

## Chapitre Huit deuxième partie

### PROPRIÉTÉS DU TENSEUR D'IMPULSION-ÉNERGIE

Il ne faut pas voir de contradiction dans le fait que nous prenions ici une masse nulle pour les photons dans l'expression du tenseur d'impulsion-énergie; alors qu'au § 3 nous avons considéré que dans le cas où les photons virtuels ont un rôle attractif ils ont une masse négative (et une masse positive dans le cas répulsif). Ici les photons sont réels et ont une masse nulle. Par contre les photons virtuels assurant une interaction peuvent être considérés comme ayant une masse non nulle. Cela est souvent utilisé dans les calculs de Mécanique quantique relativiste. Nous ne considérons pas pour autant les photons virtuels comme moins réels que ceux que nous appelons réels!

Nous retrouverons au § 22 que tout ensemble de photons ne constituant pas forcément un fluide au repos, a un tenseur d'impulsion-énergie de trace nulle. Voir également à ce sujet le § 11.

Considérons maintenant un gaz parfait newtonien : les molécules sont sans interaction entre deux chocs, et ont une vitesse faible devant celle de la lumière. Dans le cas limite de chocs ponctuels, le tenseur d'impulsion-énergie des particules d'interaction est nul. Il reste uniquement celui des molécules. Il vient :

$$T^{00} = \sum_l n_{0l} m_l C^2 U_l^0 U_l^0 = \sum_l \frac{n_{0l} m_l C^2}{1 - \frac{v_l^2}{C^2}}$$

D'ailleurs :

$$\frac{T^{00}}{C^2} = \rho = \sum_l \underbrace{\frac{n_{0l}}{\sqrt{1 - \frac{v_l^2}{C^2}}}}_{\text{contraction des longueurs}} \underbrace{\frac{m_l}{\sqrt{1 - \frac{v_l^2}{C^2}}}}_{\text{augmentation de la masse apparente avec la vitesse}}$$

$$\frac{v_l}{C} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad T^{00} \simeq \sum_l n_{0l} m_l C^2 \left( 1 + \frac{v_l^2}{C^2} \right) \quad (8, 26)$$

(8,23) et (8,20) donnent :

$$\sum_l n_{0l} m_l C^2 = \sum_l n_{0l} m_l C^2 \left(1 + \frac{v_l^2}{C^2}\right) - 3p$$

$$0 = \sum_l n_{0l} m_l v_l^2 - 3p$$

La densité d'énergie newtonienne du gaz parfait est la densité d'énergie cinétique newtonienne :

$$u = \sum_l n_{0l} \left(\frac{1}{2} m_l v_l^2\right) \quad (8, 27)$$

Ici nous ne tenons plus compte des effets de contraction des longueurs et d'augmentation de la masse apparente avec la vitesse qui dans (8,24) seraient des infiniments petits d'ordre supérieur. Il vient :

$$0 = 2u - 3p$$

$$p = \frac{2u}{3} \quad (8, 28)$$

résultat classique de la théorie cinétique des gaz. On voit ici la puissance du formalisme utilisé qui permet de retrouver d'un seul coup ces formules obtenues plus laborieusement dans les cours usuels.

**15. Equation d'Euler d'un fluide parfait relativiste.** L'équation d'EULER d'un fluide traduit la loi fondamentale de la dynamique (1,4) équivalente à (1,2) également équivalente à (8,7). Montrons donc qu'on la retrouve à l'aide de (8,7) en utilisant l'expression (8,22) du tenseur d'impulsion-énergie.

Remarquons tout d'abord que dans un fluide parfait (dépourvu de viscosité), un petit élément du fluide est, dans le référentiel  $\mathcal{R}_m^0$  qui l'accompagne dans son mouvement, un fluide au repos pour lequel (8,21) est vraie. L'expression (8,21) du tenseur d'impulsion-énergie est donc vraie pour un fluide parfait.

Remarquons que l'écriture de (8,7) suppose que toutes les forces soient prises en compte dans le tenseur d'impulsion-énergie (voir § 5 et § 8 de ce chapitre). L'équation d'EULER suppose donc que le fluide ne soit pas soumis à un champ de forces volumiques qui ne serait pas pris en compte dans l'expression (8,21) du tenseur d'impulsion-énergie. Ainsi les forces au sein du fluide contribuent toutes à la valeur de la pression  $p$ . Ecrivons donc  $\frac{\partial T^{i\beta}}{\partial x^\beta} = 0$ .

Nous calculons cette expression dans le référentiel  $\mathcal{R}_m^0$  où  $U^i = 0$ .  $\frac{\partial(\rho C^2 + p)}{\partial x^\beta}$  et  $\frac{\partial U^\beta}{\partial x^\beta}$  n'apparaissent pas du fait de la nullité de  $U^i$ .

$$(\rho C^2 + p) U^\beta \frac{\partial U^i}{\partial x^\beta} - \frac{\partial p}{\partial x^\beta} \eta^{i\beta} = 0$$

abaïssons l'indice  $i$  :  $\eta_i^\beta = \delta_i^\beta$ .

$$(\rho C^2 + p) U^\beta \frac{\partial U_i}{\partial x^\beta} - \frac{\partial p}{\partial x^i} = 0$$

Pour un fluide dont la vitesse d'écoulement est faible devant  $C$ , on obtient :

$$U^0 \simeq 1 \quad ; \quad U_i = -U^i$$

$$v^i = CU^i$$

On obtient :

$$\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} = -\frac{1}{\rho + \frac{p}{C^2}} \frac{\partial p}{\partial x^i}$$

Il y a tout de même une différence avec l'équation d'EULER newtonienne, c'est la présence du terme  $\rho + \frac{p}{C^2}$  au lieu de  $\rho$ . Nous allons interpréter ce terme surprenant au paragraphe suivant.

