Chapitre Sept

INTRODUCTION À LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE

1. Le principe de relativité générale, ou principe d'équivalence entre l'inertie et la gravitation. - Rappelons que l'origine de la difficulté que posent les référentiels galiléens vient du fait qu'aucune expérience de mécanique ne permet de distinguer l'inertie de la gravitation, ceci parce que : $m_i = m_g$. De ce fait, si la trajectoire d'une particule est courbe, on ne peut pas savoir si c'est un effet de l'inertie, le référentiel choisi étant non galiléen, ou un effet de la gravitation, la particule étant attirée par un astre.

Donnons un exemple concret : Considérons un engin spatial dérivant dans l'espace, et mettons en marche les moteurs. Les objets à l'intérieur sont plaqués sur le plancher. Il est impossible de dire par des expériences de mécanique si c'est parce que l'engin est accéléré ou si, étant maintenu non accéléré grâce aux moteurs, les objets sont attirés par un champ de gravitation; ceci parce que la chute libre de l'engin dans le champ de gravitation est arrêtée par les moteurs.

Nous généraliserons en supposant, comme le fit EINSTEIN, qu'aucune expérience de physique réalisée localement (Il est important de préciser "localement"; voir à ce sujet l'étude de la Théorie de BRANS et DICKE au chapitre 19) dans l'engin ne permet de distinguer ces deux cas. En fait, la distinction entre les deux cas devient alors une pure affaire de convention. Le choix de la valeur de la gravité g est ainsi arbitaire, et dépend du référentiel choisi arbitrairement comme non accéléré. On peut ainsi choisir de dire que la Terre est non accélérée et qu'il y règne la gravité g. Ce choix, qui correspond au choix de g est le choix de la jauge. C'est ce même type de choix qui fixe la valeur du quadrivecteur potentiel A^{α} en électromagnétisme. C'est en ce sens que ces deux interactions, comme d'ailleurs les deux autres (forte et faible), font intervenir les Théories de jauge. Ces Théories de jauge demanderaient bien évidemment un développement spécial hors de propos dans ce livre.

On arrive ainsi au *principe d'équivalence entre l'inertie et la gravitation* :

"*Aucune loi de la physique ne permet de distinguer entre un effet de l'inertie et un effet de la gravitation*". Ce qui revient à affirmer que : "*Aucune loi de la physique ne permet de savoir si un référentiel est accéléré ou non*". Notons que le fait que la perte de masse due à l'interaction forte dans les noyaux atomiques soit la même en terme de masse inerte et de masse gravitationnelle amène à penser que l'interaction forte elle même ne permet pas de distinguer entre inertie et gravitation. Cela conduit donc logiquement au principe d'équivalence.

On distingue un principe d'équivalence simple dans lequel la gravitation elle même est exclue de ces lois de la physique, et un principe d'équivalence fort dans lequel elle est inclue. Les théories alternatives à la Relativité générale comme celle de BRANS et DICKE, qui se sont révélées fausses ne prenaient en compte que le principe au sens simple. La Relativité générale elle, prend le principe au sens fort. Dans ce dernier cas, nous verrons que la loi de force, c'est à dire la loi qui donne la courbure de l'espace-temps en fonction du tenseur d'impulsion-énergie est suggérée directement par le principe, compte tenu de l'argument de la simplicité; voir tout de même la remarque du dernier alinéa § 4.

Si l'on admet le principe d'équivalence simple seul, la perte d'énergie due à l'interaction gravitationnelle dans la formation de la Terre pourrait affecter différemment sa masse inerte et sa masse gravitationnelle. En effet dans ce cas l'énergie de gravitation "tombe"de façon un peut différente des autres formes d'énergie. Le rapport m_i/m_g est différent pour un défaut de masse dû à cette énergie.

Il résulte de cela par exemple, que la Terre et la Lune ne tombent pas de la même façon vers le Soleil, leur énergie gravitationnelle étant différente. Cela s'appelle *l'effet* NORDTVEDT, du nom de son découvreur. Un tel effet doit avoir lieu dans la Théorie de BRANS et DICKE qui ne prend le principe d'équivalence qu'au sens simple. Or en 1971, grâce à l'utilisation des réflecteurs à laser posés sur la Lune par la mission Apollo 11, la distance Terre-Lune put être mesurée à quelques centimètres près. Il résulta de cette expérience, que la Terre et la Lune tombent de la même façon vers le Soleil à 10^{-11} près, résultat ayant la même précision que celui vérifiant le principe d'équivalence normal. Ce résultat invalide la Théorie de BRANS et DICKE et confirme la Théorie de la relativité générale reposant sur le principe d'équivalence au sens fort.

De plus, on peut considérer que les particules élémentaires, comme l'électron par exemple, possèdent une énergie gravitationnelle (voir § 8 du chapitre 15). Le champ gravitationnel et le champ électrique deviennent en effet infinis au voisinage d'un électron considéré comme ponctuel.

On sait que l'on définit de cette manière le rayon classique de l'électron en écrivant que l'énergie de masse m_eC^2 se retrouve tout entière sous la forme d'énergie électrostatique d'une boule chargée uniformément.

En Electrodynamique quantique, l'énergie électromagnétique propre d'un électron est également infinie. Aucune preuve n'existe du fait que l'énergie gravitationnelle d'un électron soit faible. Il est même possible que l'énergie gravitationnelle très importante et négative compense l'énergie électrostatique très importante et positive. La résolution des divergences en Electrodynamique quantique passerait alors par la prise en compte d'une Théorie quantique de la gravitation.

Pour que le principe d’équivalence soit vrai pour toutes les particules élémentaires ayant des énergie gravitationnelles différentes, il est alors nécessaire de prendre le principe d’équivalence au sens fort, ce qui invalide la Théorie de BRANS-DICKE.

Le principe d’équivalence au sens fort seul, permet d’affirmer par exemple, qu’une étoile d’un système double, en rotation autour d’une autre étoile, fonctionne exactement comme si elle était seule, les effets de marée mis à part. Ceci est une exigence de simplicité vérifiable et admise actuellement par les astrophysiciens.

C’est donc une pure affaire de convention que d’affirmer qu’un référentiel est non accéléré, cette notion n’est pas absolue. Ainsi, la relativité du mouvement est étendue aux mouvements accélérés; c’est pourquoi on parle de Relativité générale comme nous l’avons dit au § 11 du chapitre 6. Le principe d’équivalence s’appelle également *principe de relativité générale d’*EINSTEIN (au sens simple, ou fort).

Il est certain que l’ensemble des étoiles et des galaxies définit grossièrement un référentiel. Mais sans aucune précision. Certes un objet peut posséder une grande accélération par rapport à l’ensemble des étoiles. Cependant rien ne permet de donner une valeur précise et absolue à cette accélération. Il est donc naturel par simplicité de supposer qu’une telle accélération est totalement indistinguable d’un champ de gravité par des expériences de physique locales.

