

1 LES ÉQUATIONS DE LAGRANGE

I ÉTABLISSEMENT DES ÉQUATIONS DE LAGRANGE

1. Établissement à partir du principe de moindre action considéré comme admis. - On considère un système mécanique dont la position est définie par les variables : $q_i(t)$ $i = 1, \dots, r$. On peut avoir $q_i = x, y, z$ ou des variables angulaires, ou d'autres variables. On a : $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$. On suppose qu'il existe une fonction $L [q_i(t), \dot{q}_i(t), t]$ appelée LAGRANGIEN telle que :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L [q_i(t), \dot{q}_i(t), t] dt$$

S est l'action du système. On suppose que la trajectoire réelle dans l'espace des q_i : *Espace de configuration*, est, parmi toutes les trajectoires possibles allant de A à l'instant t_1 à B à l'instant t_2 , celle qui rend la variation δS pour une petite variation du parcours (en trajectoire spatiale ou en vitesse, ou les deux) nulle : $\delta S = 0$. C'est l'analogie du principe de FERMAT où $\delta t = 0$, le temps de parcours est minimal pour la trajectoire réelle de la lumière.

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i(t) \right] dt \\ \delta \dot{q}_i(t) &= \delta \left[\frac{dq_i}{dt} \right] = \frac{d}{dt} [\delta q_i] \\ \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} [\delta q_i] dt &= \left[\overbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i}^{=0} \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \delta q_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} dt \\ \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt = 0 \quad \forall \delta q_i(t) \end{aligned}$$

(Il y a sommation sur i).

$$\Rightarrow \forall i \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \text{Équations de LAGRANGE}$$

$$L = T - V = \Sigma \frac{1}{2} m \dot{q}_i^2 - V(q_1 \dots q_r, t)$$

¹action

$$m\ddot{q}_i - \left[-\frac{\partial V}{\partial q_i} \right] = 0 \quad m\ddot{q}_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} = F_i$$

$m\ddot{q}_i = F_i$. On retrouve bien les équations de NEWTON.

2. Établissement à partir de la loi de Newton : $\vec{F} = m\vec{a}$ - Soit un système constitué d'un ensemble de solides soumis à des liaisons entre eux, et avec des objets extérieurs qui peuvent bouger. Les liaisons ne sont pas dissipatives et sont donc du type roulement sans glissement, ou glissement pur sans frottement. Ce système contient N points matériels ayant chacun trois coordonnées, dont les mouvements peuvent être complètement décrit par r paramètres : $q_1, \dots, q_i, \dots, q_r$ et le temps t :

$$x_k = x_k(q_1, \dots, q_i, \dots, q_r, t)$$

$$\delta x_k = \sum_i \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \delta q_i \quad \text{à } t \text{ constant}$$

(principe des travaux virtuels); $m_k \ddot{x}_k = f_k$. Pour un ensemble de δq_i absolument quelconques :

$$\sum_k (-f_k + m_k \ddot{x}_k) \delta x_k = \sum_{ik} (-f_k + m_k \ddot{x}_k) \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \delta q_i = 0$$

Cela exige que le coefficient de chacun des δq_i soit nul, soit :

$$P_i - Q_i = 0 \quad (r \text{ relations})$$

avec :

$$P_i = \sum_k m_k \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \ddot{x}_k \quad \text{et} \quad Q_i = \sum_k \frac{\partial x_k}{\partial q_i} f_k$$

Introduisons l'énergie cinétique du système :

$$T = \frac{1}{2} \sum_k m_k \dot{x}_k^2 = T(q_i, \dot{q}_i, t) \quad (q_i \text{ représente l'ensemble des } q_1 \dots q_r)$$

$$\sum_k f_k \delta x_k = -\delta V = \sum_{ik} f_k \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_i Q_i \delta q_i$$

$$\text{On a donc : } Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$$

Par ailleurs, nous pouvons écrire :

$$P_i = \frac{d}{dt} \left(\sum_k m_k \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \dot{x}_k \right) - \sum_k m_k \dot{x}_k \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_k}{\partial q_i} \right)$$

Remarquons alors que :

