

# Chapitre Neuf

## ANALYSE TENSORIELLE EN ESPACE AFFINE

**1. Introduction.** - Nous avons vu au §3 du chapitre 7 que l'espace-temps de la Relativité générale est une variété riemannienne. Il nous faut, pour pouvoir complètement développer la Théorie de la relativité générale, étudier complètement cette structure mathématique. Ce sera fait au chapitre 11. Cette structure généralise celle d'espace affine euclidien sur un espace vectoriel dont la représentation la plus simple est notre espace à trois dimensions de la géométrie élémentaire. Nous étudions donc les espaces affines dans ce chapitre, et les espaces affines munis d'un produit scalaire donc d'un intervalle ou d'une distance au chapitre suivant, enrichissant ainsi progressivement la structure. Dans ces trois chapitres, les tenseurs joueront un rôle primordial.

Dans les trois chapitres qui suivent, purement mathématiques, nous prendront pour indices les lettres latines; cette notation permettant de se souvenir du caractère général de ces trois chapitres. Nous reviendrons aux lettres grecques quand nous aborderons la Relativité générale proprement dite au chapitre 12. Pour les vecteurs, la notation sera ici celle de l'espace à trois dimensions : vecteurs en caractères gras, sauf pour ceux obtenus à partir d'un bipoint notés avec une flèche au dessus.

**2. Espace affine sur un espace vectoriel.** - Nous rappelons ici les axiomes définissant cette structure : un ensemble d'éléments, appelés points,  $\mathcal{E}$ , est un *espace affine* sur l'espace vectoriel  $\mathbb{E}$  de dimension  $n$ , si à tout couple de points  $A$  et  $B$ , on peut associer un vecteur unique de  $\mathbb{E}$  appelé  $\overrightarrow{AB}$  tel que :

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA} \quad ; \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

De plus, quel que soit le point  $O$  de  $\mathcal{E}$  et le vecteur  $\mathbf{V}$  de  $\mathbb{E}$ , il existe un point  $M$  unique de  $\mathcal{E}$  tel que  $\overrightarrow{OM} = \mathbf{V}$ .

**3. Système de coordonnées.** - De façon générale, on appelle *système de coordonnées dans  $\mathcal{E}$*  tout mode de définition d'un point  $M$  de cet espace

en fonction de  $n$  scalaires notés  $u^i$ . On appelle ces nombres les coordonnées de  $M$  dans le système considéré. On appelle *lignes coordonnées* pour un tel système les trajectoires des points  $M$  dont une seule coordonnée varie. On appelle *coordonnées cartésiennes* de  $M$  relativement au repère fixe  $\{O, \mathbf{e}_i\}$  les nombres notés  $x^i$  tels que :  $\overrightarrow{OM} = x^i \mathbf{e}_i$ . On dit aussi *coordonnées rectilignes* car les lignes coordonnées sont des droites. Lorsque tel n'est pas le cas, on parle de *coordonnées curvilignes*.

Les coordonnées d'espace et de temps dans un référentiel galiléen sont de telles coordonnées rectilignes. Nous avons vu au paragraphe § 10 du chapitre 3 qu'on les appelle coordonnées galiléennes.

#### 4. Repère naturel associé à un système de coordonnées curvilignes.

- Rappelons que :

$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u^i} = \lim_{\Delta u^i \rightarrow 0} \left\{ \frac{\overrightarrow{OM}(u^1, \dots, u^i + \Delta u^i, \dots, u^n) - \overrightarrow{OM}(u^1, \dots, u^i, \dots, u^n)}{\Delta u^i} \right\}$$

et nous notons :

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial u^i} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u^i}$$

Dans le cas d'utilisation des coordonnées cartésiennes  $x^i = u^i$ , on a :

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial x^i} = \frac{(x^j + \delta_i^j \Delta x^i) \mathbf{e}_j - x^j \mathbf{e}_j}{\Delta x^i} \text{ssi} = \mathbf{e}_i \quad (9, 1)$$

On utilisera alors la notation :

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (9, 2)$$

Ceci permet de faire jouer un rôle prépondérant aux coordonnées définissant le point, comme cela a déjà été commencé dans la notation  $e^{*i} = dx^{*i}$  en (5,24).