Notons qu’en généralisant le principe de relativité restreinte à tous les mouvements possibles, nous avons pris en compte une interaction : la gravitation. Ces principes de relativité qui affirment que les lois de la physique ne distinguent pas entre un référentiel et un autre, correspondent à ce que l’on appelle des symétries. En physique, on dit que l’on a une symétrie lorsque quelque chose est invariant dans une transformation. Ce qui est invariant ici, ce sont les lois de la physique. La transformation est un changement de référentiel. En élargissant une symétrie, nous avons été amenés à prendre en compte une interaction : la gravitation. C’est ce type de structure qui est commune à toutes les Théories de jauges des interactions : en élargissant une symétrie (plus précisément en transformant une symétrie globale en symétrie locale dans laquelle les paramètres peuvent varier continuement d’un point à un autre), on découvre la nécessité d’une interaction et sa structure; les quatre interactions obéissent donc à des propriétés très profondes de symétrie. Il ne faut pas nous étonner de cela. Une symétrie caractérise des propriétés invariantes dans une transformation, donc quand d’autres choses changent. La description de l’univers correspond fondamentalement au changement avec la conservation de certaines structures. Sans changement, il ne se passerait rien, sans conservation de structure, on ne pourrait s’y retrouver!

2. Les référentiels galiléens en Relativité générale. - Le concept de référentiel galiléen semble s’évanouir en conclusion du paragraphe précédent. En effet, l’accélération étant relative, la notion même de référentiel non accéléré perd toute signification. Cependant les référentiels galiléens étaient essentiels pour la construction de la Relativité restreinte. Cette théorie, vérifiée expérimentalement, doit se retrouver comme cas limite dans la nouvelle théorie qu’on est en train de construire. Cette limite est obtenue lorsque l’interaction gravitationnelle est négligeable.

Ainsi, si l’on veut sauver la notion de référentiel galiléen, il faudra prendre comme tels des référentiels où tout effet gravitationnel est absent; tout effet d’inertie également, puisqu’on ne peut distinguer entre inertie et gravitation de manière absolue. Tel est le cas d’un référentiel en chute libre et sans rotation par rapport aux galaxies lointaines. Les particules non soumises aux autres interactions que la gravitation y obéissent bien au principe de l’inertie. Tout ceci est une conséquence du principe d’équivalence vu au paragraphe précédent.

Un tel référentiel accélère en effet au même rythme que les particules libres. Nous sommes assuré de cela si les particules sont animées de vitesses faibles devant celle de la lumière par rapport au référentiel; la Mécanique newtonienne est en effet valable dans ce cas et tous les objets tombent avec la même accélération. En particulier plusieurs référentiels en chute libre au même endroit et ayant des vitesses faibles devant C ont des mouvements de translations rectilignes uniformes les uns par rapport aux autres, ce qui est en accord avec cette propriété des référentiels galiléens utilisés en Relativité restreinte.

Un référentiel terrestre ne convient pas. En effet une particule, pour y être animée d’un mouvement rectiligne uniforme doit être soumise à une force d’origine non gravitationnelle : la réaction du plancher par exemple. Cette réaction ne peut pas être éliminée par aucune convention. Au contraire, dans le référentiel en chute libre, l’équivalence entre inertie et gravitation nous permet de convenir que la force gravitationnelle est nulle. On a alors une particule totalement libre et animée d’un mouvement rectiligne uniforme, vu de ce référentiel. Ce référentiel est bien ainsi galiléen.

Nous postulons donc que la Relativité restreinte s’applique telle quelle dans ces référentiels (voir également § 4 pour plus de précision). On peut dire que dans ces référentiels, tous les effets gravitationnels, quels qu’ils soient, sont parfaitement annulés par les effets d’inertie; et cela est la conséquence du principe d’équivalence vu au paragraphe précédent.

Ainsi nous arrivons à la formulation suivante : “*Un référentiel galiléen est un référentiel en chute libre et ne tournant pas par rapport aux galaxies lointaines, quel que soit l’endroit où il se trouve*.”(voir cependant le § 9 du chapitre 14).

Insistons sur la précision “quel que soit l’endroit ou il se trouve”, en particulier il peut se trouver dans un champ de gravitation extrêmement intense. Nous n’avons à priori aucune idée de ce qui peut se passer dans un tel champ. C’est le premier saut conceptuel que nous faisons ici (voir le deuxième au § 3; voir également § 1 chapitre 6; cas où la Relativité générale devient nécessaire).

Insistons également sur le fait suivant : Lorsque nous sommes en présence d’un champ de gravitation créé par un astre, donc non uniforme (fig. 7.1), différents référentiels en chute libre en différents endroits ne sont pas en mouvements de translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres, comme cela a déjà été mentionné au § 13 du chapitre 6. Or cela est une propriété essentielle demandée aux référentiels galiléens pour la construction de la Relativité restreinte. Nous en déduisons que, en présence d’un champ de gravitation non uniforme, ce qui est le cas général, il n’existe pas de référentiels galiléens globaux qui permettent de repérer tout évènement en n’importe quelle région de l’espace-temps avec ses coordonnées galiléennes. Nous ne pourrons donc appliquer les résultats de la Relativité restreinte que localement dans l'espace-temps au moyen de référentiels galiléens locaux. Nous verrons au § 2 du chapitre 12 que cela est lié au fait que l'espace-temps possède une courbure non nulle en présence d'un champ de gravitation. Dans ce cas, l'espace-temps n'est pas plat. Il n'a pas la structure d'espace affine sur l'espace de MINKOWSKI.

