

Chapitre Huit

PROPRIÉTÉS DU TENSEUR D'IMPULSION-ÉNERGIE

1. Définition générale du tenseur d'impulsion-énergie. - Ce chapitre prend la suite du chapitre 5, c'est à dire que nous nous plaçons dans l'espace-temps de la Relativité restreinte. Dans ce paragraphe, nous avons une démarche heuristique. Nous voulons donner une image conceptuelle simple du tenseur d'impulsion-énergie sans prétendre à la rigueur.

Nous allons donc prendre un modèle dans lequel nous considérons que l'univers est uniquement constitué de particules évoluant dans l'espace-temps, comme la peinture d'un tableau évolue sur la toile. Ceci a déjà été supposé au § 3 du chapitre 4 qui suivait l'idée émise au § 5 du chapitre 1.

Il y a les particules de matière et les particules de champ assurant les interactions. Lorsqu'une particule de champ assure une interaction, elle est dite virtuelle, mais elle peut également être non virtuelle. Ainsi la lumière est constituée de photons effectivement détectables dans un photomultiplicateur. Ajoutons ici que les particules élémentaires de matière sont toutes de spin $1/2$, c'est à dire sont des fermions; le moment cinétique vaut $\frac{1}{2}\hbar$. Ces particules de matière sont constituées de trois générations contenant chacune deux leptons : électron et neutrino électronique; muon μ et neutrino muonique; τ et neutrino tauique; et deux quarks : up et down; charm et beauty; top et bottom. Les expériences faites sur le L.E.P. au C.E.R.N. à Genève depuis 1989 et étudiant les désintégrations du Z^0 ont montrées qu'il n'y a que trois générations. Les quarks u et d sont les constituants du proton (uud) et du neutron (udd). Les particules de champ ont toutes un spin entier en unité de \hbar ; ce sont des bosons : photon 1; W^+ , W^- et Z^0 , 1; gluons 1; et graviton 2 (caractère tensoriel d'ordre 2 de l'interaction gravitationnelle).

Considérons, pour le raisonnement heuristique qui suit, que ces particules n'atteignent jamais la vitesse de la lumière. Considérons un certain *type* de particules, toutes identiques et toutes immobiles dans leur référentiel \mathcal{R}^0 . \mathcal{R}^0 existe, puisqu'elle n'ont pas la vitesse de la lumière. Dans \mathcal{R}^0 , leur densité ou nombre par unité de volume est n_0 . Dans le référentiel \mathcal{R} , Le quadrivecteur

impulsion-énergie d'une de ces particules est \vec{P} , et \vec{U} est la quadrivitesse commune de ces particules. On appelle alors tenseur d'impulsion-énergie du type de particules considérées, le tenseur :

$$T = n_0 C \vec{P} \otimes \vec{U} \quad (8, 1)$$

Avec les composantes nous obtenons :

$$T^{\alpha\beta} = n_0 C P^\alpha U^\beta \quad (8, 2)$$

Pour connaître le tenseur d'impulsion-énergie total en un point donné de l'espace-temps, il suffit alors de sommer (8,1) pour tous les types de particules présentes. Précisons ce que nous voulons dire : on appelle *type* de particule, la réunion de la donnée de *l'espèce* de particule (électron, photon, etc) avec la donnée également de n_0 et \mathcal{R}^0 , ce qui détermine \vec{P} et \vec{U} .

Dans cette formulation, nous supposons bien sûr qu'il n'y a pas de particule isolée. Toute particule fait partie d'un ensemble homogène, dans un petit volume entourant le point ou on calcule T , de particules du même type. Cela est l'hypothèse implicite de la formulation avec une densité continue de charge des lois de la physique (§ 14 chapitre 7).

Bien sur, il peut y avoir variation de n_0 , \vec{P} et \vec{U} d'un point à un autre de l'espace-temps; ce qui fait qu'on a en fait le champ de tenseurs T dont on pourra calculer la divergence etc. Cependant, dans la formule (8,1), on garde le même type de particules au moins dans un certain domaine de l'espace-temps autour du point considéré, pour pouvoir justement calculer des dérivées donc la divergence (n_0 dérivable etc).

Supposons qu'il y ait N types différents de particules, nous obtenons pour le tenseur d'impulsion énergie total :

$$T = \sum_{l=1, N} n_{0l} C \vec{P}_l \otimes \vec{U}_l \quad (8, 3)$$

Avec notre démarche heuristique, le tenseur d'impulsion-énergie total au point considéré est ainsi complètement obtenu, et dans tous les cas, par sommation à partir d'une formule unique : (8,1).

2. Autre formulation pour le tenseur d'impulsion-énergie. - Considérons le cas des particules de matière. Nous avons (4,3) :

$$\vec{P} = m C \vec{U}$$

D'où :

$$T = n_0 m C^2 \vec{U} \otimes \vec{U} = \rho_0 C^2 \vec{U} \otimes \vec{U} \quad (8, 4)$$

On retrouve bien le tenseur du § 14 chapitre 7.

Considérons maintenant le cas des particules d'interaction : une force répulsive peut être réalisée par des particules de masse $m > 0$ faisant des allers et retours entre les deux particules se repoussant. Ainsi, deux pêcheurs assis dans deux bateaux sur un lac et échangeant un ballon s'éloignent progressivement l'un de l'autre (fig. 8.1).