Généralisant cette notation, dans le cas de coordonnées curvilignes quelconques, nous associerons aux coordonnées  $u^i$  la base de vecteurs notés  $\frac{\partial}{\partial u^i}$  par

$$\frac{\partial}{\partial u^i} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial u^i} \quad (9, 3)$$

$$\text{On a :} \quad d\vec{M} = \frac{\partial}{\partial u^i} du^i \quad (9, 4)$$

Le repère  $\{0; \frac{\partial}{\partial u^i}\}$  est appelé le *repère naturel* associé au système de coordonnées curvilignes. On a :

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial u^i} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial u^i}$$

qu'on peut démontrer composante par composante en utilisant (9,14).

Donc :

$$\frac{\partial}{\partial u^i} = \frac{\partial x^k}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial x^k}$$

Nous généraliserons également la notation utilisée en (5,67) et noterons :

$$du^{*i} = Du^i \quad (9, 5)$$

$du^{*i}$  est ainsi la dérivée covariante de la  $i^{\text{em}}$  coordonnée curviligne  $u^i$ . La notation introduite au § 6 du chapitre 5 est ainsi justifiée, puisque  $du^{*i}$  est introduite par le moyen d'une différentielle.

(5,68) donne avec  $U = u^i$  :

$$du^{*i} (d\vec{M}) = du^i \quad (9, 6)$$

Nous avons par (5,61), (5,62) :

$$du^{*i} = \frac{\partial u^i}{\partial x^j} dx^{*j}$$

donc :

$$du^{*i} \left( \frac{\partial}{\partial u^k} \right) = \frac{\partial u^i}{\partial x^j} dx^{*j} \left( \frac{\partial}{\partial u^k} \right) = \frac{\partial u^i}{\partial x^j} dx^{*j} \left( \frac{\partial x^l}{\partial u^k} \frac{\partial}{\partial x^l} \right) = \frac{\partial u^i}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial u^k} = \frac{\partial u^i}{\partial u^k} = \delta^i_k$$

(voir (9,14)).

Ainsi la base des formes linéaires  $du^{*i}$  est la base duale de la *base naturelle*  $\frac{\partial}{\partial u^i}$ . Ceci permet de retrouver (9,6) compte tenu de (9,4) et (5,23).

$U$  étant une fonction scalaire quelconque, nous avons (avec (9,14)) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial u^i} du^{*i} &= \frac{\partial U}{\partial u^i} \frac{\partial u^i}{\partial x^j} dx^{*j} = \frac{\partial U}{\partial x^j} dx^{*j} = DU \\ DU &= \frac{\partial U}{\partial u^i} du^{*i} \end{aligned} \quad (9, 7)$$

L'égalité au dessus de (9,7) correspond à ce qu'on appelle *l'invariance de la notation différentielle*. On a :

$$\begin{aligned} dU = DU (d\vec{M}) &= \frac{\partial U}{\partial x^j} dx^{*j} (d\vec{M}) = \frac{\partial U}{\partial x^j} dx^j = \frac{\partial U}{\partial u^i} du^{*i} (d\vec{M}) = \frac{\partial U}{\partial u^i} du^i \\ \text{avec :} \quad du^i &= \frac{\partial u^i}{\partial x^j} dx^j \end{aligned}$$

Les  $du^i$  peuvent être ainsi calculés à partir des  $dx^j$  choisis arbitrairement, et pourtant, l'expression de  $dU$  à partir des  $du^i$  est formellement identique à l'expression de  $dU$  à partir des  $dx^j$ .

On voit que cela utilise le théorème de composition des dérivations (9,14) :

$$\frac{\partial U}{\partial u^i} \frac{\partial u^i}{\partial x^j} = \frac{\partial U}{\partial x^j}$$

voir à ce sujet le commentaire au dessous de (9,21). On a ainsi deux modes de calcul de  $dU$  à partir des  $dx^j$  :

$$dx^j \rightarrow du^i = \frac{\partial u^i}{\partial x^j} dx^j \rightarrow dU = \frac{\partial U}{\partial u^i} du^i$$

$$dx^j \rightarrow dU = \frac{\partial U}{\partial x^j} dx^j$$

(9,7) nous permet de dire que la formule (5,62) est encore valable avec des coordonnées curvilignes quelconques dans le cas d'un champ de tenseur d'ordre 0. Nous allons voir ci-dessous qu'elle n'est plus valable dans le cas d'un champ de tenseur d'ordre quelconque, et qu'il faut la compliquer un peu.