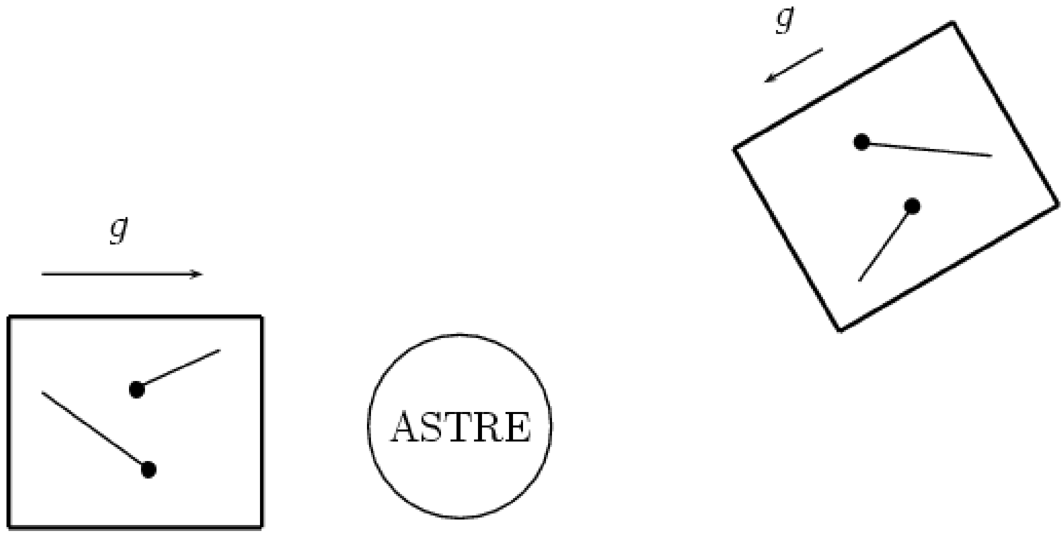

Fig. 7.1

3. L'espace-temps : une variété riemanienne. - Soient deux évènements A et A ' infiniment proches dans l'espace-temps, c'est à dire infiniment proches spatialement et temporellement dans un certain référentiel. Nous aurons donc : $x'^{\alpha} - x^{\alpha} = dx^{\alpha}$. On peut leur associer d'une manière intrinsèque un nombre ds^2 appelé intervalle entre ces deux évènements. Pour ce faire, il suffit de prendre un référentiel galiléen englobant ces deux évènements et de calculer dans ce référentiel $ds^2 = C^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$. Tout autre référentiel galiléen donnerait le même nombre avec ce calcul. Cela suppose que les hypothèses du § 3 chapitre 3 sont vérifiées dans les référentiels galiléens tels que nous les avons définis au § 2. Cela suppose donc *l'invariance de la vitesse de la lumière, toujours égale à C, mesurée avec des règles étalons parfaitement rigides et des horloges étalons fixées dans un référentiel galiléen tel qu'ils ont été définis au* § 2. D'autre part, nous avons vu au § 2 que pour les vitesses faibles devant celle de la lumière, tous les référentiels galiléens sont en mouvement de translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres, ce qui est équivalent à dire que le mouvement d'une particule libre dans un tel référentiel est rectiligne uniforme. Nous devons supposer ici que cela est vrai pour toute vitesse, aussi voisine qu'on veut de *C*.

Il faut insister sur le deuxième saut conceptuel que représente cette affirmation. Nous n'avons à priori aucune idée de ce qui se passe dans un champ de gravitation pour les vitesses voisines de celle de la lumière (voir § 1 chapitre 6).

Compte tenu des deux hypothèses précédentes, la transformation de Lorentz est alors vraie et tous les résultats de la Relativité restreinte des chapitres 3, 4, 5 s'appliquent dans les référentiels galiléens définis au § 2, et ceci quels que soient les endroits où ils se trouvent.

D'une manière générale, un espace dans lequel les points sont munis localement de coordonnées s'appelle une variété. Lorsqu'à deux points voisins, on peut associer un nombre ds^2, appelé *élément linéaire*, on parle de *variété riemanienne*. Tel est le cas de l'espace-temps en Relativité générale.

Un exemple de variété riemanienne est la surface d'une sphère. Les coordonnées peuvent être la latitude et la longitude. On a donc une variété à deux dimensions. Entre deux points voisins, on peut tracer l'arc de grand cercle passant par ces deux points et mesurer la longueur de cet arc. On associe bien d'une manière intrinsèque un nombre (appelé *distance sur la sphère*) à ces deux points. Les variétés riemaniennes généralisent la notion d'espace euclidien. L'axiome d'EUCLIDE n'y est plus forcément vrai. Par un point extérieur à une droite, on peut mener dans certains cas une infinité de droites ne coupant pas la précédente, ou dans d'autres cas, aucune. Rappelons que dans un tel espace une droite est par définition une *géodésique*, c'est à dire le chemin de longueur minimal entre deux points, quels que soient ces deux points. Cette longueur est appelée *distance* des deux points. La longueur d'un chemin quelconque est obtenue en faisant la somme des longueurs pour des points très voisins répartis le long du chemin. Dans le cas de l'espace temps, à cause du signe - dans le ds^2 les mots longueurs et distances sont remplacés par le mot intervalle. Une géodésique est dans ce cas le chemin d'intervalle maximal entre deux évènements.

La construction de l'espace vectoriel de MINKOWSKI, et la structure correspondante d'espace affine sur un espace vectoriel pseudo-euclidien de l'espace-temps, nécessitait l'utilisation d'un référentiel galiléen global dans tout l'espace dont les coordonnées permettent de repérer tout évènement. L'impossibilité d'avoir un tel référentiel galiléen global en présence d'un champ de gravitation non uniforme, vue au § 2 du chapitre 7, implique que la variété riemanienne n'a pas une telle structure d'espace affine sur l'espace de MINKOWSKI globalement. Nous verrons que cela est lié au fait que en présence d'un champ de gravitation, l'espace-temps n'est pas plat. Il y a une courbure caractérisée par le tenseur de courbure.

4. Le principe de covariance généralisée. - Faisons un bilan des résultats du paragraphe § 3 : l'espace-temps est une variété riemanienne dans laquelle les coordonnées u^α $\alpha = 0, 1, 2, 3$ utilisées pour repérer un événement pourront être absolument quelconques. Cependant, localement, autour de chaque point de l'espace-temps, il existe des référentiels galiléens avec des coordonnées x^α pour lesquelles la Relativité restreinte s'applique.

Lorsque nous dirons qu'il règne un champ de gravitation, ce sera parce que nous utilisons un référentiel non galiléen; c'est à dire en fin de compte des coordonnées u^α quelconques. Cela apparaîtra clairement par exemple au § 7 et § 8 du chapitre 12. Mais cela apparaîtra déjà aux § 5, § 8, et § 9 de ce chapitre.

Nous avons vu au paragraphe § 4 du chapitre 6 que les équations de MAXWELL ne sont plus vraies en présence d'un champ de gravitation. Il nous faudra trouver comment les modifier. Nous voyons sur cet exemple que le problème fondamental en Relativité générale sera d'écrire les lois de la physique en présence d'un champ de gravitation; c'est à dire d'après ce qui vient d'être dit, qu'il nous faudra écrire les lois de la physique avec des coordonnées u^α quelconques.

Une équation de la physique traduisant une loi générale devra garder la même forme quelles que soient les coordonnées utilisées, ce qui veut dire qu'elle devra être *généralement covariante*. Or une propriété mathématique fondamentale est qu'une équation généralement covariante est vraie dès qu'elle est vraie dans un système de coordonnées particulier.

Cela est une généralisation de ce qui a été vu au § 4 du chapitre 5 (d'où l'adjectif "généralement"devant covariante) : une égalité entre deux tenseurs est bien une équation covariante pour les transformations particulières de coordonnées vues au chapitre 5. Une égalité tensorielle vraie dans un système de coordonnées se traduit par l'égalité des composantes des tenseurs dans ce système de coordonnées particulier; et la simple donnée de ces égalités dans ce système particulier de coordonnées entraîne l'égalité des deux tenseurs, donc l'équation covariante correspondante. Mais cela sera généralisé au chapitre 12 aux changements quelconques de coordonnées nécessités par la Relativité générale.

Compte tenu de ce qui vient d'être dit, la traduction mathématique du principe d'équivalence est alors le *principe de covariance généralisée* : Le principe de covariance généralisée affirme qu'une équation de physique est vraie en présence d'un champ de gravitation si les deux conditions suivantes sont réunies :

1- L'équation est vraie en l'absence de gravitation, c'est-à-dire dans un référentiel galiléen où elle redonne l'équation déjà connue en Relativité restreinte; c'est à dire avec des coordonnées particulières, les coordonnées galiléennes types d'un référentiel galiléen.

2- L'équation est covariante dans un changement quelconque des coordonnées.