$$\text{Pour } \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\nabla p}{\rho + \frac{p}{C^2}}$$

**16. Interprétation de "l'inertie" de la pression.** - Prenons un fluide au repos. L'équation d'EULER s'écrit :

$$-\nabla p = \left( \rho + \frac{p}{C^2} \right) \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

$$-\frac{\Delta p}{\Delta l} = \left( \rho + \frac{p}{C^2} \right) \frac{dv}{dt}$$

$$-\Delta p = p_2 - p_1 = \frac{F_2 - F_1}{S} = \frac{F}{S} \text{ (fig. 8.5).}$$

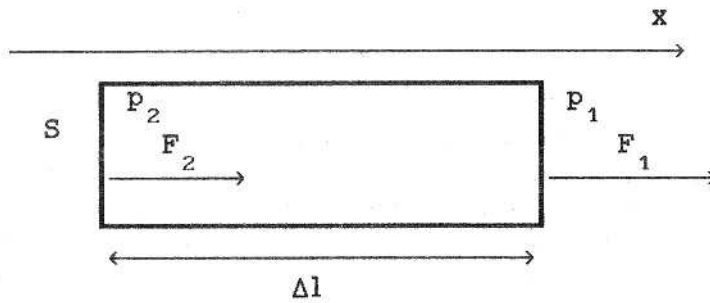


Fig. 8.5

avec  $V = S\Delta l$  on obtient :

$$F = \left( \rho + \frac{p}{C^2} \right) V \gamma \tag{8, 30}$$

à identifier avec  $F = m\gamma \Rightarrow m = \left( \rho + \frac{p}{C^2} \right) V$ .

D'où une densité de masse inerte apparente  $\frac{p}{C^2}$  en plus de  $\rho$ . La pression ajoute t'elle à l'inertie d'un corps? Dans ce cas, le calcul fait au §3 du chapitre 4 est faux. Il aurait fallu tenir compte de l'inertie due à la pression des photons et de l'inertie négative due à la pression négative de la boîte.

Pourtant le calcul fait au §3 du chapitre 4 est parfaitement correct. En Relativité restreinte, l'inertie est décrite par le quadrivecteur impulsion-énergie. Dans le cas de la boîte, seul les deux photons ont un quadrivecteur impulsion-énergie total non nul. On peut d'ailleurs laisser les photons libres et enlever la boîte. L'inertie de l'ensemble des deux photons est bien décrite par leur quadrivecteur impulsion-énergie seul qui est équivalent à celui d'une particule unique de masse  $m = \frac{2h\nu}{C^2}$  immobile, sans faire intervenir la pression.

La solution à ce paradoxe est dans le choix différent dans les deux cas du référentiel. Tout d'abord, dans l'exemple du §3 chapitre 4, l'accélération et la pression sont mesurées en utilisant le temps unique d'un référentiel galiléen. Nous allons voir que ce n'est pas le cas lorsque l'on considère que la pression a une inertie.

Utilisons le principe d'équivalence et considérons un fluide au repos dans le champ de gravité  $\mathbf{g}$ . L'équation d'EULER s'applique avec  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\mathbf{g}$ . Il vient :

$$\nabla p = \left( \rho + \frac{p}{C^2} \right) \mathbf{g} \quad (8, 31)$$

qui est l'équation de l'hydrostatique en relativité. Le terme  $\rho \mathbf{g}$  est lié au fait que les particules du fluide sont sensibles à l'interaction gravitationnelle dans l'espace qu'elles occupent et de ce fait, pressent plus fort en bas qu'en haut. Supposons que nous ayons un fluide constitué de particules pouvant transporter de l'impulsion (d'où une pression) et totalement insensibles à la gravitation. Cela n'est pas impossible car dans l'expérience de la boîte aux deux photons, la boîte avait une tension (pression négative) et une masse nulle, donc  $\rho = 0$ . Nous obtenons dans ce cas :

$$\nabla p = \frac{p}{C^2} \mathbf{g} \quad (8, 32)$$

Examinons deux tranches horizontales du fluide de surface  $S$  séparées par la hauteur  $\Delta l$  (fig. 8.6).

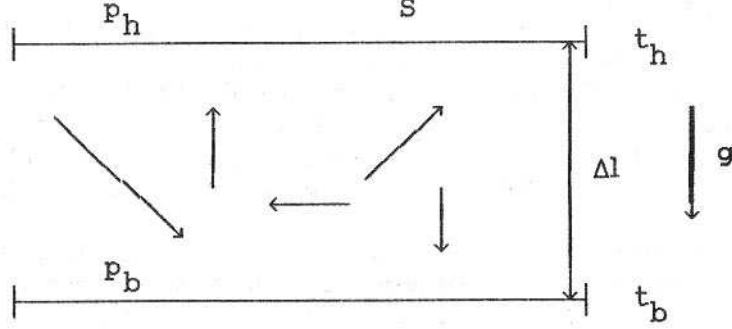


Fig. 8.6

Chaque particule transporte toujours la même impulsion; en effet une particule ne transporte pas une impulsion différente en haut et en bas, du fait qu'elle est insensible à la gravitation. Comment se fait-il alors que le flux d'impulsion soit supérieur en bas?