La notation utilisée en (9,2) et (9,3) est-elle en accord avec celle utilisée en (5,75) où  $\frac{\partial}{\partial x^j}$  était un opérateur de dérivation sur les fonctions scalaires?

On peut associer au vecteur  $\mathbf{V}$  l'opérateur de dérivation sur les fonctions scalaires suivant :

$$\mathbf{V}(U) = DU(\mathbf{V}) \quad (9, 8)$$

$$\mathbf{V}(U) = \frac{\partial U}{\partial u^i} du^{*i} \left( V^j \frac{\partial}{\partial u^j} \right) = V^j \frac{\partial U}{\partial u^j} \quad (9, 9)$$

L'expression (9,9) est appelée *dérivée de U dans la direction V*.

et on a bien :

$$\frac{\partial}{\partial u^j}(U) = \frac{\partial U}{\partial u^j} \quad (9, 10)$$

Il y a donc bien accord avec la notation (5,75). Le vecteur  $\frac{\partial}{\partial u^i}$  est l'opérateur de dérivation utilisé dans (5,73) et (5,75), ceci étant généralisé à des coordonnées curvilignes quelconques. Par contre nous n'identifierons pas  $\frac{\partial}{\partial u^i}$  à une forme linéaire de base. Nous considérerons que c'est la combinaison linéaire de vecteurs de base correspondant à la définition donnée en (5,75).

Aucune confusion n'étant possible, les vecteurs  $\frac{\partial}{\partial u^i}$ , les  $u^i$  étant des coordonnées curvilignes quelconques, seront encore notés parfois ci-dessous, par

économie de notation  $\mathbf{e}_i$  (idem,  $du^{*i} = e^{*i}$ ). Les vecteurs  $\mathbf{e}_i$  sont cette fois-ci variables; on a un *repère mobile*.

Pour chaque indice nous avons un champ de vecteurs variables dont la dérivée covariante peut s'exprimer dans la base naturelle  $\{\mathbf{e}_i\}$  :

$$D\mathbf{e}_j = \Gamma^i_{jk} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^{*k} \quad (9, 11)$$

Les coefficients  $\Gamma^i_{jk}$  s'appellent les *symboles de Christoffel*.

Remarquons qu'on a encore comme dans un repère fixe :

$$e^{*j}(d\vec{M}) = e^{*j}(e_i du^i) = du^i \delta^j_i = du^j \quad (9, 12)$$

et donc (5,64) avec (5,30) et (5,57) donnent :

$$d\mathbf{e}_j = \Gamma^i_{jk} \mathbf{e}_i du^k \quad (9, 13)$$

**5. Changement de coordonnées curvilignes.** - Étudions la matrice du changement de base mobile associée à un changement de coordonnées curvilignes. Les anciennes coordonnées sont appelées  $u^i$ , les nouvelles  $v^j$ . Les anciens vecteurs de bases  $\mathbf{e}_i$ , les nouveaux  $\varepsilon_j$ .

Quelle que soit la fonction scalaire  $U$ , on a :

$$\frac{\partial U}{\partial v^j} = \frac{\partial U}{\partial u^i} \frac{\partial u^i}{\partial v^j} \quad (9, 14)$$

qu'on peut appeler : *loi de composition des dérivées partielles*. Il vient donc, pour les opérateurs de dérivation :

$$\frac{\partial}{\partial v^j} = \frac{\partial}{\partial u^i} \frac{\partial u^i}{\partial v^j} \quad (9, 15)$$

qui s'écrit :

$$\varepsilon_j = \mathbf{e}_i \frac{\partial u^i}{\partial v^j} \quad (9, 16)$$

et, par changement de notation :

$$\mathbf{e}_i = \varepsilon_j \frac{\partial v^j}{\partial u^i} \quad (9, 17)$$

En ce qui concerne la base duale, (9,7) donne avec  $U = u^i$  :