Notons qu'il est impossible que deux équations covariantes différentes donnent la même équation dans un référentiel où la gravitation est annulée. En effet, les lois de transfert des équations covariantes dans un changement de coordonnées déterminent la forme de l'équation dans tout référentiel à partir de sa forme dans un référentiel.

Le *principe de covariance généralisée* est équivalent au *principe d'équivalence entre l'inertie et la gravitation* ou *principe de relativité générale*. Il le traduit sous une forme mathématique :

En effet, considérons une équation obéissant aux deux conditions. La condition 2 montre que si elle est vraie dans un système de coordonnées, elle est nécessairement vraie dans tout système de coordonnées. Or, d'après le principe d'équivalence, il existe un référentiel galiléen dans lequel tout effet de gravitation disparaît. La condition 1 nous indique alors que l'équation est vraie dans ce référentiel, avec les coordonnées correspondantes, coordonnées galiléennes types. Elle est donc toujours vraie, même dans les référentiels où la gravitation se manifeste. Le principe de covariance généralisée s'est donc appliqué.

L'étude de la physique en présence d'un champ de gravitation consiste donc à rechercher les équations généralement covariantes dans l'espace-temps redonnant les équations connues en Relativité restreinte dans un référentiel galiléen. Cela est mathématiquement inapplicable pour trouver les équations de la gravitation elle-même, et il y a là une grande subtilité! Les lois de la physique dans un référentiel où il n'y a pas de gravitation ne nous renseignent pas sur les lois de la gravitation! C'est cette subtilité qui fait que les lois de la gravitation sont les seules lois qui ne sont pas démontrables par le principe de covariance généralisée, mais seulement suggérées (voir chapitre 13).

5. Etude d'une fusée. - Nous allons utiliser dans ce paragraphe le principe d'équivalence à l'étude d'une fusée. Il y a équivalence du point de vue des lois physiques entre une fusée posée immobile sur la Terre et une fusée moteurs allumés d'accélération g dans le vide interstellaire; Cf § 1 alinéa 2 (fig. 7.2). Voyons quelques conséquences que l'on peut en tirer :

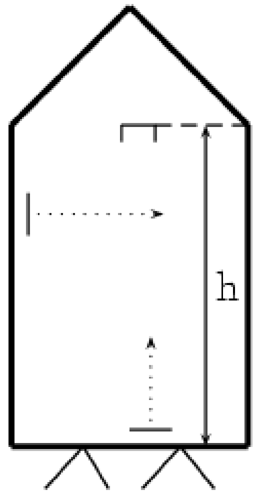

Fig. 7.2

a- Déviation de la lumière dans un champ de gravitation.

Considérons une petite lampe qui émet de la lumière depuis une paroi verticale de la fusée et perpendiculairement à celle-ci. La fusée accélère dans le vide. Supposons la fusée immobile au temps t = 0, le photon décrit une droite. Dans le référentiel accéléré lié à la fusée, il décrit donc une parabole.

On en déduit par le principe d'équivalence, que dans une fusée sur Terre, un photon émis de la même manière décrit aussi une parabole. Comme dans l'expérience de la boîte aux deux photons, on en déduit que la lumière est, comme la matière, sensible à la gravité. Le résultat précédent correspond à la déviation de la lumière que l'on obtient en supposant qu'elle est constituée de photons allant à la vitesse C et obéissant à la Mécanique newtonienne.

L'effet réel calculé avec la Relativité générale est en fait double de celui donné par le résultat précédent, à cause d'un effet supplémentaire de contraction des longueurs dont nous n'avons pas tenu compte. L'origine de cet effet sera expliquée au § 9.

b- Effet EINSTEIN de décalage vers le rouge de la lumière dans un champ de gravitation.

Considérons cette fois une lampe posée sur le plancher de la fusée émettant de la lumière vers le haut. La fusée est encore supposée immobile au temps t = 0 et elle a l'accélération g. Le photon met le temps $t = h/C$ pour arriver en haut, la hauteur de la fusée étant h (cela suppose que la fusée n'accélère pas trop). Pendant ce temps, la fusée a acquis la vitesse $v = gt = gh/C$. Le photon est donc reçu en haut avec un léger décalage DOPPLER de la fréquence :

$$\frac{\Delta\nu}{C} = \frac{v}{C} = \frac{gh}{C^2} \qquad (7,1)$$

Il en est donc de même pour une fusée posée sur Terre. La lumière montant dans un champ de gravitation est donc progressivement décalée vers le rouge.

Si une étoile est suffisamment massive, bien que la formule précédente ne s'applique plus, on peut en déduire qualitativement que la lumière s'échappant de la surface peut être tellement décalée vers le rouge qu'elle devient un rayonnement radio. Ce rayonnement très faible devient indécelable. On arrive déjà à une vision intuitive du phénomène des *trous noirs*.

c- Ralentissement du temps près d'un objet massif.

Une horloge placée au pied de la tour EIFFEL, par exemple, peut être constituée d'un quartz oscillant de fréquence ν pilotant l'émission d'une onde radio de fréquence identique ν. L'horloge émet un top toutes les $1/\nu$ secondes. En haut de la tour EIFFEL, chaque crête de l'onde radio qui arrive marque l'arrivée en haut d'un top de l'horloge du bas. En haut, les tops arrivent à la féquence $\nu' < \nu$ avec : $\Delta\nu = |\nu' - \nu|$; $\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{gh}{C^2}$. Considérons deux horloges identiques à la précédente préalablement synchronisées et qui indiquent donc la même heure. Brusquement on les sépare et on en place une en haut, l'autre en bas très rapidement, de telle manière que le temps qui s'écoule pendant cette opération est négligeable. On compte ensuite en haut le nombre de tops émis par l'horloge du bas pendant un intervalle de temps t (temps mesuré en haut). Ce nombre vaut $\nu' t$. L'horloge placée en haut a pendant ce temps là émis un nombre νt de tops. νt et $\nu' t$ sont supposés grands. La fréquence est suffisamment faible pour qu'une seule crête d'onde à la fois voyage de bas en haut. À la fin de la durée précédente, on réunit très rapidement en un temps négligeable les deux horloges. Pour ce qui concerne l'horloge du bas, on peut à la limite oublier quelques tops, ceux qui voyagent vers le haut pendant qu'on réunit les horloges. Ceci est négligeable devant le nombre total de tops. Comparons les horloges. On prend comme unité de temps, la durée entre deux tops de ces horloges examinée en haut. L'horloge du haut à émis νt tops correspondant au temps $T_h = \nu t$; celle du bas à émis $\nu' t$ tops correspondant au temps $T_b = \nu' t$. Ainsi l'horloge du bas retarde sur l'horloge du haut. Rappelons que les fréquences ν et ν' sont mesurées en haut où le temps qui s'écoule est *t*. On a :

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta \nu}{\nu} = \frac{gh}{C^2} \qquad (7,2)$$

Le champ de pesanteur **g** étant supposé uniforme, les conditions physiques qui règnent en haut et en bas sont les mêmes. Les deux horloges ne voient leur fonctionnement en aucune manière perturbé. Toute horloge basée sur n'importe quel phénomène physique peut servir à piloter l'onde de fréquence ν servant à compter les tops depuis le haut. Le raisonnement marche donc pour n'importe quel type d'horloge. Il faut donc en conclure que c'est le temps lui même qui s'écoule plus lentement en bas avec :