Puisque toutes les particules transportent la même impulsion, la pression c'est à dire le flux d'impulsion est proportionnelle au débit de particules franchissant la surface. Ce débit est le quotient du nombre  $N$  de particules traversant la surface par la durée  $t$  considérée :  $p = \frac{kN}{t}$ . Mais le point crucial est que cette durée est mesurée avec des horloges étalons locales. Si cette durée est  $t_h$  en haut et  $t_b$  en bas,

$$\frac{t_h - t_b}{t} = \frac{g \Delta l}{C^2}$$

$t_b < t_h$  implique que le débit vu en bas est supérieur à celui vu en haut. Pendant une durée mesurée en haut, le nombre de particules qui franchissent la surface du haut est égal au nombre de particules qui franchissent la surface du bas, mais la durée correspondante mesurée en bas est plus petite, d'où un débit plus grand. Intuitivement, vu du bas, la pression semble de plus en plus forte car le débit de particules arrivant du haut paraît de plus en plus important, à cause du ralentissement local du temps. Soit  $N$  le nombre de particules franchissant la surface en haut et en bas.

$$p_h = k \frac{N}{t_h} ; p_b = k \frac{N}{t_b} ; p_h \simeq p_b = p ; t_h \simeq t_b = t$$

$$\Delta p = p_b - p_h = kN \left( \frac{1}{t_b} - \frac{1}{t_h} \right) = kN \frac{t_h - t_b}{t^2}$$

$$\Delta p = p \frac{t_h - t_b}{t} = p \frac{g \Delta l}{C^2}$$

Il vient :

$$\frac{\Delta p}{\Delta l} = \nabla p = \frac{pg}{C^2}$$

ce qui est bien (8,32).

Cette inertie de la pression est due au fait que l'on considère une accélération constante pendant un certain laps de temps (même court) de façon à écrire l'équation d'EULER. La pression est une grandeur locale faisant appel pour son calcul au temps local.  $\rho$  et  $p$  dans (8,21) sont en effet mesurés avec des règles étalons parfaitement rigides et des horloges étalons, ces appareils étant immobiles par rapport au fluide au point où on fait la mesure, ce fluide étant dans un champ de gravité quelconque, aussi puissant qu'on veut (§ 2 chapitre 7). L'accélération entraîne un décalage des temps locaux aux deux extrémités du fluide considéré. Remarquons que le temps local, et les longueurs locales, en un point ne dépendent pas de l'état d'accélération de ce point (insensibilité du temps local à  $\mathbf{g}$ , sensibilité à  $\phi$ , § 6 chapitre 3).

Il est tout de même merveilleux que le terme  $p$  de  $\rho C^2 + p$  dans l'équation (8,21) soit lié au fait qu'il n'y a pas de temps absolu! Mais effectivement, la nature tensorielle de  $T$  implique la formule (8,21) en faisant appel à la structure de l'espace-temps de MINKOWSKI, donc au fait qu'il n'y a pas de temps absolu. Parfois, en physique, on est dépassé et ébloui par tout ce que contiennent les équations.

En conclusion, la solution au paradoxe est que dans les deux cas on ne prend pas le même référentiel, donc on ne prend pas le même temps, ce qui modifie l'expression de la pression qui correspond à un débit de particules donc fait intervenir le temps. Ainsi, si l'on mesure les forces à l'aide d'un référentiel galiléen comme dans le § 3 du chapitre 4, on a toujours :  $\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \rho S \frac{d\mathbf{V}}{dt}$  mais (8,29) implique que l'on n'a plus  $\mathbf{F} = -\nabla p S$ .

**17. Équilibre gravitationnel d'une étoile.** - Ce qui vient d'être dit dans le paragraphe précédent a des conséquences dramatiques pour ce qui concerne l'équilibre d'une étoile. Dans une étoile dense comme une étoile à neutron, le champ de gravité  $\mathbf{g}$  est énorme. Mais le gradient de pression n'est plus gouverné par  $\rho$ , mais par  $\rho + \frac{p}{c^2}$  qui lui est supérieur. La pression croît donc plus vite lorsqu'on s'enfonce dans l'étoile.

Comme nous l'avons vu au § 16 c'est le ralentissement du temps quand on s'enfonce dans l'étoile qui est la cause de cela. Pour lutter contre une pression, il faut appliquer soit-même une pression, et cela nécessite d'être "actif", car cela correspond à un débit de particules. Le ralentissement du temps qui fige les choses rend plus difficile cette lutte en bas, contre la pression venue du haut; comme une armée ne pourrait pas lutter contre un envahisseur dont le temps propre s'écoulerait plus rapidement que celui du pays envahi.

De plus, toutes les composantes du tenseur d'impulsion-énergie ont un effet gravitationnel. En particulier la pression attire, ce qui contribue à augmenter  $\mathbf{g}$ ; ceci est précisé par l'équation (17,21) et le commentaire qui suit du § 8 du chapitre 17.

Pour les étoiles newtoniennes telles que  $\frac{p}{c^2} \ll \rho$  il n'y a aucun problème. Par contre, lorsque  $\frac{p}{c^2}$  devient du même ordre de grandeur que  $\rho$ , les deux effets précédents jouant simultanément ont un effet catastrophique. Au delà d'une certaine masse pour l'étoile, la pression devient infinie au centre, ce qui montre qu'aucun équilibre n'est possible. L'étoile a atteint le stade d'effondrement ou collapse gravitationnel sans fin menant au trou noir. Cette masse limite est calculée au chapitre 17 et vaut :

$$M^2 = \frac{16C^6}{243\pi\rho G^3} \quad (8,33)$$

qui est une limite un peu plus contraignante que celle donnée en (7,6). Cela signifie qu'il y a effondrement gravitationnel avant que le rayon de l'étoile soit inférieur au rayon de SCHWARZSCHILD. Il ne peut donc pas exister de trou noir en équilibre hydrostatique. Tous les trous noirs sont en effondrement permanent. Cela est évident, puisque un trou noir correspond justement au fait que le temps local ne semble plus s'écouler par rapport au temps loin du trou noir. Il n'y a donc plus aucun moyen de lutter contre un débit infini de particules venant de l'extérieur.