$$du^{*i} = \frac{\partial u^i}{\partial v^j} dv^{*j} \quad (9, 18)$$

Pour un vecteur  $\mathbf{V}$ , (5,34) donne :

$$V^i = \mathbf{V}(du^{*i}) = \mathbf{V} \left( \frac{\partial u^i}{\partial v^{\bar{j}}} dv^{*\bar{j}} \right)$$

$$V^i = \frac{\partial u^i}{\partial v^{\bar{j}}} V^{\bar{j}} \quad (9, 19)$$

De même, pour un tenseur quelconque (ici une fois contravariant, deux fois covariant), (9,17) et (9,18) permettent grâce à (5,32) de remplacer (5,33) par :

$$t^{\bar{i}}_{\bar{j}\bar{k}} = \frac{\partial u^{\bar{i}}}{\partial v^i} \frac{\partial v^j}{\partial u^{\bar{j}}} \frac{\partial v^k}{\partial u^{\bar{k}}} t^i_{jk} \quad (9, 20)$$

Un tableau de nombre se transformant suivant (9,20) est bien alors le tableau des composantes d'un tenseur. Nous avons ainsi généralisé ce qui a été dit au § 10 du chapitre 5 au cas des coordonnées curvilignes quelconques.

(9,14) donne avec  $U = u^i$  :

$$\frac{\partial u^i}{\partial v^k} \frac{\partial v^k}{\partial u^j} = \frac{\partial u^i}{\partial u^j} = \delta^i_j$$

La matrice de (9,17) est donc inverse de celle écrite en (9,18). La loi de transformation (9,17) est dite covariante, tandis que la loi de transformation (9,18) est dite contravariante. Si les  $u^i$  et  $v^j$  sont des coordonnées rectilignes, on a :

$$\frac{\partial u^i}{\partial v^j} = \Lambda^i_j = Cte$$

et on retrouve la matrice  $\lambda$  utilisée dans les chapitres 3 , 4 et 5. (9,18) donne, en l'appliquant au vecteur  $d\vec{M}$  :

$$du^i = \frac{\partial u^i}{\partial v^j} dv^j \quad (9, 21)$$

expression vraie quelles que soient les variables indépendantes; c'est à dire que les accroissements  $dv^j$  sont choisis arbitrairement ou calculés comme les différentielles des fonctions  $v^j$  d'autres variables,  $d\vec{M}$  étant construit avec différentes variables. Cette propriété traduite par l'existence des formes linéaires  $du^{*i}$  et  $dv^{*j}$  avec leurs conversion les unes dans les autres, repose sur la propriété mathématique (9,14) déjà utilisée pour démontrer (9,7) (ligne au dessus de (9,7)).

Ainsi, il suffit de connaître la correspondance entre deux systèmes de coordonnées curvilignes (sans que leurs correspondances avec les coordonnées rectilignes initiales aient à intervenir) pour en déduire la correspondance entre

les bases naturelles associées à ces deux systèmes. Cette propriété permettra de généraliser ces notions aux variétés différentiables dans lesquelles il n'existe pas de coordonnées rectilignes associées à un repère fixe.

**6. Dérivation covariante d'un vecteur dans un repère mobile.** -  $V^i = V^i$  est la  $i^{\text{em}}$  composante du vecteur  $\mathbf{V}$ . Le vecteur  $\mathbf{V}$  pourra être noté en utilisant les composantes,  $(V^i)$  :

$$\begin{aligned}\mathbf{V} &= (V^i) \quad ; \quad D\mathbf{V} = D(V^i) \quad ; \quad d\mathbf{V} = d(V^i) \\ d\mathbf{V} &= \mathbf{V}(M_2) - \mathbf{V}(M_1) = (V^j + dV^j)(\mathbf{e}_j + d\mathbf{e}_j) - V^j\mathbf{e}_j\end{aligned}$$

Le terme  $dV^j d\mathbf{e}_j$  est du second ordre.