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{gh}{C^2}$$

Deux jumeaux séparés et placés l'un en haut et l'autre en bas puis réunis de nouveau s'apercevront qu'ils n'ont pas vieilli de la même manière. L'un pourra avoir 50 ans tandis que l'autre n'aura que 20 ans, alors qu'ils avaient 18 ans lors de leur séparation. ,

On peut aussi considérer que c'est l'oscillation d'un électron tournant sur une orbite bien précise autour du noyau d'un atome qui émet l'onde (approximation classique valable pour les grands nombres quantiques). À chaque phase de l'onde observée en haut, correspond l'arrivée de la vision d'une position de l'électron sur son orbite. Le ralentissement de la vibration de l'onde correspond au fait qu'en haut, on voit l'électron du bas osciller au ralenti. Le temps s'écoule plus lentement en bas, en effet la période de la rotation d'un électron autour d'un noyau d'un atome donné, à un niveau d'énergie bien précisé, est une constante précise pouvant servir d'étalon de temps.

Si l'objet est suffisamment massif, et si l'on regarde les choses évoluer à la surface de l'objet avec un télescope depuis un point éloigné, on a l'impression de voir un film au ralenti. Tellement ralenti pour un objet suffisamment massif, qu'on a l'impression que tout est immobile. Même les électrons autour des noyaux des atomes semblent immobiles. Aucune lumière ne semble donc être émise par des atomes ainsi figés. On a un *trou noir*, du nom donné à ces objets pour la première fois par le physicien WHEELER. La vie s'écoule dans le trou noir, mais une seconde à l'intérieur peut correspondre à un milliard d'années ou plus au dehors.

Nous voyons là que la coordonnée de temps, que nous appelons u^0 , utilisée dans la fusée posée sur Terre par exemple n'est pas la coordonnée $x^0 = Ct$ d'un référentiel galiléen. En effet, dans un référentiel galiléen, les horloges étalons indiquant le temps *t* placées en des endroits différents restent synchronisées, ce qui n'est pas le cas ici. Ainsi, l'étude de la physique en présence d'un champ de gravitation; c'est à dire, d'après le principe d'équivalence le choix d'un référentiel non galiléen, correspond bien à l'utilisation de coordonnées autres appelées u^α , comme cela a été dit au deuxième alinéa du § 4.

6. Vérifications expérimentales. - Nous donnons dans ce paragraphe quelques vérifications expérimentales récentes des résultats précédents.

a- Le décalage vers le rouge de la lumière dans un champ de gravitation fut découvert par EINSTEIN dès 1911 en utilisant comme nous le principe d'équivalence. Cependant il fallut attendre 1960 pour qu'une vérification expérimentale précise ait lieu. En 1960 POUND et REBKA utilisèrent l'effet MÖSSBAUER pour avoir des rayons γ de fréquence bien déterminée montant et descendant une tour. La confirmation la plus précise date de 1976. Une expérience embarquée dans une fusée utilisa des horloges maser à hydrogène vérifiant le ralentissement du temps dans le champ de gravité terrestre avec une précision de 0,02 %. Récemment la mission Voyager vérifia le décalage vers le rouge dans le champ gravitationnel de Saturne avec une précision de 1%. Le positionnement par G.P.S. utilise maintenant ce décalage.

b- La première vérification expérimentale de la déviation de la lumière dans un champ de gravitation date de 1919 :

Le Soleil modifie la position apparente des étoiles situées dans son voisinage sur la voûte céleste (fig. 7.3). La position des étoiles sur la voûte céleste n'est donc pas la même près du disque du Soleil lors d'une éclipse totale, et à un autre moment lorsque le Soleil n'est plus là. Ceci fut vérifié lors de l'éclipse totale du 29 mai 1919 par EDDINGTON. Le Soleil se trouve par un hasard extraordinaire juste dans l'amas ouvert des Hyades le 29 mai jour de cette éclipse totale. Le grand nombre d'étoiles de l'amas, à des distances angulaires variables du Soleil facilite énormément l'obtention de mesures précises. Les résultats numériques furent en accord avec ceux prédits par la Relativité générale, à 20% près, et éliminèrent définitivement la déviation moitié donnée par la Mécanique newtonienne. Ce fut une des premières confirmations expérimentales de cette théorie.

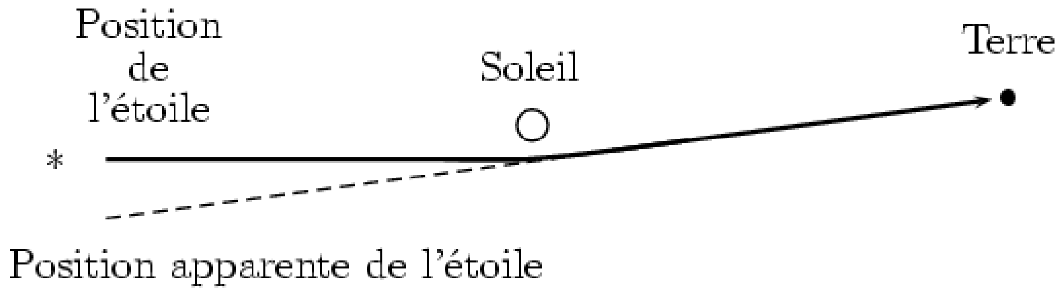

Fig. 7.3

Le développement des interféromètres radio pendant les années 1960 allié à la découverte des quasars (voir § 8) apporta une prodigieuse augmentation de la précision. La technique utilise la variation de l'écart angulaire de deux quasars pendant que le Soleil passe devant eux. Bien sûr la mesure peut se faire en continu en plein jour. En 1975 une douzaine de mesures de cette sorte avaient apporté une précision de 1,5%.

La déviation de la lumière considérée comme validée expérimentalement a maintenant d'importantes applications en astrophysique. Elle joue le rôle d'instrument pour étudier la structure des galaxies et des amas de galaxies qui agissent comme lentilles gravitationnelles donnant de multiples images des quasars éloignés. Elles sert également à obtenir une évaluation de la distance de ces quasars.

c- La découverte du pulsar binaire PSR 1913 + 16 , à 1600 années lumière de la Terre, au radiotélescope d'Arecibo (Porto Rico) en 1974, a montré que des objets hors du système solaire peuvent servir pour tester avec précision la Relativité générale, les effets précédemment décrits étant considérés comme vrais.

Un pulsar est une étoile à neutron de quelques kilomètres de diamètre, résidu de l'explosion en supernova d'une étoile plus massive que le Soleil. La rotation rapide obtenue par conservation du moment cinétique, alliée à un champ magnétique puissant et directionnel fait jouer à l'étoile à neutron le rôle d'un phare tournant émettant des pulses périodiques d'ondes radio.

Le pulsar étudié a une période de 59 $10^{-3}\,s$ et une orbite parcourue en 8 heures autour d'un autre pulsar compagnon invisible, sans doute parce que le faisceau tournant ne balaye pas la Terre.