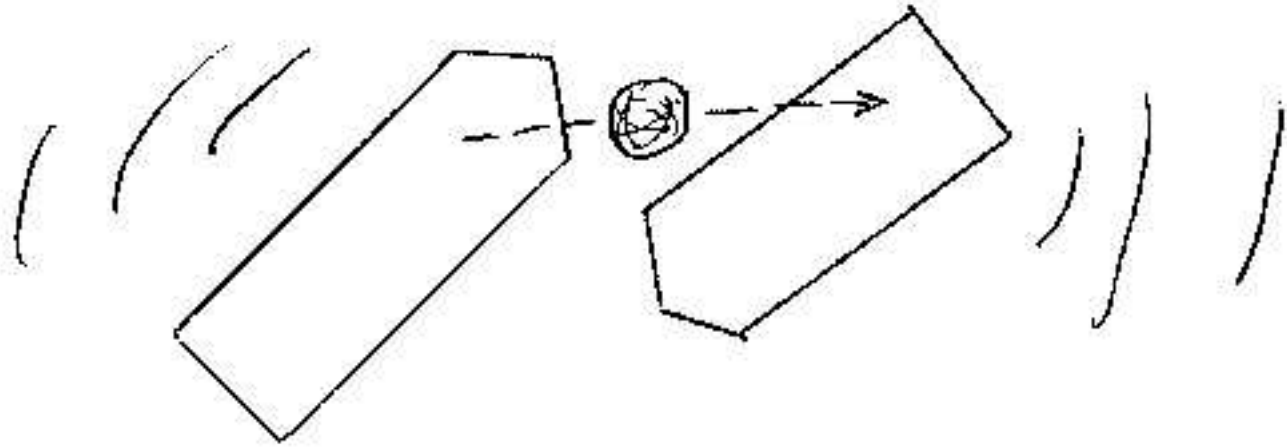


Fig. 8.1

La formule (8,4) est donc encore applicable, il suffit de considérer que les bosons ont une masse non nulle.

Nous allons voir au paragraphe suivant comment modéliser une force attractive.

3. Impulsion-énergie d'une particule de masse négative. - Nous supposons que la formule (4,3) s'applique encore avec une masse négative. Ainsi une particule de masse négative aura une impulsion opposée à sa vitesse et une énergie négative : $\mathbf{P} \simeq -m\mathbf{v}$. Considérons alors une particule de masse négative $-m$ faisant la navette entre deux particules de masses positives M (fig. 8.2).

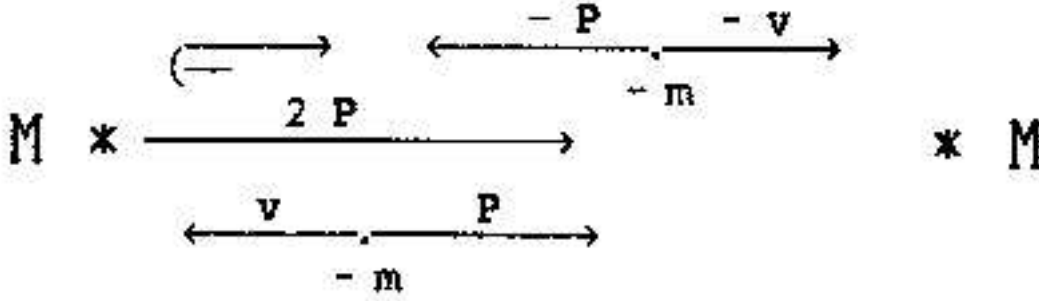


Fig. 8.2

Lorsque la particule de masse $-m$ arrive sur la particule de gauche, elle repart vers la droite tandis que son impulsion passe de $+P$ à $-P$. La particule de masse M prend l'impulsion $2P$ et, comme sa masse est positive, elle part vers la droite, ce qui correspond à un effet d'attraction.

4. Tenseur d'impulsion-énergie le plus général. - La formule (8,4) pourra donc encore s'appliquer. Compte tenu de (8,3), avec notre modèle heuristique, nous obtenons pour le tenseur d'impulsion-énergie au point considéré :

$$T = \sum_{l=1,N} n_{0l} m_l C^2 \vec{U}_l \otimes \vec{U}_l \quad (8, 5)$$

$$T = \sum_{l=1,N} \rho_{0l} C^2 \vec{U}_l \otimes \vec{U}_l \quad (8, 6)$$

Rappelons que l'on considère un petit volume autour du point considéré dans lequel on suppose que tous les types de particules présentes ont une distribution homogène. Bien sûr, autour d'un autre point, les distributions seront différentes, les types de particules présentes pourront être également différents, et le tenseur d'impulsion-énergie prendra une autre valeur.

5. Propriétés du tenseur d'impulsion-énergie. - On voit tout de suite sur la forme faisant intervenir deux fois \vec{U}_l que T est un tenseur symétrique.

Considérons maintenant un volume fini de l'espace délimité par une surface S . Dans la suite, nous emploierons parfois le mot *impulsion* pour impulsion-énergie ou *quatre-impulsion*, de façon à être plus bref. Lors des interactions

locales ponctuelles entre particules de matière et particules de champs de forces dans le domaine considéré, l'impulsion totale reste constante. Il en est ainsi même si lors de ces interactions il y a création ou annihilation de particules. Nous avons une suite de "chocs" entre deux particules laissant constante cette impulsion. Ces chocs sont une suite d'évènements individuels successifs et conservant chacun séparément l'impulsion. L'impulsion totale ne peut donc varier que lors de l'arrivée ou de la sortie d'une particule du domaine par traversée de la frontière. Nous pouvons faire un bilan pour chaque composante de l'impulsion.