$$= V^j d\mathbf{e}_j + dV^j \mathbf{e}_j = V^j \Gamma^i_{jk} \mathbf{e}_i du^k + dV^i \mathbf{e}_i = V^j \Gamma^i_{jk} \mathbf{e}_i du^k + \frac{\partial V^i}{\partial u^k} \mathbf{e}_i du^k$$

$$d\mathbf{V} = d(V^i) = \left( \frac{\partial V^i}{\partial u^k} + V^j \Gamma^i_{jk} \right) \mathbf{e}_i du^k$$

et, avec (9,12) :

$$D\mathbf{V} = D(V^i) = \left( \frac{\partial V^i}{\partial u^k} + V^j \Gamma^i_{jk} \right) \frac{\partial}{\partial u^i} \otimes du^{*k}$$

Nous utiliserons les notations suivantes :

$$(D\mathbf{V})^i_k = V^i_{;k} = \frac{\partial V^i}{\partial u^k} + V^j \Gamma^i_{jk} \quad (9, 22)$$

$$V^i_{,k} = \frac{\partial V^i}{\partial u^k} \quad (9, 23)$$

$$\begin{aligned}(d\mathbf{V})^i &= DV^i = V^i_{;k} du^k = dV^i + V^j \Gamma^i_{jk} du^k \\ \frac{DV^i}{D\tau} &= \frac{dV^i}{d\tau} + V^j \Gamma^i_{jk} \frac{du^k}{d\tau}\end{aligned} \quad (9, 24)$$

$\frac{DV^i}{D\tau}$  est le vecteur dérivée du vecteur  $(V^i(\tau))$  le long de la courbe  $u^k(\tau)$ . Nous dirons parfois *dérivée covariante* pour insister sur le fait qu'on a utilisé les symboles de CHRISTOFFEL pour calculer la dérivée exacte du vecteur avec les coordonnées curvilignes.

Le vecteur vitesse  $\mathbf{U}$ , est obtenu au moyen de (9,4), et  $U^i = \frac{du^i}{d\tau}$ . On a alors pour le vecteur accélération :  $\gamma^i = \frac{DU^i}{D\tau}$ . Attention, dans le cas de coordonnées curvilignes, les composantes de  $\overrightarrow{OM}$  ne sont pas  $u^i$ , et il est faux d'écrire pour les composantes  $U^i : \frac{Du^i}{D\tau}$ . Mais on peut écrire :

$$U^i = \frac{D(\overrightarrow{OM})^i}{D\tau} \quad ; \quad \text{et} \quad \gamma^i = \frac{D^2(\overrightarrow{OM})^i}{D\tau^2}$$

$\tau$  pourra être par exemple le temps newtonien  $t$  dans le cas de l'espace à trois dimensions, ou le temps propre dans le cas de la Relativité générale.

**7. Dérivation covariante d'une forme linéaire dans un repère mobile.** - Au point  $M_1$  le champ de vecteur  $\mathbf{V}(M)$  prend la valeur  $\mathbf{V}_1$ , le champ de forme  $\varphi(M)$  prend la valeur  $\varphi_1$ . Au point  $M_2$ , on a :  $\mathbf{V}_2$  et  $\varphi_2$ .

Ceci étant :

$$\begin{aligned}\varphi_2(\mathbf{V}_2) - \varphi_1(\mathbf{V}_1) &= \varphi_2(\mathbf{V}_2) - \varphi_1(\mathbf{V}_2) + \varphi_1(\mathbf{V}_2) - \varphi_1(\mathbf{V}_1) = (\varphi_2 - \varphi_1)(\mathbf{V}_2) + \varphi_1(\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1) \\ &\simeq (\varphi_2 - \varphi_1)(\mathbf{V}_1) + \varphi_1(\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1)\end{aligned}$$

En effet, remplacer  $\mathbf{V}_2$  par  $\mathbf{V}_1$  dans le premier terme introduit une différence du deuxième ordre.

$$\text{Ainsi : } d[\varphi(\mathbf{V})] = d\varphi(\mathbf{V}) + \varphi(d\mathbf{V}) \quad (9, 25)$$

$$d\varphi(\mathbf{V}) = d[\varphi(\mathbf{V})] - \varphi(d\mathbf{V})$$

Appliquons cela avec  $\mathbf{V} = \mathbf{e}_i$  :

$$\begin{aligned}(d\varphi)_i &= d\varphi(\mathbf{e}_i) = d[\varphi(\mathbf{e}_i)] - \varphi(d\mathbf{e}_i) \\ (d\varphi)_i &= d\varphi_i - \Gamma^j_{ik}\varphi_j du^k \\ (d\varphi)_i &= \left( \frac{\partial\varphi_i}{\partial u^k} - \varphi_j \Gamma^j_{ik} \right) du^k\end{aligned} \quad (9, 26)$$