L'avance du périastre de l'ellipse est de 4, 2^0 par an (voir le chapitre 16). Ce résultat, avec le décalage vers le rouge dans le champ de gravitation du compagnon, et avec le décalage de temps donné par la Relativité restreinte dû à la vitesse, ont été utilisés pour mesurer les différents paramètres du système. Les deux masses ont ainsi été trouvées égales à 1, 439 et 1, 389 masses solaires.

Le ralentissement de la période orbitale permet alors de mettre en évidence la perte d'énergie par émission d'ondes gravitationnelles (§ 4 chapitre 14). Le calcul théorique donne alors une augmentation de la période orbitale égale à celle mesurée à 0,5% près. Les américains Russell HULSE et Joseph TAYLOR ont eu le prix Nobel de physique 1993 pour cette détection indirecte des ondes gravitationnelles.

Un intérêt d'une telle vérification est de tester la Relativité générale dans le cas de champ de gravitation très puissants. L'énergie gravitationnelle intérieure des pulsars est importante, de telle sorte que cette expérience permet de vérifier le principe d'équivalence au sens fort. La Relativité générale a donc passé avec succès ce test qui invalide la Théorie de BRANS-DICKE.

7. Calcul du décalage vers le rouge grâce au principe de conservation de l'énergie. - Dans ce paragraphe, on n'utilise donc plus le principe d'équivalence. Considérons dans une expérience de pensée l'appareil suivant : en bas on réalise l'annihilation $e^+ + e^- \longrightarrow \gamma + \gamma$. Puis on fait monter à l'aide de miroirs les deux photons d'une hauteur h; voir fig. 7.4 .

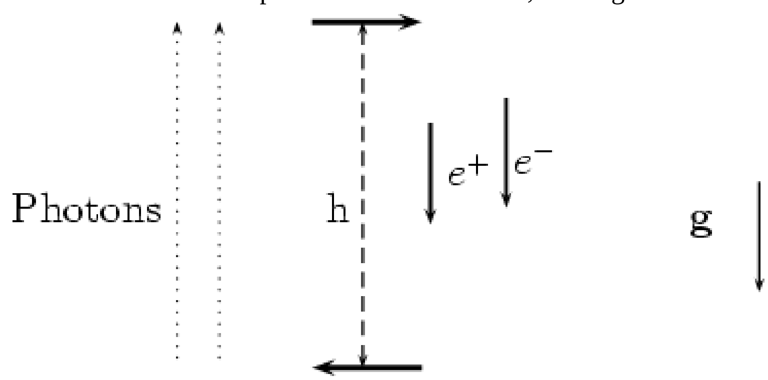

Fig. 7.4

Si leur fréquence n'est pas changée, ils restent identiques à eux-mêmes, et en haut on peut les rematérialiser avec $\gamma + \gamma \longrightarrow e^+ + e^-$. Ensuite on laisse retomber l'électron et le positron en recueillant l'énergie potentielle de pesanteur. On a réalisé un moteur perpétuel. En réalité, la solution à ce paradoxe est que les photons changent de fréquence en montant dans le champ de pesanteur. Ecrivons la conservation de l'énergie. Les électrons sont animés de la vitesse *v* en bas et immobiles en haut. La constante de Planck est ici notée h_P pour éviter la confusion avec la hauteur *h*. En bas :

$$2mC^2 + 2\frac{1}{2}mv^2 = 2h_P\nu$$

en haut :

$$2mC^2 = 2h_P\nu' \text{ ; d'autre part : } mC^2 \simeq h_P\nu \simeq h_P\nu'$$

$$2\frac{1}{2}mv^2 = 2mgh = 2h_P(\nu - \nu')$$

$$h_P\Delta\nu = mgh \quad ; \quad \Delta\nu = mg\frac{h}{h_P}$$

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{mgh}{\nu h_P} = \frac{mgh}{mC^2} = \frac{gh}{C^2}$$

Ce qui est intéressant, c'est que pour trouver un résultat de Relativité générale, on a utilisé la Mécanique quantique, c'est-à-dire le fait que l'énergie d'un photon de fréquence ν est $h_P\nu$. Il doit donc être possible d'unifier dans une théorie plus large la Mécanique quantique et la Relativité générale.

8. Etude du disque tournant : le temps. - Nous allons maintenant utiliser le principe d'équivalence pour l'étude d'un disque tournant. , Considérons un disque de rayon *r* tournant à la vitesse angulaire ω. Le bord est animé de la vitesse $v = \omega r$. Des horloges fixées sur le disque retardent par rapport à celles d'un référentiel galiléen avec $\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}\, t$. Les horloges sont synchronisées à $t = \tau = 0$. *t* est le temps du référentiel galiléen. Ceci est un résultat de Relativité restreinte. Remarquons que nous utilisons ici ce qui a été dit au § 6 du chapitre 3 : seule la vitesse influence l'écoulement du temps, et non pas l'accélération.

$$\tau = \sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{C^2}}\ t$$

La force centrifuge vaut :

$$F = m\frac{v^2}{r} \ ; \ \frac{F}{m} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = -\frac{d\phi}{dr}$$

ϕ étant le potentiel centrifuge.

$$d\phi = -\omega^2 r\,dr \quad \Rightarrow \quad \phi = -\frac{1}{2}\omega^2 r^2$$

$$\tau = \sqrt{1 + \frac{2\phi}{C^2}}\ t \qquad (7,3)$$

Nous supposons que la physique est décrite par des équations locales, et que le principe d'équivalence nous assure que ces équations locales sont exactement les mêmes dans un corps accéléré que dans un corps soumis à un champ de gravitation. Il nous faut alors trouver le bon paramètre local décrivant l'effet de ralentissement du temps. Ce ne peut être la valeur de l'accélération de gravité **g**, car nous avons vu au § 5 qu'une horloge en bas d'une tour retarde par rapport à celle en haut, même dans un champ de gravité uniforme où **g** garde partout la même valeur. Nous avons d'ailleurs supposé que les accélérations n'avaient pas d'influence sur l'écoulement du temps. Nous postulons ici dans un cas où il n'y a plus de vitesses, et en invoquant le principe d'équivalence (il doit y avoir un effet de ralentissement du temps) que c'est ϕ le potentiel gravitationnel qui est le bon paramètre. Nous postulons alors, et grâce au principe d'équivalence, que la formule (7,3) est valable dans un champ de gravité, *t* étant le temps mesuré par les horloges étalons là ou par convention nous avons choisi de prendre $\phi = 0$.

Dans le cas où nous sommes à l'extérieur d'un astre, $\phi = -\frac{GM}{r}$ à la distance *r* d'une étoile de masse *M* (où le temps est τ), le temps à la distance *r* de l'étoile s'écoule plus lentement avec :

$$\tau = \sqrt{1 - \frac{2GM}{rC^2}}\ t \qquad (7,4)$$

t est le temps propre mesuré à l'infini là où l'astre n'a plus aucune action.