Dans le référentiel où les particules l sont animées de la vitesse \mathbf{v}_l leur nombre dans le volume dV est :

$$\frac{n_{0l}dV}{\sqrt{1 - \frac{v_l^2}{C^2}}}$$

Le dénominateur est dû à la contraction des longueurs. L'impulsion totale est donc égale à :

$$\int \int \int_V \left(\sum_l \frac{n_{0l}}{\sqrt{1 - \frac{v_l^2}{C^2}}} \vec{P}_l \right) dV$$

La α^{em} composante de l'impulsion vaut :

$$\int \int \int_V \left(\sum_l \frac{n_{0l}}{\sqrt{1 - \frac{v_l^2}{C^2}}} P_l^\alpha \right) dV$$

Les particules qui entrent ou sortent en une seconde sont à la distance $\frac{|\mathbf{v}_l \cdot d\mathbf{S}|}{\|d\mathbf{S}\|}$ de la surface. Chacune transporte l'impulsion P_l^α . D'où la variation d'impulsion en une seconde :

$$\oint_S \sum_l \frac{n_{0l} P_l^\alpha}{\sqrt{1 - \frac{v_l^2}{C^2}}} \mathbf{v}_l d\mathbf{S} = \oint_S \sum_l n_{0l} P_l^\alpha C \mathbf{U}_l d\mathbf{S}$$

Le dénominateur dans le premier membre vient encore de la contraction des longueurs dans le référentiel où les particules l ont la vitesse \mathbf{v}_l .

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \int \int_V \sum_l \frac{n_{0l} P_l^\alpha}{\sqrt{1 - \frac{v_l^2}{C^2}}} dV = - \oint_S \sum_l n_{0l} P_l^\alpha C \mathbf{U}_l d\mathbf{S}$$

$$\int \int \int_V \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_l \frac{n_{0l} P_l^\alpha}{\sqrt{1 - \frac{v_l^2}{C^2}}} \right) + \text{div} \left(\sum_l n_{0l} P_l^\alpha C \mathbf{U}_l \right) \right) dV = 0$$

$$\text{Or} \quad \frac{n_{0l}}{\sqrt{1 - \frac{v_l^2}{C^2}}} = n_{0l} U_l^0$$

$$\frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_l n_{0l} P_l^\alpha U_l^0 \right) + \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\sum_l n_{0l} P_l^\alpha U_l^j \right) = 0$$

$$\text{Ce qui s'écrit : } \quad \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0 \quad (8, 7)$$

L'expression $\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta}$ s'appelle la quatre-divergence (ou divergence) du tenseur d'impulsion-énergie. Nous dirons donc que la quatre-divergence du tenseur d'impulsion-énergie est nulle. Nous avons une équation qui traduit la conservation de l'impulsion-énergie totale lors des chocs entre particules de matière et particules de champ, ou entre particules de champ, avec création ou annihilation possible de particules.

Abandonnons maintenant la méthode heuristique précédente. Nous nous servirons de l'équation (8,7) pour découvrir l'expression mathématique du tenseur d'impulsion-énergie d'un champ par exemple. Considérons ainsi un ensemble de particules chargées en interaction électromagnétique. Nous connaissons l'expression rigoureuse du tenseur d'impulsion-énergie des particules de matière T_m . À cause de l'interaction électromagnétique entre ces particules chargées, nous n'avons plus $\frac{\partial T_m^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0$.

Si nous arrivons, avec une formule relativement simple, à construire un tenseur fonction des champs électromagnétiques \vec{E} et \vec{B} tel que :

$$\frac{\partial T_m^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial T_{ch}^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0$$

nous considérerons que nous avons trouvé le tenseur du champ électromagnétique T_{ch} . Ceci sera fait au § 22.

La conservation de la charge électrique qui est un scalaire s'exprime par l'annulation de la divergence d'un quadrivecteur $\frac{\partial j^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0$. Ce quadrivecteur j^α est la source de l'interaction électromagnétique dans la formulation continue. De même, la conservation de l'impulsion-énergie qui est un quadrivecteur, s'exprime par l'annulation de la divergence d'un tenseur d'ordre deux $\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta}$. Ce tenseur $T^{\alpha\beta}$ est la source de l'interaction gravitationnelle dans la formulation continue. Ainsi l'équation de conservation fait intervenir la divergence d'un tenseur d'ordre $n + 1$ si la quantité conservée est un tenseur d'ordre n .

6. Interprétation des différentes composantes du tenseur d'impulsion-énergie. - Considérons un seul type de particules. Le cas général ne posera pas de problème nouveau, étant obtenu comme réunion de différents types de particules.

$$T^{00} = n_0 m C^2 U^0 U^0 = \frac{\rho_0 C^2}{1 - \frac{v^2}{C^2}} \quad (8, 8)$$

C'est la densité d'énergie totale, énergie de masse et énergie cinétique. Par rapport à ρ_0 , il y a un facteur $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{C^2}}}$ dû à la contraction des longueurs, et un deuxième dû à la variation de l'énergie avec la vitesse (§ 14 chapitre 6).

$$T^{0i} = \rho_0 C^2 U^0 U^i = \frac{1}{C} \frac{\rho_0 C^2 v^i}{1 - \frac{v^2}{C^2}} \quad (8, 9)$$

$$T^{0i} = \frac{\rho_0 C v^i}{1 - \frac{v^2}{C^2}} \quad (8, 10)$$

Le premier terme de (8,9) donne la densité d'énergie totale. Avec le produit par v^i , on obtient le flux à travers la surface unité $x^i = Cte$. On a le flux d'énergie à travers la surface $x^i = Cte$, divisé par C .

$$T^{i0} = \rho_0 C^2 U^i U^0 = C \frac{\left(\frac{\rho_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{C^2}}}\right) v^i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{C^2}}} = C \frac{\rho v^i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{C^2}}} \quad (8, 11)$$

ρ est la densité de masse apparente compte tenu de l'augmentation du nombre de particules par unité de volume à cause de la contraction des longueurs (§ 14, chapitre 6). On a la i^{em} composante de la densité d'impulsion multipliée par C .

$$T^{ij} = \rho_0 C^2 U^i U^j = \frac{\left(\frac{\rho_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{C^2}}}\right) v^i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{C^2}}} v^j \quad (8, 12)$$

Le terme à gauche de v^j est égal, comme nous l'avons vu ci-dessus à la i^{em} composante de la densité d'impulsion dans le référentiel considéré. En multipliant par v^j , on obtient le flux à travers la surface unité $x^j = Cte$ de la i^{em} composante de l'impulsion.

$$T^{ij} = \frac{\rho_0 v^i v^j}{1 - \frac{v^2}{C^2}} \quad (8, 13)$$

Toutes les composantes du tenseur d'impulsion-énergie sont bien homogènes entre elles et homogènes au produit d'une masse volumique par le carré d'une vitesse, comme c'est visible sur les formules ci-dessus.