**18. L'énergie gravitationnelle.** - Dans n'importe quel champ gravitationnel, on peut toujours prendre un référentiel galiléen qui est par exemple un ascenseur en chute libre. Dans cet ascenseur, quelle que soit sa vitesse, toute action gravitationnelle ou d'inertie disparaît localement. Il faut donc admettre que localement l'énergie gravitationnelle y est nulle. Ainsi, l'énergie gravitationnelle ne peut pas canoniquement être localisée. Elle est essentiellement non locale.

On ne peut donc pas considérer d'une manière canonique un tenseur d'impulsion-énergie lié à la gravitation.

Puisque dans l'ascenseur en chute libre, tout effet gravitationnel disparaît; on doit donc admettre qu'il n'y a aucun graviton. Vu d'un autre référentiel, la gravité est présente, il y a donc des gravitons.

Ainsi la notion même de gravitons donc également leur nombre correspond à un point de vue particulier. Cela est vrai pour toutes les particules. Un champ gravitationnel intense, dont l'intensité dépend du référentiel choisi, peut créer toute sortes de particules (c'est ce qui fait que les trous noirs rayonnent). Le nombre de particules créées dépendra du référentiel choisi. Il est connu que

dans un référentiel accéléré, donc également dans un champ de gravitation, un observateur voit un rayonnement électromagnétique thermique, là où un observateur en chute libre voit l'état du champ électromagnétique du vide à température nulle; le nombre de photons est bien sûr différent pour les deux observateurs.

Le nombre de particules vues dans un volume donné dépend donc du référentiel. Bien sûr, il y a cohérence entre différents référentiels. L'évènement consistant en la détection d'une particule par un appareil du type photomultiplicateur par exemple est vu dans tous les référentiels.

Lorsqu'on affirme que c'est le tenseur d'impulsion-énergie qui crée la gravitation, il faut donc conclure que dans ce tenseur, on fait intervenir toute forme de matière et d'interaction excepté la gravitation. Tel est le cas dans l'équation du champ d'EINSTEIN. Le rôle de la gravitation sur elle-même est pris en compte dans la non linéarité des équations du champ. Ainsi, considérons l'action gravitationnelle de deux masses  $m$ . Si l'on approche ces masses, il y a perte d'énergie gravitationnelle. Vu de loin, cela correspond à une diminution de l'action gravitationnelle donc de la masse globale affectée à l'ensemble. Mais ce phénomène n'est pas pris en compte en faisant intervenir un tenseur d'impulsion-énergie de la gravitation, mais directement par la non linéarité des équations du champ. L'action des deux masses rapprochées n'est pas la somme de l'action de chaque masse prise séparément ( cf § 12, chapitre 6).

**19. Cas d'une étoile.** - Considérons une étoile dans laquelle règne une pression énorme. Cette pression est créée par la gravitation qui assure la cohésion de l'étoile. On pourrait imaginer remplacer la gravitation par une membrane tendue à la surface de l'étoile ayant donc une composante de pression négative dans le tenseur d'impulsion-énergie. Ainsi à la pression positive de l'étoile devrait correspondre une pression négative de la gravitation qui sert à comprimer l'étoile.

Dans l'exemple de la membrane tendue, cette pression négative est cantonnée à la surface, mais on peut plutôt imaginer que la pression négative de la gravitation soit répartie uniformément dans tout le volume.

Cependant cette pression négative de la gravitation n'est pas prise en compte dans le tenseur d'impulsion-énergie créant la gravitation. Ainsi la valeur moyenne du terme de pression n'est plus nulle. La pression attire réellement, d'où l'effet mentionné au § 17. Nous verrons cependant aux chapitres 15 et 17 que vue de loin, l'étoile se comporte comme un corps caractérisé uniquement

par sa masse du point de vue de l'action gravitationnelle. Les termes de  $T^{\alpha\beta}$  autres que  $T^{00}$  sont “noyés” dans la déformation de l'espace-temps au voisinage de l'étoile, et disparaissent vu de loin. Encore un miracle!

**20. Valeur moyenne du tenseur d'impulsion-énergie en présence d'un champ de gravitation.** - Nous avons vu au paragraphe précédent que dans le cas d'une étoile liée par la gravitation, nous n'avons plus  $\overline{T^{\alpha\beta}} = 0$  pour  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ ; or cette équation provenait de  $\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0$ .

Cette équation ne doit donc plus être vraie. Nous verrons en effet qu'en présence d'un champ de gravitation, l'espace-temps n'est plus l'espace-temps plat, mais est un espace de RIEMANN avec une courbure. Nous verrons qu'il faut alors remplacer la dérivation ordinaire par ce qu'on appellera la *dérivation covariante*. L'équation précédente est à remplacer par:  $T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$ , le “;” signifiant dérivation covariante.

Ce tenseur  $T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$ , nous l'appellerons la *divergence covariante* (parfois par abus de langage, nous oublierons le mot covariante) du tenseur d'impulsion-énergie, dans le cas de l'espace courbe de la Relativité générale.