Le temps *t* permet grâce à l'équation (7,4) de repérer tout évènement; mais nous voyons bien, puisqu'il est différent du temps indiqué par les horloges étalons, que ce n'est pas le temps d'un référentiel galiléen. Ainsi, ce qui a été dit au § 4 est encore justifié. Avec deux distances r_1 et $r_2 = r_1 + dr$, on a :

$$\frac{d\tau}{\tau} = \frac{d\left(\sqrt{1 - \frac{2GM}{rC^2}}\right)}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{rC^2}}}$$

$$\frac{d\tau}{\tau} = \frac{\frac{1}{2}\frac{2GM}{r^2C^2}}{1 - \frac{2GM}{rC^2}}dr$$

$$\frac{GM}{r^2} = g \quad ;\text{ et si} \quad 1 - \frac{2GM}{r} \simeq 1$$

$$\frac{d\tau}{\tau} = \frac{g\ dr}{C^2} = \frac{gh}{C^2}$$

On retrouve la formule approximative précédemment trouvée quand $\frac{d\tau}{\tau}$ était petit.

$$\text{Pour} \quad 1 - \frac{2GM}{rC^2} = 0$$

$$r = r_s = \frac{2GM}{C^2} \qquad (7,5)$$

c'est le *rayon de* SCHWARZSCHILD.

Le temps semble ne plus s'écouler vu de loin de l'astre : $\tau = 0 \times t = 0$. Si toute la masse de l'étoile est concentrée dans une rayon inférieure à r_s, on a un trou noir. Considérons pour simplifier le cas d'un objet de masse volumique constante, et supposons que la formule newtonienne donnant la masse *M* en fonction de ρ donne un bon ordre de grandeur.

$$M = \frac{4}{3}\pi r^3\rho \text{ ; le cas limite est avec } r = \frac{2GM}{C^2}$$

$$M = \frac{4}{3}\pi\rho\frac{8G^3M^3}{C^6} \quad ; \quad M^2 = \frac{3}{32\pi}\frac{C^6}{G^3\rho} \qquad (7,6)$$

Pour une étoile à neutrons , $\rho \sim 10^{15}$ *g/cm*^{3} et nous obtenons $M \simeq 5\ M_\odot$ ($M_\odot$ veut dire *masse solaire*) qui est un bon ordre de grandeur. En réalité, une étude plus complète faisant intervenir d'autres phénomènes physiques (§ 10 chapitre 17) donne :

$$M < 2,5\, M_\odot \qquad (7,7)$$

pour une étoile à neutrons. Au delà, on a un trou noir.

Les étoiles massives peuvent donc finir leur vie en trou noir. Le trou noir engloutit la matière environnante (chapitre 16) qui se rassemble dans un disque d'accrétion (voir la fin du § 9, chapitre 6), et s'engouffre dans le trou noir en émettant un puissant rayonnement *X* ou γ, dû au rayonnement synchrotron des charges accélérées et à la température extrèmement forte due à la friction. Ces sources de rayonnement permettent de confirmer la présence d'un trou noir, surtout si ce dernier fait partie d'un système binaire dont on peut déterminer la masse des constituants. Dans ce cas, on peut en effet vérifier que la valeur limite de 2,5 masses solaires est dépassée. Citons Cygnus X-1 et plus récemment dans la constellation de la Licorne AO620-00 de 3, 8 masses solaires.

Une autre possibilité est la présence de trous noirs dans le noyau des galaxies. $\rho \simeq 10^{-4}\ g/cm^3$ est un ordre de grandeur de la densité au voisinage du noyau d'une galaxie. On obtient alors $M \simeq 10^{10}\ M_{\odot}$ ce qui est une masse raisonnable pour un noyau de galaxie.

Lors de la formation des protogalaxies, la matière n'ayant pas un moment cinétique suffisant s'effondre dans le noyau en un gigantesque trou noir source d'un puissant rayonnement gamma et X. Ces noyaux de protogalaxies contenant un trou noir engloutissant des étoiles sont les *quasars* : objets très anciens (époque des protogalaxies) et donc très lointains, visibles comme des points lumineux ressemblant, hormis le spectre et les fluctuations d'éclat, aux étoiles, d'où leur nom (quasi stellar object).

Récemment une source γ intense, indice d'un trou noir, a été découverte à 300 a.l. (année lumière) du centre de notre galaxie.

On pense actuellement que les noyaux de toutes les galaxies contiennent des trous noirs, actifs ou non. Le trou noir se calme lorsqu'il a avalé toute la matière environnante. Cependant il peut être réactivé par différents mécanismes : collision de galaxies, déformation d'une galaxie par effet de marée causé par une autre galaxie. On a alors, plus près de nous, une radio-galaxie ou galaxie de SEYFERT, sorte de miniquasar.

Un puissant rayonnement est émis suivant l'axe de rotation du trou noir formant un jet. Un magnifique exemple d'un tel jet, est celui de la galaxie elliptique M 87 dans l'amas de la Vierge, célèbre également pour sa multitude d'amas globulaires servant de jalon dans la mesure des distances des galaxies.

9. Etude du disque tournant : l'espace. - Supposons que l'on dispose pour mesurer les longueurs de règles parfaitement rigides de un mètre de longueur. Revenons au disque tournant. Fixons sur le disque, sur sa circonférence, à la distance *r*, les règles bout à bout. Les règles tournent donc avec le disque. La longueur de la circonférence pour quelqu'un situé sur le disque étant λ, il y a λ règles. Vu du référentiel galiléen à l'instant *t* de ce référentiel, les règles précédentes ont la longueur $\sqrt{1-\frac{v^2}{C^2}}$ à cause de la contraction des longueurs.

Là encore, nous utilisons une hypothèse du même type que celle faite au paragraphe précédent : celle faite au § 7 du chapitre 3. Nous supposons que seule la vitesse influence les longueurs étalons et non pas les accélérations. Cela suppose en outre que nous disposons de matériaux étalons de longueurs, suffisamment rigides et indéformables, pour rester des corps parfaitement solides en étant soumis à des accélérations variables.

La circonférence vaut donc dans ce référentiel $l = \lambda\sqrt{1-\frac{v^2}{C^2}}$. On a évidemment $l = 2\pi r$ donc :

$$\lambda = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\frac{v^2}{C^2}}}\ r$$

C'est-à-dire que pour faire un tour sur un cercle de rayon *r* en rotation, il faut parcourir plus de chemin que $2\pi r$. Il n'y a pas d'effet de contraction des longueurs suivant un rayon, la vitesse étant alors perpendiculaire à la règle étalon. Quand le disque tourne, on peut donc placer plus de règles à la distance *r* que lorsqu'il est immobile.

Là encore, nous voyons apparaître des coordonnées nouvelles pour mesurer l'espace, liées à un référentiel, donc à un corps solide dans lequel on étudie la physique; la coordonnée λ par exemple. Ceci justifie encore la remarque du deuxième alinéa du § 4. L'important dans ces changements de coordonnées est le fait qu'on leur attribue une réalité physique : Coordonnées d'espace, ou coordonnées de temps. C'est à partir de là que la physique étudiée avec ces coordonnées sera différente (apparition d'un champ de gravitation). Nous verrons cela plus précisément au § 7 et § 8 du chapitre 12.