Résumons les résultats concernant les vecteurs et les formes linéaires :

$$d\mathbf{V} = \left( \frac{\partial V^i}{\partial u^k} + V^j \Gamma^i_{jk} \right) \mathbf{e}_i du^k \quad (9,27)$$

$$d\varphi = \left( \frac{\partial\varphi_i}{\partial u^k} - \varphi_j \Gamma^j_{ik} \right) e^{*i} du^k \quad (9,28)$$

$$D\mathbf{V} = \left( \frac{\partial V^i}{\partial u^k} + V^j \Gamma^i_{jk} \right) \frac{\partial}{\partial u^i} \otimes du^{*k} \quad (9,29)$$

$$D\varphi = \left( \frac{\partial\varphi_i}{\partial u^k} - \varphi_j \Gamma^j_{ik} \right) du^{*i} \otimes du^{*k} \quad (9,30)$$

**8. Dérivation covariante d'un tenseur quelconque.** - Prenons l'exemple d'un tenseur deux fois covariant et une fois contravariant; nous noterons  $T = (t^{ij}_k)$ ;  $dT = d(t^{ij}_k)$ . Par le même raisonnement qu'au § 7, on a :

$$d[T(\varphi, \psi, \mathbf{V})] = dT(\varphi, \psi, \mathbf{V}) + T(d\varphi, \psi, \mathbf{V}) + T(\varphi, d\psi, \mathbf{V}) + T(\varphi, \psi, d\mathbf{V}) \quad (9,31)$$

$$dT(\varphi, \psi, \mathbf{V}) = d[T(\varphi, \psi, \mathbf{V})] - T(d\varphi, \psi, \mathbf{V}) - T(\varphi, d\psi, \mathbf{V}) - T(\varphi, \psi, d\mathbf{V})$$

Appliquons cela avec  $\varphi = e^{*i}$ ;  $\psi = e^{*j}$ ;  $\mathbf{V} = \mathbf{e}_h$  :

$$(dT)^{ij}_h = dT(e^{*i}, e^{*j}, \mathbf{e}_h) = Dt^{ij}_h$$

$$de_h = \Gamma^m_{hk} \mathbf{e}_m du^k$$

(9,28) donne pour  $\varphi = e^{*j}$  :

$$de^{*j} = -\Gamma^j_{mk} e^{*m} du^k \quad (9,32)$$

et donc :

$$De^{*j} = -\Gamma^j_{mk} du^{*m} \otimes du^{*k} \quad (9,33)$$

Il vient :

$$Dt^{ij}_h = (dT)^{ij}_h = dt^{ij}_h + \Gamma^i_{mk} du^k t^{mj}_h + \Gamma^j_{mk} du^k t^{im}_h - \Gamma^m_{hk} du^k t^{ij}_m$$

Permutons les symboles  $h$  et  $k$  :

$$(dT)^{ij}_k = t^{ij}_{k;h} du^h \quad \text{avec :}$$

$$t^{ij}_{k;h} = \frac{\partial t^{ij}_k}{\partial u^h} + t^{mj}_k \Gamma^i_{mh} + t^{im}_k \Gamma^j_{mh} - t^{ij}_m \Gamma^m_{kh} \quad (9,34)$$

Le ”;  $h$ ” signifie : *dérivation covariante par rapport à  $h$* .

$$DT = t^{ij}_{k;h} \frac{\partial}{\partial u^i} \otimes \frac{\partial}{\partial u^j} \otimes du^{*k} \otimes du^{*h} \quad (9,35)$$

(9,34) et (9,35) remplacent ainsi (5,62) et redonnent (9,7).

Ainsi, les indices contravariants introduisent un symbole de CHRISTOFFEL analogue à celui d'un vecteur, tandis que les indices covariants introduisent un symbole de CHRISTOFFEL analogue à celui d'une forme linéaire.