7. Lien avec le tenseur des contraintes en élasticité. - En théorie de l'élasticité, on considère un corps composé d'atomes ou de molécules dont la cohésion interne est assurée par les forces agissant entre ces atomes ou molécules. Une déformation du corps fait varier ces forces, en faisant varier les distances des molécules entre elles. Ces forces sont appelées *contraintes internes*. Elles ont un rayon d'action infime.

Il en résulte que les forces avec lesquelles une partie quelconque d'un corps est sollicitée par les parties contiguës ne peuvent agir que directement au travers de la surface de contact. Ces forces correspondent au flux de particules d'interaction, le photon en fait, car les forces intermoléculaires sont d'origine électromagnétique.

Ces photons ont un parcours de longueur : la distance entre deux molécules environ, entre deux interactions.

Le mot tenseur vient justement de la théorie de l'élasticité, les contraintes font intervenir en effet des tensions ou compressions suivant que la pression est négative ou positive.

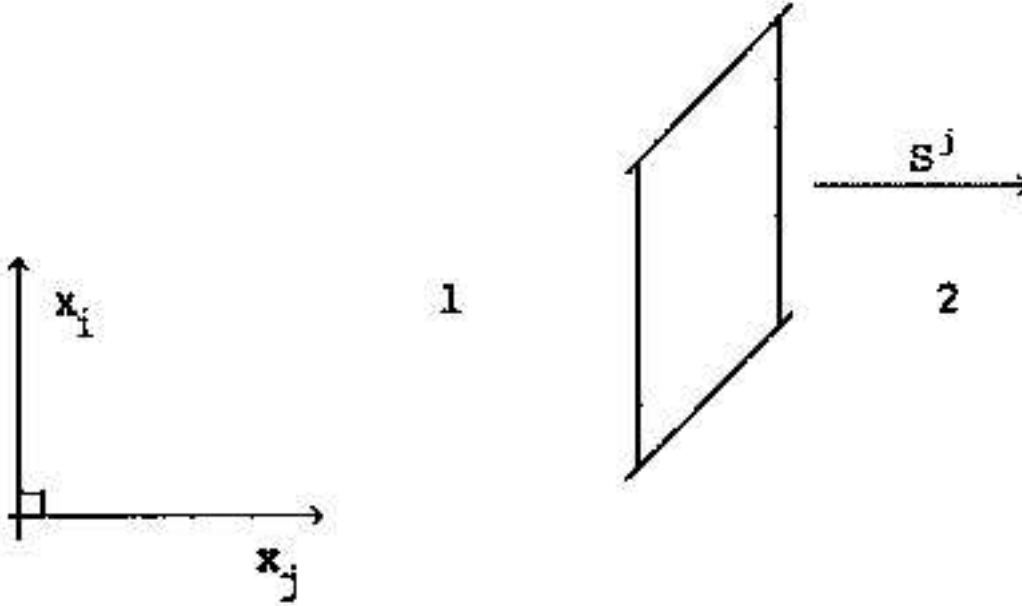


Fig. 8.3

Soit un petit élément de surface unité S^j (fig. 8.3) correspondant à $x^j = Cte$, donc perpendiculaire à l'axe x^j . Il sépare le milieu (1) : ($x^j < Cte$) du milieu (2) ($x^j > Cte$). La force \mathbf{F} que subit le milieu (2) de la part du milieu (1) sur la surface S^j est égale au flux d'impulsion de (1) vers (2) à travers S^j . La composante F^i est égale au flux de la i^{em} composante de l'impulsion à travers la surface orientée S^j (§ 4, chapitre 4, en particulier, équation (4,13)).

$$\text{On a : } F^i_{(S^j)} = \sigma^{ij} = T^{ij} \quad (8, 14)$$

Nous noterons S^j avec l'indice en haut pour rappeler qu'une surface correspond plutôt à une forme linéaire, donnant 0 pour tout vecteur contenu dans cette surface; et ici surface unité voudra dire alors que la forme linéaire S^j donne 1 pour le vecteur unité perpendiculaire à cette surface.

En particulier $F^{ii} = \sigma^{ii} = p^i$; p^i est la pression ressentie sur une surface perpendiculaire à $x^i = Cte$. La pression est en effet la force subie par une surface unité, perpendiculairement à celle-ci.

Pour calculer la force de pression appliquée par le milieu (1) sur le milieu (2) à travers S^j à partir du tenseur d'impulsion-énergie, il faut orienter \mathbf{x}_j la normale à S^j de (1) vers (2). En effet, $T^{jj} > 0$ correspond à une pression positive. On a bien une force positive appliquée par le milieu (1) sur le milieu (2) dirigée de (1) vers (2) : $F^j_{(S^j)} = T^{jj} > 0$

Cela correspond à des particules entrantes dans le milieu (2) ayant une impulsion positive (dirigée vers (2)) ou à des particules sortantes de (2) ayant une impulsion négative (dirigée vers (1)). Cela correspond bien à une impulsion de même sens que la vitesse donc à une masse positive.