Il résulte de cela que si l'on met un disque en rotation, il doit apparaître à la périphérie des contraintes d'étirement. Ces contraintes peuvent aller jusqu'à casser le solide.

Mieux même : Un théorème de Relativité générale affirme qu'il est impossible de mettre en rotation un objet, un disque par exemple, parfaitement indéformable (totalement rigide). Cette contrainte totale de l'espace environnant l'objet, du seul fait qu'il est indéformable, est impressionnante.

Une image de ceci est qu'un piéton qui se dirige vers le bord du disque rapetisse, mais tous les éléments de son environnement rapetissent aussi, et de la même manière que lui, de tel sorte qu'il ne s'en rend pas compte. Cependant il s'en rend compte s'il fait un tour complet, car il lui faudra faire beaucoup plus de pas que la traversée suivant un diamètre le laissait prévoir. L'effet est visualisé sur la figure 7.5 avec des disques étalons, dans le cas inverse (qui est celui d'un astre attirant) où c'est vers le centre que les objets étalons rapetissent.

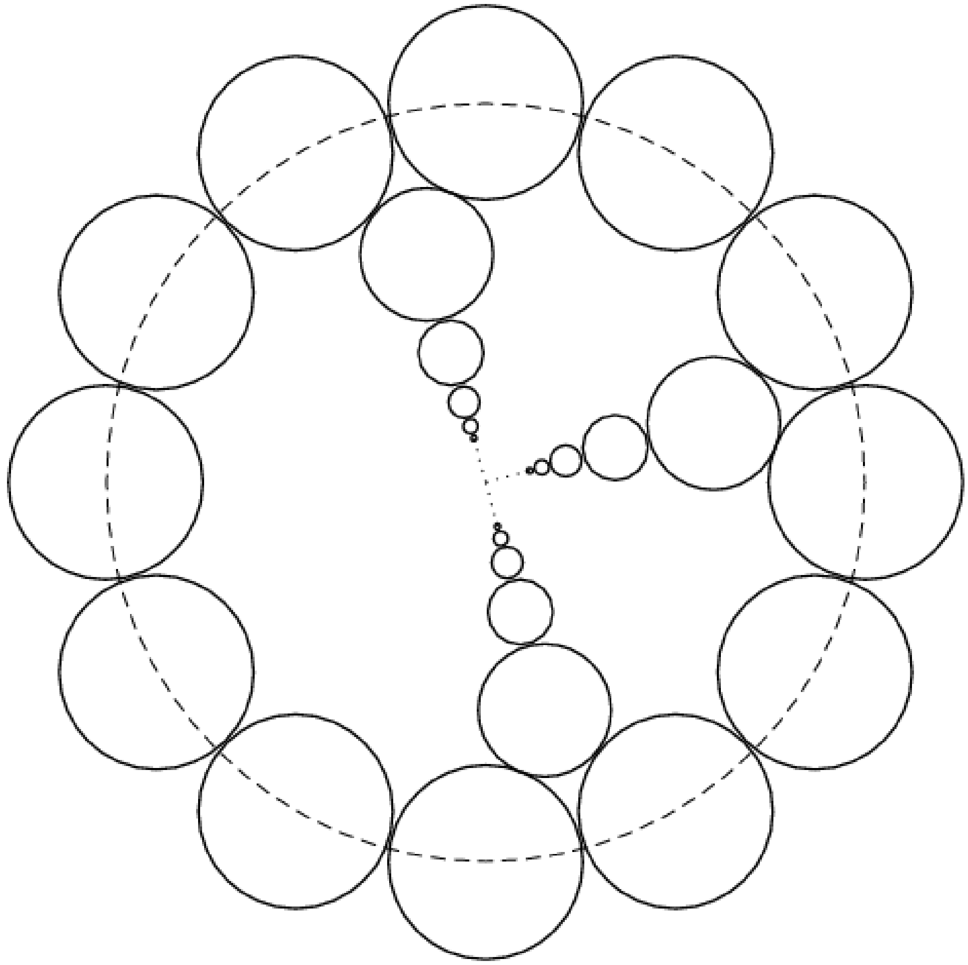

Fig. 7.5

À cause du principe d’équivalence, lorsqu’on se rapproche d’une étoile massive, on descend dans un puit de potentiel gravitationnel, comme lorsqu’on s’éloigne du centre du disque, et tout rapetisse aussi. C’est comme si l’on voulait entrer dans une maison minuscule, et qu’une fois à l’intérieur elle nous paraisse immense, parce que sans s’en rendre compte, en entrant on est devenu tout petit.

Les lieux de notre enfance nous paraissent tout petits lorsqu’on y retourne adulte, du fait qu’on les mesurait avec notre taille de l’enfance. Ainsi, un agrandissement de notre corps nous fait ressentir l’espace plus petit.

Là encore, nous avons supposé que, à cause du principe d’équivalence, il doit y avoir un effet. Aucune vitesse n’étant plus disponible, rejetant le fait que l’accélération puisse intervenir, supposant qu’un paramètre local est la bonne solution, nous supposons, comme au paragraphe précédent, que c’est le potentiel gravitationnel ϕ le bon paramètre permettant de calculer l’effet de contraction des longueurs dans un champ de gravité par :

$$l = \lambda\sqrt{1 + 2\frac{\phi}{C^2}} \qquad (7,8)$$

Ceci correspond en termes mathématiques au fait que l’espace n’est plus euclidien. Nous étudierons ces espaces au chapitre 11. C’est un tel effet de contraction des longueurs qui modifie le résultat trouvé au § 5 *a* pour la déviation des rayons lumineux.

Lorsqu’un corps solide ayant une certaine étendue évolue dans un tel espace, il peut apparaître des contraintes pouvant le briser si les variations de “dimensions”sont trop rapides.

Notons que à partir du moment où nous disons que le piéton rapetisse, cela nécessite que nous considérions, au même endroit que lui, un substrat qui lui, est invariable. Cela suppose que le piéton est dans un monde où existent deux sortes d’objets, ceux qui rapetissent comme lui, et ceux qui restent invariables. Les objets invariables étant invisibles et impalpables, en fait insensibles à tous les sens. Le rôle joué par ce substrat invariable est joué par la grille des lignes coordonnées dans une *variété différentiable*, à partir desquelles la formule (11,8) donne la valeur de la longueur des objets étalons. Nous avons donc ici un modèle tout à fait valable d’espace non euclidien. En fait, tout espace non euclidien peut être construit de cette façon. Nous avons en effet une expression quelconque des longueurs étalons en fonction du substrat invariable (les lignes coordonnées). Mais si ce substrat est vraiment totalement indétectable, son existence n’est pas testable. Effectivement, seule compte la structure de l’espace non euclidien, et l’image que nous en avons donné ci-dessus n’est qu’un modèle dont on peut se passer.

Les espaces non euclidiens peuvent être représentés comme immergés dans un espace euclidien de dimension supérieure (Il faut parfois une dimension beaucoup plus grande), les longueurs étant mesurées grâce à la longueur définie dans l'espace euclidien global. Nous utiliserons un tel modèle au § 13 pour expliquer intuitivement l'effet SHAPIRO.