**21. Tenseur d'impulsion-énergie du champ de gravitation.** - Lorsque les masses étudiées créant la gravitation seront localisées dans un volume fini, comme dans le cas du système solaire par exemple, nous pourrons trouver un système de coordonnées telles que :

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$$

avec  $h_{\alpha\beta} \rightarrow 0$  à l'infini où on retrouve l'espace-temps plat. Nous montrerons au § 6 du chapitre 15 que l'équation  $T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$  pourra s'écrire dans ce système particulier de coordonnées que nous noterons encore  $x^\alpha$  comme pour les coordonnées galiléennes types :

$$\frac{\partial \tau^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial t^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0$$

$$\text{et} \quad \tau^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta} + t^{\alpha\beta}$$

Nous appellerons  $t^{\alpha\beta}$  le tenseur d'impulsion-énergie du champ de gravitation et  $\tau^{\alpha\beta}$  le tenseur d'impulsion-énergie total. On pourra d'ailleurs réécrire les équations du champ avec  $\tau^{\alpha\beta}$  comme terme source. On aura alors :

$$\overline{\tau^{\alpha\beta}} = \overline{T^{\alpha\beta}} + \overline{t^{\alpha\beta}} = 0 \quad \text{pour } (\alpha, \beta) \neq (0, 0)$$

avec  $\overline{T^{ii}} > 0$  et  $\overline{t^{ii}} < 0$ . Nous faisons bien ainsi apparaître un terme de pression négative lié à l'interaction gravitationnelle. Cependant la séparation envisagée entre  $\tau$ ,  $T$  et  $t$  n'est pas généralement covariante; en particulier ( $\tau^{\alpha\beta}$ )

et  $(t^{\alpha\beta})$  ne sont pas des tenseurs pour les transformations les plus générales des coordonnées en Relativité générale. Le concept d'énergie gravitationnelle sera donc lié à ce type très particulier de coordonnées, comme cela a déjà été dit au § 18.

## 22. Tenseur d'impulsion-énergie du champ électromagnétique. -

Nous allons montrer que lorsque des particules chargées interagissent électromagnétiquement, nous n'avons plus :  $\frac{\partial T_m^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0$ ;  $T_m^{\alpha\beta}$  étant le tenseur purement mécanique des particules matérielles. Nous pouvons alors ajouter le tenseur d'impulsion-énergie du champ électromagnétique  $T_{ch}^{\alpha\beta}$  tel que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_m^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial T_{ch}^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} &= 0 \\ T_m^{\alpha\beta} &= \sum_l n_{0l} m_l C^2 U_l^\alpha U_l^\beta \\ \frac{\partial T_m^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} &= \sum_l \left[ n_{0l} m_l C^2 U_l^\beta \frac{\partial U_l^\alpha}{\partial x^\beta} + m_l C^2 U_l^\alpha \frac{\partial (n_{0l} U_l^\beta)}{\partial x^\beta} \right] \end{aligned}$$

On suppose ici qu'il n'y a pas création ou destruction de particules. Le deuxième terme est alors nul. La conservation du nombre de particules entraîne en effet la nullité de la divergence du quadrivecteur  $n_{0l} \vec{U}_l$ , pour chaque valeur de  $l$ , c'est à dire pour chaque type (l) de particules. Le premier terme est nul également lorsqu'il n'y a aucune interaction, en effet :

$$0 = \Phi_l^\alpha = \frac{dp_l^\alpha}{d\tau} = m_l C \frac{dU_l^\alpha}{d\tau} = m_l C \frac{\partial U_l^\alpha}{\partial x^\beta} \frac{dx_l^\beta}{d\tau} = m_l C \frac{\partial U_l^\alpha}{\partial x^\beta} C U_l^\beta$$

Nous avons là, pour des particules de matière sans interaction uniquement, une nouvelle démonstration de la nullité de la divergence du tenseur d'impulsion-énergie.

Dans le cas où il y a interaction électromagnétique (5,4) et (5,82) donnent :

$$\begin{aligned} \Phi_l^\alpha &= q_l C F^\alpha{}_\beta U_l^\beta = m_l C^2 \frac{\partial U_l^\alpha}{\partial x^\beta} U_l^\beta \\ \sum_l n_{0l} m_l C^2 U_l^\beta \frac{\partial U_l^\alpha}{\partial x^\beta} &= F^\alpha{}_\beta \sum_l n_{0l} q_l C U_l^\beta = F^\alpha{}_\beta j^\beta \\ \frac{\partial T_m^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} &= F^\alpha{}_\beta j^\beta \end{aligned} \tag{8, 34}$$

Nous allons vérifier que l'expression suivante pour le tenseur impulsion-énergie du champ électromagnétique est la bonne :

$$T_{ch}^{\alpha\beta} = -\frac{1}{\mu_0} \left( F^\alpha{}_\gamma F^{\beta\gamma} - \frac{1}{4} \eta^{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} F^{\gamma\delta} \right) \tag{8, 35}$$

$$-\mu_0 \frac{\partial T_{ch}^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = F^\alpha{}_\gamma \frac{\partial F^{\beta\gamma}}{\partial x^\beta} + F^{\beta\gamma} \frac{\partial F^\alpha{}_\gamma}{\partial x^\beta} - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} \frac{\partial F^{\gamma\delta}}{\partial x^\beta}$$

$$\text{Compte tenu de : } \frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\beta}$$

Les deux derniers termes donnent :

$$F^{\beta\gamma} \frac{\partial F^\alpha{}_\gamma}{\partial x^\beta} - \frac{1}{2} F_{\gamma\delta} \frac{\partial F^{\gamma\delta}}{\partial x_\alpha} = F^{\beta\gamma} \frac{\partial F^{\alpha\gamma}}{\partial x_\beta} - \frac{1}{2} F_{\gamma\delta} \frac{\partial F^{\gamma\delta}}{\partial x_\alpha} = -F^{\beta\gamma} \frac{\partial F^{\gamma\alpha}}{\partial x_\beta} - \frac{1}{2} F^{\beta\gamma} \frac{\partial F^{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha}$$

$$\text{Or : } F^{\beta\gamma} \frac{\partial F^{\gamma\alpha}}{\partial x_\beta} = F^{\gamma\beta} \frac{\partial F^{\beta\alpha}}{\partial x_\gamma} = F^{\beta\gamma} \frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma}$$