Ainsi à des particules de masses positives faisant des allers et retours le long de l'axe des x^j par exemple, doit correspondre $T^{jj} > 0$. Cela est bien ce que donne la formule (8,4).

Ces particules de masses positives faisant l'aller et retour de (1) vers (2) repoussent le milieu (2) (voir § 2).

Envisageons maintenant une tension ou pression négative. Le milieu (1) tire le milieu (2) à travers S^j , et avec l'orientation choisie de \mathbf{x}_j on a bien : $F^j_{(S^j)} = T^{jj} < 0$. Cela correspond à des particules entrantes dans le milieu (2) ayant une impulsion négative et à des particules sortantes ayant une impulsion positive; donc cela correspond à des particules de masses négatives. Or la formule (8,4) donne bien $T^{jj} < 0$ pour $m < 0$. Ces particules de masses négatives venant du milieu (1) et y retournant attire le milieu (2) vers le milieu (1) (voir § 3).

Ainsi il y a accord entre la valeur algébrique de la force (répulsion, attraction), le type de particules intervenant (masses positives ou négatives), et la valeur algébrique des termes de pression du tenseur d'impulsion-énergie.

En ce qui concerne une force transversale : une force appliquée par (1) sur (2) vers le haut ($x^i > 0$ sur le dessin) correspond à des particules entrantes ayant une impulsion dirigée vers le haut, soit qu'on ait affaire à des particules de masses positives montantes, ou à des particules de masses négatives descendantes. En utilisant (8,13) :

$$\begin{array}{lll} v^j > 0 & \rho > 0 & \text{avec } v^i > 0 \\ & \text{ou } \rho < 0 & \text{avec } v^i < 0 \\ & & \text{et } T^{ij} = F^i_{(S^j)} > 0 \end{array}$$

ou encore, pour des particules sortantes :

$$\begin{aligned} v^j < 0 \quad \rho > 0 \quad \text{avec } v^i < 0 \\ \text{ou } \rho < 0 \quad \text{avec } v^i > 0 \\ \text{et } T^{ij} = F^i_{(S^j)} > 0 \end{aligned}$$

Il est facile de trouver les différents cas donnant $T^{ij} < 0$.

Dans ce cas de force transversale, il n'y a donc pas de problème de convention pour l'orientation de \mathbf{x}_i ; mais il faut toujours que \mathbf{x}_j soit orienté de (1) vers (2) pour calculer la force appliquée par (1) sur (2).

En conclusion : étant donné le tenseur d'impulsion-énergie d'un système, nous devons séparer les contributions des particules (de matière ou de champ) de libre parcours moyen avant interaction infime. Les composantes spatiales de la partie correspondante du tenseur d'impulsion-énergie constituent le *tenseur des contraintes* (σ^{ij}) de la théorie de l'élasticité.

Les trois composantes diagonales sont égales à la composante de la force (pour l'unité de surface) perpendiculaire à la surface considérée. Elles sont égales aux valeurs de la pression pour les trois surfaces perpendiculaires aux axes de coordonnées.

Il va de soi que l'on peut toujours appeler pression les composantes diagonales de la partie spatiale du tenseur d'impulsion-énergie total (dans lequel nous avons également les particules de grand libre parcours moyen). Il s'agit alors d'une pression généralisée. Ainsi : dans le référentiel où la barre défile à la vitesse \mathbf{v} (§ 11 chapitre 4), le tenseur d'impulsion-énergie contient une composante de pression pour une surface parallèle à l'axe des x , bien que la situation soit différente de la pression dans un gaz homogène et isotrope par exemple.

8. Description des forces à distance en liaison avec la théorie de l'élasticité. - Soient deux particules A et B interagissant par une force à distance. On peut remplacer cette force à distance par une barre rectiligne infiniment mince reliant les deux particules et qui est comprimée ou distendue selon que la force est répulsive ou attractive. La barre peut également transmettre une force non parallèle à elle.

Cette barre est sensée traverser les autres parties du solide sans aucune interaction. Elle ne "voit" pas les autres parties du solide, elle n'est elle-même pas "vue" d'après le principe de l'action et de la réaction. Elle leur est impalpable. Une particule neutre ne voit pas l'interaction électromagnétique qui pour elle n'existe pas. De même, les leptons sont insensibles à l'interaction forte. Deux matières obéissant uniquement à deux interactions différentes peuvent donc

s'interpénétrer sans se voir, comme on peut pénétrer un fantôme (fig. 8.4).