**9. Propriétés des symboles de Christoffel.** - Pour que les coordonnées soient rectilignes, c'est à dire que les vecteurs de bases associés soient constants, il faut et il suffit que les symboles de CHRISTOFFEL soient nuls. Cela se voit d'après leur définition dans l'expression qui donne la variation des vecteurs de bases pour une variation des coordonnées.

Ils sont symétriques en  $j$  et  $k$ , car on a :

$$\Gamma^i_{jk} \mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial u^k} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial u^k \partial u^j} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial u^j \partial u^k} = \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial u^j} = \Gamma^i_{kj} \mathbf{e}_i$$

Les  $\Gamma^i_{jk}$  ne sont pas les composantes d'un tenseur :

Examinons en effet la loi de transformation de ces coefficients dans un changement de coordonnées :

$$\Gamma^{\bar{i}}_{\bar{j}\bar{k}} \mathbf{e}_{\bar{i}} du^{\bar{k}} = d\mathbf{e}_{\bar{j}} = d \left( \frac{\partial u^j}{\partial u^{\bar{j}}} \mathbf{e}_j \right) = \frac{\partial u^j}{\partial u^{\bar{j}}} d\mathbf{e}_j + \frac{\partial^2 u^j}{\partial u^{\bar{k}} \partial u^{\bar{j}}} \mathbf{e}_j du^{\bar{k}}$$

Le premier terme vaut :

$$\frac{\partial u^j}{\partial u^{\bar{j}}} (\Gamma^i_{jk} \mathbf{e}_i du^k) = \frac{\partial u^j}{\partial u^{\bar{j}}} \Gamma^i_{jk} \frac{\partial u^{\bar{i}}}{\partial u^i} \mathbf{e}_i \frac{\partial u^k}{\partial u^{\bar{k}}} du^{\bar{k}}$$

Le deuxième terme vaut :

$$\frac{\partial^2 u^i}{\partial u^{\bar{j}} \partial u^{\bar{k}}} \mathbf{e}_i du^{\bar{k}} = \frac{\partial^2 u^i}{\partial u^{\bar{j}} \partial u^{\bar{k}}} \frac{\partial u^{\bar{i}}}{\partial u^i} \mathbf{e}_i du^{\bar{k}}$$

Ainsi :

$$\Gamma^{\bar{i}}_{\bar{j}\bar{k}} = \frac{\partial u^{\bar{i}}}{\partial u^i} \frac{\partial u^j}{\partial u^{\bar{j}}} \frac{\partial u^k}{\partial u^{\bar{k}}} \Gamma^i_{jk} + \frac{\partial^2 u^i}{\partial u^{\bar{j}} \partial u^{\bar{k}}} \frac{\partial u^{\bar{i}}}{\partial u^i} \quad (9, 36)$$

La présence du second terme exclut la tensorialité.

**10. Application au calcul de la divergence et du laplacien en coordonnées non rectilignes.** - Les symboles de CHRISTOFFEL permettent en effet de calculer automatiquement ces grandeurs :

$$\operatorname{div}(\mathbf{V}) = (D\mathbf{V})^i_i = \frac{\partial V^i}{\partial u^i} + \Gamma^i_{mi} V^m \quad (9, 37)$$

$$\nabla^2 \varphi = \operatorname{div}(\mathbf{grad} \varphi) = \frac{\partial \mathbf{grad}^i \varphi}{\partial u^i} + \Gamma^i_{mi} \mathbf{grad}^m \varphi \quad (9, 38)$$

Notons qu'en un point donné, il n'y a pas de problème particulier pour passer des composantes covariantes aux contravariantes et réciproquement par (5,37) et (5,42); avec  $g_{ij} = \mathbf{e}_i \bullet \mathbf{e}_j$ . La distinction entre base fixe et base mobile n'ayant plus de sens en un point fixe.