par permutation des indices muets  $\beta$  et  $\gamma$ , puis antisymétrie de  $F$ . Les deux derniers termes deviennent alors, compte tenu de (5,76) :

$$= -\frac{1}{2} F^{\beta\gamma} \frac{\partial F^{\gamma\alpha}}{\partial x_\beta} - \frac{1}{2} F^{\beta\gamma} \frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} - \frac{1}{2} F^{\beta\gamma} \frac{\partial F^{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha} = -\frac{1}{2} F^{\beta\gamma} \left( \frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial F^{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial F^{\gamma\alpha}}{\partial x_\beta} \right) = 0$$

$$\mu_0 \frac{\partial T_{ch}^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = -F^\alpha{}_\gamma \frac{\partial F^{\beta\gamma}}{\partial x^\beta} = +F^\alpha{}_\gamma \frac{\partial F^{\gamma\beta}}{\partial x^\beta} = -F^\alpha{}_\gamma \mu_0 j^\gamma$$

$$\frac{\partial T_{ch}^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = -F^\alpha{}_\gamma j^\gamma$$

$$\text{Finalement : } \frac{\partial T_m^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial T_{ch}^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0$$

Nous donnons ci-dessous l'expression du tenseur d'impulsion-énergie du champ électromagnétique en fonction des vecteurs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$ .

$$T^{00} = \frac{\varepsilon_0 \mathbf{E}^2}{2} + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} \quad (8,36)$$

$$T^{0i} = T^{i0} = \frac{1}{\mu_0 C} \mathbf{E} \wedge \mathbf{B} = \frac{1}{C} \mathcal{P} \quad (8,37)$$

$\mathcal{P}$  étant le vecteur de POYNTING donnant le flux d'énergie.

Avec  $(i, j, k) = (x, y, z)$  ou  $(y, z, x)$  ou  $(z, x, y)$  :

$$T^{ii} = \frac{\varepsilon_0}{2} (E^{j^2} + E^{k^2} - E^{i^2}) + \frac{1}{2\mu_0} (B^{j^2} + B^{k^2} - B^{i^2}) \quad (8,38)$$

$$i \neq j : T^{ij} = -\varepsilon_0 E^i E^j - \frac{1}{\mu_0} B^i B^j \quad (8,39)$$

On voit avec (8,36) et (8,38) que nous retrouvons ce qui a été découvert pour des photons réels au § 14 : la trace du tenseur d'impulsion-énergie du champ électromagnétique, donc d'un ensemble quelconque de photons réels ou virtuels est nulle.

$$T^\alpha{}_\alpha = T^{00} - \Sigma T^{ii} = 0$$

**23. Étude d'un condensateur plan.** - Nous allons vérifier sur cet exemple et sur ceux des paragraphes suivants que la valeur moyenne du tenseur d'impulsion-énergie se réduit au terme de la densité d'énergie. Le condensateur est maintenu par une tige rigide de section  $s$ . Les plaques ont pour section  $S$  (fig. 8.7).

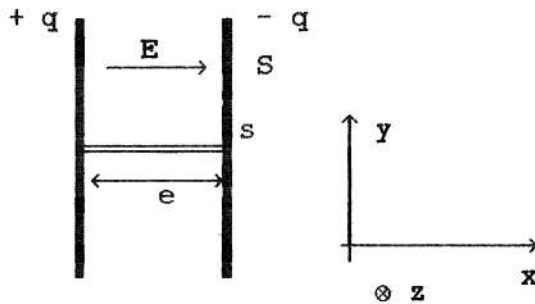


Fig. 8.7

$$q = CV \quad ; \quad C = \frac{\varepsilon_0 S}{e} \quad ; \quad V = Ee$$

La force appliquée par un des plateaux sur l'autre, fait intervenir le champ électrique appliqué par ce plateau, égal à la moitié du champ total.

$$F = q \frac{E}{2} = q \frac{V}{2e} = \frac{\varepsilon_0 S}{e} V \frac{V}{2e} = \frac{\varepsilon_0 S E^2}{2}$$

C'est la tige comprimée qui s'oppose à cette force; on en déduit :

$$T^{xx}_{\text{tige}} = \frac{\varepsilon_0 S E^2}{2s}$$

Le champ électrique est uniforme entre les deux plaques et nul à l'extérieur :

$$T^{xx}_{\text{ch}} = -\frac{\varepsilon_0}{2} E^2$$

$$V \overline{T^{xx}} = T^{xx}_{\text{ch}} S e + T^{xx}_{\text{tige}} s e = 0$$

Compte tenu de (8,36), (8,37), (8,38), (8,39), le tenseur d'impulsion-énergie vaut :

$$T^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \end{pmatrix} \quad (8, 40)$$

Les termes de pression positive  $T^{yy} = T^{zz}$  correspondent à la pression électrostatique. Les charges de mêmes signes sur chaque plateau tendent à se repousser et cela correspond à une pression selon les axes  $y$  et  $z$ .

**24. Énergie et particules de masses négatives.** - On peut se poser la question suivante : on a vu que les forces attractives sont interprétées comme dues à l'action de particules de masses négatives. La densité d'énergie correspondante,  $T^{00}$  doit être négative (masse négative dans (8,8)). Or les forces attractives de type électromagnétique par exemple correspondent toujours à une densité d'énergie donnée par (8,36) positive. Cela est visible également dans (8,40) où  $T^{00} > 0$  et  $T^{xx} < 0$ .

Considérons le cas de deux charges  $+q$  et  $-q$  s'attirant (Fig. 8.8).