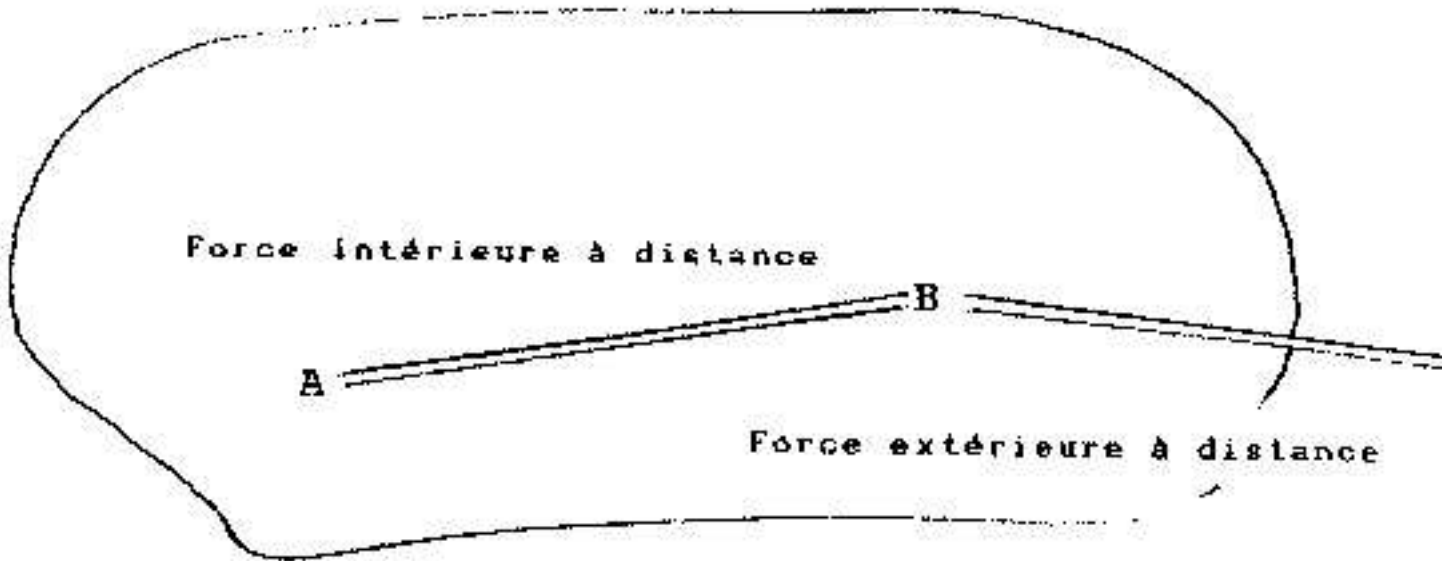


Fig. 8.4

L'expérience de pensée précédente est donc possible compte tenu des lois de la physique, ce qui doit être vrai pour toute expérience de pensée. Le tenseur d'impulsion-énergie correspondant à cette force à distance peut être différent du tenseur d'impulsion-énergie de cette barre fictive, Il en est ainsi du tenseur d'impulsion-énergie du champ électromagnétique entre deux particules chargées. Dans ce cas le tenseur du champ occupe en effet tout l'espace, comme nous le verrons. Cependant la barre fictive réalise une force à distance avec un tenseur d'impulsion-énergie correspondant possible et non contradictoire avec cette force. Elle a le mérite de donner un modèle intuitif de cette force avec le tenseur d'impulsion-énergie correspondant.

Le tenseur des contraintes classique du solide, ne prend pas en compte le tenseur des contraintes de ces barres.

Cependant, avec le modèle de la barre, toutes les forces, de contact et à distances, peuvent être traitées avec un tenseur des contraintes de la théorie de l'élasticité. On peut à loisir retrouver le tenseur des contraintes usuel en ne tenant plus compte de ceux des barres. Même le vrai tenseur d'impulsion-énergie de forces à distances, comme les forces électromagnétiques, peut être imaginé comme celui d'un solide déformable remplissant l'espace, ne "voyant" que les particules chargées entre lesquelles les forces à distances agissent, et étant "fantomatique" pour les autres objets.

9. Condition de l'équilibre d'un solide. - Considérons un solide immobile non soumis à des forces à distance. La partie spatiale du tenseur

d'impulsion-énergie se réduit donc au tenseur des contraintes.

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0 \text{ donne : } \frac{\partial T^{i\beta}}{\partial x^\beta} = 0 \text{ soit : } \frac{1}{C} \frac{\partial T^{i0}}{\partial t} + \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^j} = 0$$

$$\frac{1}{C} \frac{\partial T^{i0}}{\partial t} + \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial x^j} = 0$$

Si le corps est en équilibre : $\frac{\partial T^{i0}}{\partial t} = 0$;

Les équations d'équilibre d'un corps déformé s'écrivent donc :

$$\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial x^j} = 0 \tag{8, 15}$$

Il reste à écrire $\frac{\partial T^{0\beta}}{\partial x^\beta} = 0$ soit :

$$\frac{1}{C} \frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \frac{\partial T^{0j}}{\partial x^j} = 0$$

$$\frac{\partial T^{00}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x^j} (CT^{0j}) \tag{8, 16}$$

Compte tenu de (8,8), (8,9), on voit que la vitesse de variation de la densité d'énergie est opposée au gradient du flux d'énergie; c'est à dire qu'on retrouve l'expression locale de la loi de la conservation de l'énergie.

10. Valeur moyenne du tenseur d'énergie-impulsion. - Considérons un corps isolé, et supposons que son tenseur d'impulsion-énergie soit constant. Il vient donc (Nous gardons la notation T^{ij} sans utiliser σ^{ij}) :

$$\frac{\partial T^{ij}}{\partial x^j} = 0$$

Soit un volume V délimité par la surface S et englobant le corps :

$$\int \int \int_V \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^j} x^k dV = \int \int \int_V \frac{\partial}{\partial x^j} (T^{ij} x^k) dV - \int \int \int_V T^{ij} \frac{\partial x^k}{\partial x^j} dV = \oint_S T^{ij} x^k dS_j$$

$$- \int \int \int_V T^{ik} dV = 0$$

L'intégrale de surface est nulle. Cela suppose que le corps n'est soumis à aucune force venant de l'extérieur, que ce soit une force de contact ou une force à distance (§ 8). Il vient :

$$\int \int \int_V T^{ik} dV = VT^{\bar{ik}} = 0$$

La valeur moyenne des composantes spatiales du tenseur d'énergie-impulsion est donc nulle.

Dans le référentiel où l'impulsion totale est nulle :

$$0 = \frac{P^i}{V} = \frac{\frac{1}{c} \int \int \int_V T^{i0} dV}{V} = \frac{1}{C} \bar{T}^{i0}$$

$$\text{Ainsi : } \quad \bar{T} = \begin{pmatrix} \bar{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8,17)$$

Prenons l'exemple d'un ballon gonflé. Le gaz à l'intérieur est soumis à une pression positive, tandis que la membrane du ballon, qui est tendue, a un tenseur des contraintes ayant des composantes de pression négatives. La valeur moyenne sur tout le corps de ces composantes est nulle. La tension de la membrane compense exactement la pression positive du gaz à l'intérieur. Ceci, qui est équivalent à (8,15) n'est rien d'autre que le principe de l'action et de la réaction (1,5); qui correspond à la loi de la conservation de l'impulsion (1,2).