### 11. Équation des droites de $\mathcal{E}$ grâce aux symboles de Christoffel.

- On peut paramétrer la droite de façon à avoir :

$$\overrightarrow{OM} = \lambda \mathbf{V} + \mathbf{C}$$

$\mathbf{V}$  et  $\mathbf{C}$  sont des vecteurs constants. La droite est définie par la donnée des  $u^i(\lambda)$  coordonnées du point courant de la droite.

$$\mathbf{V}(\lambda) = V^i \mathbf{e}_i = \frac{d\vec{M}}{d\lambda} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial u^i} \frac{du^i}{d\lambda} = \frac{du^i}{d\lambda} \mathbf{e}_i$$

$\mathbf{V}(\lambda)$  est un vecteur constant, donc :

$$dV^i + \Gamma^i_{jk} V^j du^k = 0$$

avec  $V^i = \frac{du^i}{d\lambda}$ , soit :

$$\frac{d^2 u^i}{d\lambda^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{du^j}{d\lambda} \frac{du^k}{d\lambda} = 0 \quad (9, 39)$$

**12. Exemple : Équation des droites en coordonnées polaires du plan.** - Nous traitons complètement cet exemple pour familiariser le lecteur avec l'utilisation des symboles de CHRISTOFFEL.

Dans le plan (xOy) rapporté au repère orthonormé  $\{O; \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ , on introduit les nouvelles coordonnées  $u^1 = r$  et  $u^2 = \theta$ , telles que :  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$ . Nous utilisons la notation suivante :

$$d\vec{M} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

$$d\vec{M} = \begin{pmatrix} dr \cos \theta - r \sin \theta d\theta \\ dr \sin \theta + r \cos \theta d\theta \end{pmatrix}$$

$$d\vec{M} = dr \mathbf{e}_r + d\theta \mathbf{e}_\theta \quad ; \quad \text{et donc :}$$

$$\mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_\theta = \begin{pmatrix} -r \sin \theta \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial u^k} = \Gamma^i_{jk} \mathbf{e}_i$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Gamma^r_{rr} = 0 \quad ; \quad \Gamma^\theta_{rr} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \quad \Rightarrow \quad \Gamma^r_{r\theta} = 0 \quad ; \quad \Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{1}{r}$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial r} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \quad \Rightarrow \quad \Gamma^r_{\theta r} = 0 \quad ; \quad \Gamma^\theta_{\theta r} = \frac{1}{r}$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -r \cos \theta \\ -r \sin \theta \end{pmatrix} = -r \mathbf{e}_r \quad \Rightarrow \quad \Gamma^r_{\theta\theta} = -r \quad ; \quad \Gamma^\theta_{\theta\theta} = 0$$

On vérifie bien que les symboles de CHRISTOFFEL sont symétriques en  $j$  et  $k$ .

On obtient les deux équations (le point signifie dérivée) :

$$\frac{d^2 r}{d\lambda^2} + \Gamma^r_{\theta\theta} \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{d\theta}{d\lambda} = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0$$

$$\frac{d^2 \theta}{d\lambda^2} + \Gamma^\theta_{r\theta} \frac{dr}{d\lambda} \frac{d\theta}{d\lambda} + \Gamma^\theta_{\theta r} \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} = \frac{1}{r} (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0$$

La deuxième équation donne  $r^2 \dot{\theta} = C$ . Si  $C = 0$   $\theta = Cte$ ; on a une droite passant par l'origine. Si  $C \neq 0$ , il faut résoudre le système :

$$\dot{\theta} = \frac{C}{r^2} \quad ; \quad \text{calculons } \ddot{r}:$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{dr}{d\theta} \frac{C}{r^2} = -C \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r} \right)$$

$$\ddot{r} = \frac{d}{d\theta} (\dot{r}) \frac{d\theta}{d\lambda} = -C \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) \frac{C}{r^2}$$

Il vient : 
$$-C \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) \frac{C}{r^2} - r \frac{C^2}{r^4} = 0$$

$$\ddot{y} + y = 0 \quad \text{avec} \quad y = \frac{1}{r} \Rightarrow y = A \cos \theta + B \sin \theta$$

$$\frac{1}{r} = A \cos \theta + B \sin \theta \quad \text{ou} \quad r \cos(\theta - \theta_0) = d$$

On a l'équation bien connue des droites en coordonnées polaires.

$d$  est la distance de l'origine à la droite.  $\theta_0$  est l'angle formé par la perpendiculaire menée depuis l'origine à la droite, avec le vecteur  $\mathbf{i}$ .

## EXERCICE

### 9.1

En utilisant l'équation (9,27) et les symboles de CHRISTOFFEL en coordonnées polaires du plan, retrouvez que  $\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}$ .