Conclusion?