Ainsi, bien que toutes les composantes du tenseur d'impulsion-énergie aient une action gravitationnelle, pour un corps isolé, vu d'une certaine distance, seul le terme de masse-énergie semble agir. Cela justifie que dans l'expression classique de la loi de la gravitation universelle, un seul terme scalaire : T^{00} identifié à $m_i = m_g$ intervienne. Ceci quelle que soit la structure interne de l'objet, qui peut à priori être hautement relativiste, comme pour le proton par exemple contenant des quarks et gluons relativistes.

Dans le cas où le tenseur d'impulsion-énergie n'est pas constant, la démonstration précédente est encore valable si ce tenseur évolue périodiquement dans le temps. Il faut dans ce cas remplacer les grandeurs par leur valeur moyenne sur une période. Remarquons que les opérations de moyenne sur le temps et l'espace sont permutables. On peut donc faire la valeur moyenne dans le temps sur une période avant ou après avoir fait la valeur moyenne sur l'espace dans l'équation (8,15) par exemple.

11. La boîte aux deux photons. - Considérons de nouveau, dans une expérience de pensée une boîte de volume V aux parois parfaitement réfléchissantes dans laquelle deux photons font l'aller et retour avec une vitesse parallèle à un des côtés de la boîte de longueur l , et en ayant toujours une vitesse opposée. Soit p la pression exercée sur les parois de la boîte. Pour un photon :

$$p = \frac{\bar{F}}{S}; \bar{F} = \frac{\Delta P}{\Delta t}; \Delta t = \frac{2l}{C}; \Delta P = 2P = \frac{2h\nu}{C}$$

$$\bar{F} = \frac{2h\nu C}{C 2l} = \frac{h\nu}{l}; p = \frac{h\nu}{V} = T^{xx}$$

$$T^{00} = \frac{E}{V} = \frac{h\nu}{V}$$

Nous remplaçons l'axe des y de la figure 4.2 par l'axe des x .

Pour les deux photons :

$$T = \begin{pmatrix} \frac{2h\nu}{V} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2h\nu}{V} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8, 18)$$

Il y a donc deux termes qui agissent gravitationnellement : un terme qui correspond à la densité d'énergie T^{00} et un autre à la pression T^{xx} . Or en Relativité restreinte, la masse inerte de cette boîte ne fait intervenir que l'énergie des deux photons, et pas du tout la pression. On en arrive à la conclusion que $m_i \neq m_g$. Il y a contradiction avec le principe d'équivalence. Pour illustrer la contradiction, supposons que les deux photons se matérialisent brutalement en un électron et un positron immobiles. Le terme de pression disparaît, tandis que le terme d'énergie garde la même valeur. La masse gravitationnelle vue de l'extérieur doit changer, tandis que la masse inerte ne change pas.

La contradiction vient du fait que dans notre expérience de pensée, nous avons négligé le rôle de la boîte qui est pourtant essentiel puisque c'est elle qui maintient les deux photons localisés. Les parois de la boîte sont tendues, ce qui correspond à une pression négative, ceci à cause de la pression exercée par les deux photons.

$$\bar{T}_{\text{photons}}^{xx} + \bar{T}_{\text{boîte}}^{xx} = 0$$

Vue de loin, l'action gravitationnelle de la boîte compense exactement celle due au terme de pression des photons, et on retrouve ce qui a été dit au § 10. Si, comme nous verrons que c'est le cas, une pression positive cause une attraction, une pression négative doit avoir un effet répulsif, pour que les deux actions puissent s'annuler. Lorsque les deux photons se matérialisent en un électron et un positron, le terme de pression des photons disparaît ainsi que le terme de tension de la boîte.

Remarquons sur la forme (8,18) que :

$$T^\alpha_\alpha = \frac{2h\nu}{V} - \frac{2h\nu}{V} = 0$$

La trace du tenseur d'impulsion-énergie est nulle.

Nous verrons que c'est une propriété générale du tenseur d'impulsion-énergie du champ électromagnétique (§ 14 et § 22).

On voit là encore, comme au § 4 et au § 12 du chapitre 6, apparaître en Relativité générale des termes négatifs pouvant avoir un effet répulsif. Ce

phénomène sera étudié plus longuement au chapitre 19. Il est intéressant de remarquer que du point de vue de l'inertie, seuls les photons interviennent (§ 3 chapitre 4); alors que du point de vue de l'action gravitationnelle, les photons et la boîte agissent. Il y a un partage des rôles qui est possible compte tenu de l'interaction constante de la boîte avec les photons.

12. Tenseur d'impulsion-énergie d'un fluide parfait au repos. -

L'équation (8,5) donne avec les composantes :

$$T^{\alpha\beta} = \sum_{l=1,N} n_{0l} m_l C^2 U_l^\alpha U_l^\beta \quad (8,19)$$

Si le fluide est macroscopiquement au repos dans le référentiel \mathcal{R}_m^0 , dans ce référentiel les vitesses des particules de matière sont celles liées à l'agitation thermique. Les composantes d'espace des quadrivitesses sont alors totalement décoréllées. Il en est ainsi également pour ce qui concerne les particules d'interaction. Il vient donc, pour les composantes dans \mathcal{R}_m^0 :

$$T^{ij}_{i \neq j} = \sum_l n_{0l} m_l C^2 U_l^i U_l^j = 0$$

Cette relation est tout à fait générale. Le fluide considéré peut être le gaz de photons du rayonnement thermique dans une cavité (voir § 14).