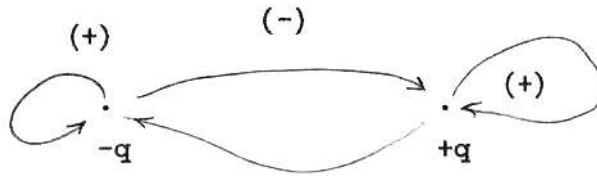


Fig. 8.8

On peut sauver la situation en considérant qu'il y a deux types de particules d'interactions : des particules notées  $(-)$  de masses négatives faisant la navette entre la charge  $q$  et la charge  $-q$ , et assurant l'attraction, et des particules notées  $(+)$  de masses positives partant d'une charge et revenant sur la même charge de telle sorte que leur effet soit nul. Ce type de distinction est courant en Théorie quantique des champs, en Électrodynamique quantique par exemple. L'énergie des particules  $(+)$  correspond à la renormalisation de la masse des charges (électron par exemple).

Les termes de densité d'énergie des deux types de particules, les  $(+)$  et les  $(-)$ , s'ajoutent pour avoir une contribution finale positive. Lorsqu'une charge est isolée, seules les particules  $(+)$  existent. Les particules  $(-)$  n'apparaissent que lorsqu'on rapproche les deux charges opposées. Elles sont créées à ce moment. Leur apparition correspond à la diminution d'énergie classique lorsqu'on rapproche les deux charges par apparition de l'énergie négative liée à leurs masses négatives; elles correspondent également à l'apparition de l'attraction entre les deux charges. Ces particules  $(-)$  voient à distance les deux charges se rapprocher et passent de l'une à l'autre par effet tunnel. Un tel passage par effet tunnel correspond justement en Mécanique quantique à l'état virtuel des particules.

Le fait que les particules de type  $(-)$  voient globalement l'emplacement des deux charges pour faire la navette correspond à une non localité habituelle en

Mécanique quantique. Elles voient à distance qu'elles peuvent passer par effet tunnel!

On peut étayer cela avec la formule (8,36). Une particule isolée  $+q$  correspond à la densité d'énergie :

$$u = T^{00} = \frac{\varepsilon_0 E_{+q}^2}{2}$$

$\mathbf{E}_{+q}$  étant le champ qu'elle crée. Lorsque les deux charges sont en présence :

$$\begin{aligned} u &= T^{00} = \frac{\varepsilon_0}{2} (\mathbf{E}_{+q} + \mathbf{E}_{-q})^2 \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}_{+q}^2 + \varepsilon_0 \mathbf{E}_{+q} \mathbf{E}_{-q} + \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}_{-q}^2 \end{aligned}$$

Le premier et le deuxième terme correspondent respectivement aux particules de type (+) pour la charge  $+q$  et pour la charge  $-q$ . Ces deux termes sont toujours présents et ont toujours la même valeur quelle que soit la distance des deux charges.

Le terme du milieu apporte une contribution globale négative en l'intégrant sur tout l'espace. On peut vérifier que cette contribution est égale à la variation d'énergie de l'ensemble des deux charges lors de leur rapprochement depuis une distance infinie jusqu'à la distance considérée.

Cette contribution est d'autant plus forte que les charges sont rapprochées et agissent donc fortement l'une sur l'autre. Il fait intervenir à la fois la charge  $+q$  et la charge  $-q$  et correspond donc bien aux particules de masses négatives donc d'énergie négative faisant la navette entre les deux charges. Il disparaît, ainsi que les particules de masses négatives, lorsque les deux charges sont infiniment éloignées.

**25. Étude d'une barre tournante.** - On considère une barre de masse négligeable de section  $s$  se terminant aux deux bouts par deux petites masses  $m$  (fig. 8.9).

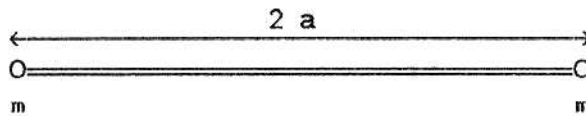


Fig. 8.9

L'ensemble est supposé tourner autour du centre de gravité; l'angle que fait la barre avec l'axe des  $\mathbf{x}$  est  $\omega t$ . La vitesse des masses est  $\mathbf{v}$ .  $F = -m \frac{v^2}{a}$  est la valeur algébrique de la force de tension de la barre.

Seuls  $\overline{T^{00}}$ ,  $\overline{T^{xx}}$  et  $\overline{T^{yy}}$  peuvent être non nuls, les barres indiquent : valeur moyenne sur le temps et l'espace.

Dans la suite, l'indice  $t$  fait référence au tenseur d'impulsion-énergie de la barre, tandis que l'indice  $m$  fait référence à celui des masses.

$T_t^{xx}$  est la composante en  $x$  de la force appliquée sur la surface unité perpendiculairement à l'axe des  $x$  (§ 7). Sur la figure (8,10), on voit que pour la surface :  $\Sigma = \frac{s}{\cos \omega t}$  perpendiculairement à l'axe des  $x$ ,

$$\text{on a : } F^x = -\frac{mv^2}{a} \cos \omega t$$

Donc :