Cette hypothèse correspond à l'isotropie microscopique (positions et vitesses des molécules) parfaite du fluide autour de chaque point et à chaque instant; et un fluide pour lequel cette hypothèse est vérifiée est appelé un *fluide parfait*. Pour que cette isotropie microscopique autour de chaque point puisse avoir lieu lorsque les différentes parties macroscopiques du fluide sont animées de mouvements différents, il faut que la viscosité soit nulle. Si le fluide est au repos, cela n'est pas nécessaire.

Considérant macroscopiquement le fluide comme immobile, la densité d'énergie T^{00} est égale à ρC^2 ; ρ étant la masse volumique macroscopique du fluide dans le référentiel \mathcal{R}_m^0 où il est macroscopiquement au repos. Notons que ρ a une part due à l'énergie cinétique des particules, et c'est pourquoi nous ne le notons pas ρ_0 qui correspondait à un seul type de particules immobiles les unes par rapport au autres dans un petit volume entourant le point considéré.

Ainsi le gaz de photons considéré a une masse volumique non nulle (voir ci-dessus la boîte aux deux photons § 3 chapitre § 4); de même la masse volumique du proton est supérieure au quotient de la masse des trois quarks et des gluons par le volume qu'ils occupent, les quarks étant relativistes.

D'autre part, par raison de symétrie, aucune direction n'étant privilégiée : $T^{11} = T^{22} = T^{33} = p$ (voir § 7); et la densité d'impulsion T^{i0} est nulle. On obtient dans \mathcal{R}_m^0 :

$$T^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \rho C^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad (8, 20)$$

13. Formulation indépendante du système de coordonnées du tenseur d'impulsion-énergie d'un fluide parfait au repos. - Considérons le tenseur :

$$T = (\rho C^2 + p) \vec{U} \otimes \vec{U} - p \vec{\eta} \quad (8, 21)$$

Voir (§ 5 chapitre 5) pour $\vec{\eta}$. \vec{U} est la quadrivitesse du référentiel \mathcal{R}_m^0 par rapport au référentiel du laboratoire, c'est à dire la quadrivitesse macroscopique du fluide. Il s'agit donc du mouvement d'ensemble du fluide qui reste au repos dans son référentiel. C'est à dire que tous les points du fluide ont la même vitesse.

Les composantes s'écrivent :

$$T^{\alpha\beta} = (\rho C^2 + p) U^\alpha U^\beta - p \eta^{\alpha\beta} \quad (8, 22)$$

Dans le référentiel \mathcal{R}_m^0 on obtient :

$$\begin{aligned} T^{00} &= \rho C^2 + p - p = \rho C^2 \\ T^{ii} &= p \quad ; \quad T^{ij}_{i \neq j} = 0 \end{aligned}$$

c'est à dire la formulation (8,20).

D'après le § 4 du chapitre 5, T est le tenseur d'impulsion-énergie du fluide.

On voit avec l'expression (8,21) du tenseur d'impulsion-énergie, qu'on retrouve l'expression (8,4) pour un seul type de particules, quand $p = 0$. Un seul type de particules veut dire qu'il n'y a aucun mouvement aléatoire à l'intérieur du fluide, qui s'ajouterait au mouvement d'ensemble de quadrivitesse \vec{U} , c'est à dire que $\mathcal{R}_m^0 = \mathcal{R}^0$.

Ainsi la pression est bien due à ces mouvements aléatoires de particules de matière ou de champ, assurant un débit d'impulsion interne permanent dans le référentiel de repos macroscopique du fluide \mathcal{R}_m^0 . Nous le voyons d'ailleurs sur l'étude statistique que nous avons fait de l'expression (8,19).

Prenons l'exemple du fluide constitué par l'ensemble des galaxies de l'univers. Si les galaxies ont un mouvement aléatoire les unes par rapport aux autres, il

lui correspond une pression de ce fluide. Tel est le cas, la galaxie d'Andromède par exemple se rapprochant de la notre à la vitesse de 50 km/s.

Cette pression qui est à l'origine d'un effet gravitationnel sera cependant considérée comme négligeable en cosmologie.

Dans le cas des barres massiques (§ 14 chapitre 7) nous avons supposé que la pression était nulle et T avait bien l'expression (8,4).

14. Trace du tenseur d'impulsion-énergie. - L'équation (8,19) donne :

$$T^\alpha{}_\alpha = \sum_l n_{0l} m_l C^2 U_l^\alpha U_{l\alpha}$$

(4,5) donne $\vec{U}^2 = U^\alpha U_\alpha = 1$. Donc :

$$T^\alpha{}_\alpha = \sum_l n_{0l} m_l C^2 \quad (8, 23)$$

Dans le cas d'un fluide au repos nous obtenons :

$$\sum_l n_{0l} m_l C^2 = \rho C^2 - 3p \quad (8, 24)$$

Considérons un ensemble quelconque de photons réels.

Nous obtenons ce cas avec la limite $m_l = 0$; $\cosh \varphi = U^0 = +\infty$; $m \cosh \varphi$ ayant une limite finie (cf § 3 chapitre 4). (8,23) donne alors $T^\alpha{}_\alpha = 0$. La trace du tenseur impulsion-énergie d'un ensemble quelconque de photons réels est nulle. Nous retrouverons cela au § 22.

Considérons maintenant un gaz homogène et isotrope de photons. L'expression (8,20) est valable, donc (8,24) s'applique alors et :

$$p = \frac{\rho C^2}{3} = \frac{u}{3} \quad (8, 25)$$

u étant la densité volumique d'énergie; dans le cas présent $u = T^{00}$. Nous retrouvons le résultat connu que la pression est égale au tiers de la densité d'énergie.