$$T_t^{xx} = \frac{F^x}{\Sigma} = -\frac{mv^2}{as} \cos^2 \omega t$$

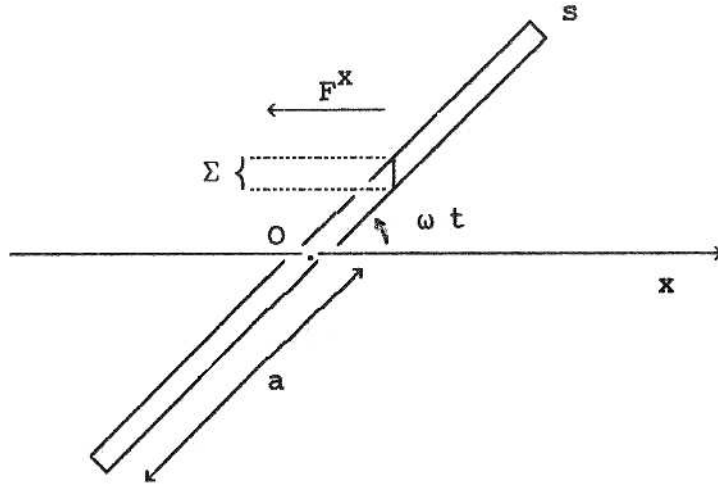


Fig. 8.10

$$\int \int \int T_t^{xx} dV = -\frac{mv^2}{as} 2 a s \cos^2 \omega t = -2mv^2 \cos^2 \omega t$$

Idem avec les composantes en  $y$  en permutant sinus et cosinus. D'autre part :

$$\begin{aligned} T_m^{xx} &\simeq \rho v_x^2 \\ T_m^{yy} &\simeq \rho v_y^2 \end{aligned}$$

$$\int \int \int T_m^{xx} dV = v^2 \sin^2 \omega t \int \int \int \rho dV = 2mv^2 \sin^2 \omega t$$

Là, le tenseur d'impulsion énergie n'est pas constant, mais en prenant les moyennes sur le temps également la démonstration reste vraie puisque :

$$\overline{\sin^2 \omega t} = \overline{\cos^2 \omega t} = \frac{1}{2}$$

$$\overline{T^{xx}} = \overline{T^{yy}} = 0$$

la barre indiquant : valeur moyenne sur le temps et l'espace.

**26. Étude d'une barre élastique.** - Considérons de nouveau la barre précédente. Cette fois ci, elle ne tourne pas mais elle est élastique avec la constante de raideur  $k$ . On suppose que les deux masses oscillent en se rapprochant et en s'éloignant l'une de l'autre. Soit  $x$  la distance de la masse de droite au centre de gravité et  $F$  la force qu'elle subit :

$$F = -k(x - a) ; x = A \cos \omega t + a ; \omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$v = -A\omega \sin \omega t ; v^2 = A^2\omega^2 \sin^2 \omega t$$

$$T_m^{xx} \simeq \rho v^2 = \rho A^2 \omega^2 \sin^2 \omega t$$

La barre désignant la valeur moyenne sur le temps :

$$\overline{\int \int \int T_m^{xx} dV} = 2mA^2\omega^2 \overline{\sin^2 \omega t} = mA^2\omega^2 = kA^2$$

$$T_{\text{barre}}^{xx} = \frac{F}{s} = -\frac{kA}{s} \cos \omega t$$

$$\int \int \int T_b^{xx} dV = -\frac{kA}{s} \cos \omega t 2xs$$

$$= -2kA \cos \omega t (A \cos \omega t + a)$$

$$\overline{\int \int \int T_b^{xx} dV} = -kA^2$$

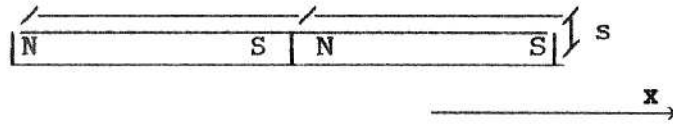
La valeur moyenne sur le temps et l'espace de  $T^{xx}$  est donc nulle.

À chaque valeur positive de  $T_b^{xx}$  à l'instant  $t$ , correspond en valeur absolue une valeur identique, mais négative, à l'instant  $t'$  avec  $\omega t' = \omega t + \pi$ ; cependant les valeurs négatives se produisent quand la barre est plus longue! D'où une valeur moyenne sur le temps et l'espace globalement négative et annulant exactement la contribution des deux masses.

## EXERCICES

### 8.1

On considère deux barreaux aimantés identiques de section  $s$  en contact par deux pôles opposés (voir figure).



En utilisant le formalisme du tenseur d'impulsion-énergie, déduire la valeur du champ magnétique uniforme qui règne à l'intérieur d'un barreau, de la force qu'il faut appliquer pour les séparer. Application numérique :  $F = 1 \text{ kg}$ ;  $s = 1 \text{ cm}^2$ .

## 8.2

1. Retrouvez la force d'attraction électrostatique entre deux charges ponctuelles opposées avec le formalisme du tenseur d'impulsion-énergie.
2. Étudiez de même le cas de la force répulsive entre deux charges égales.

## 8.3

On considère une fusée de hauteur  $h$  et de section  $S$  posée sur la Terre. Sur le plancher, une lampe émet des photons de fréquence  $\nu_b$  vers le haut avec le débit  $\mathcal{D}_b$ . Ils sont absorbés en haut.

1. En utilisant le principe d'équivalence, en déduire le débit des photons  $\mathcal{D}_h$  et leur fréquence  $\nu_h$  en haut.
2. Montrez que l'équation (8,31) est vérifiée.
3. Conclusion?

## 8.4

Une lampe immobile dans  $\mathcal{R}$  émet vers les  $x$  positifs une onde électromagnétique plane polarisée rectilignement avec la puissance  $\mathcal{P} = CT^{0x}$  pour la surface unité perpendiculaire à l'axe des  $x$ .

1. Calculez la puissance reçue dans le référentiel  $\overline{\mathcal{R}}$  animé de la vitesse  $v > 0$  en utilisant le formalisme du tenseur d'impulsion-énergie du champ électromagnétique.
2. Retrouvez ce résultat en considérant que l'onde est constituée de photons.
3. Lien avec l'exercice 8.3?