- a) $\frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial x_k}{\partial q_i}$ car $\dot{x}_k = \frac{dx_k}{dt} = \frac{\partial x_k}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \dot{q}_i$
- b) $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_k}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial^2 x_k}{\partial q_i \partial t} + \sum_j \frac{\partial^2 x_k}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{dx_k}{dt} \right) = \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial q_i}$

On peut alors écrire :

$$P_i = \frac{d}{dt} \left(\sum_k m_k \dot{x}_k \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \dot{q}_i} \right) - \sum_k m_k \dot{x}_k \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial q_i}$$

$$\text{c'est à dire : } P_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i}$$

Nous voyons ainsi apparaître la quantité $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = p_i$; p_i sera désigné sous le nom de *moment conjugué* de la coordonnée q_i . Les équations $P_i - Q_i = 0$ prennent donc la forme :

$$\frac{dp_i}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$$

soit, en introduisant la “fonction de LAGRANGE” (ou “Lagrangien”) du système $L = T - V$, et en remarquant que V ne dépend pas des \dot{q}_i :

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}; \quad \frac{dp_i}{dt} = \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

On obtient ainsi les r *équations de Lagrange* :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

dont l'intégration fournira la loi d'évolution du système, c'est à dire l'ensemble des lois de variation $q_i(t)$.

II DÉVELOPPEMENTS THÉORIQUES

1. Le Hamiltonien - $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$; on pose : $H = p_i \dot{q}_i - L$. H est le hamiltonien; si L ne dépend pas de t , $H = Cte =$ Énergie du système :

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \\ \frac{d}{dt} \left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) &= \ddot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \dot{q}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{dL}{dt} \\ &= \ddot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{dL}{dt} = 0 \end{aligned}$$

$$L = p_i \dot{q}_i - H$$

$$\text{et } S = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} p_i dq_i - H dt$$

$\delta S = 0$ avec cette expression mène aux équations canoniques de HAMILTON :

$$\begin{cases} \dot{q}_j &= \frac{\partial H}{\partial p_j} \\ \dot{p}_j &= -\frac{\partial H}{\partial q_j} \end{cases}$$

qui fournissent une nouvelle méthode de résolution d'un problème de mécanique, c'est à dire de détermination du mouvement.

En effet, montrons le pour une seule coordonnée q :

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \delta p dq + p d\delta q - \frac{\partial H}{\partial q} \delta q dt - \frac{\partial H}{\partial p} \delta p dt \\ &\int p d\delta q = p \delta q - \int \delta q dp = - \int \delta q dp \\ \delta S &= \int \left(dq - \frac{\partial H}{\partial p} dt \right) \delta p - \int \left(dp + \frac{\partial H}{\partial q} dt \right) \delta q = 0 \\ &\quad \forall \delta p \quad \forall \delta q \\ \Rightarrow \quad dq &= \frac{\partial H}{\partial p} dt \quad dp = - \frac{\partial H}{\partial q} dt \\ \frac{dq}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p} \quad \frac{dp}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q} \end{aligned}$$

2. L'Action en fonction des coordonnées et du temps. - On ne compte que les trajectoires physiques effectivement suivies par le système. On choisi un point origine (q_{i_0}, t_0) . Au point (q_i, t) on a :

$$S(q_i, t) = \int_{t_0}^t L(q_i, \dot{q}_i, t) dt$$

le long de la trajectoire supposée unique effectivement suivie pour arriver à $\{q_i\}$ à l'instant t . Montrons que :

$$dS = p_i dq_i - H dt$$

À t fixé :

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_0}^t \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_0}^t \\ &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= L \\ \frac{dS}{dt} &= \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i = \frac{\partial S}{\partial t} + p_i \dot{q}_i \\ \frac{\partial S}{\partial t} &= L - p_i \dot{q}_i = -H \\ \frac{\partial S}{\partial t} &= -H \end{aligned}$$

D'autre part, on obtient l'équation de HAMILTON-JACOBI :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H = 0$$

qui est l'analogie de l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} - H\psi = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q_i, p_i, t) = 0$$

soit :

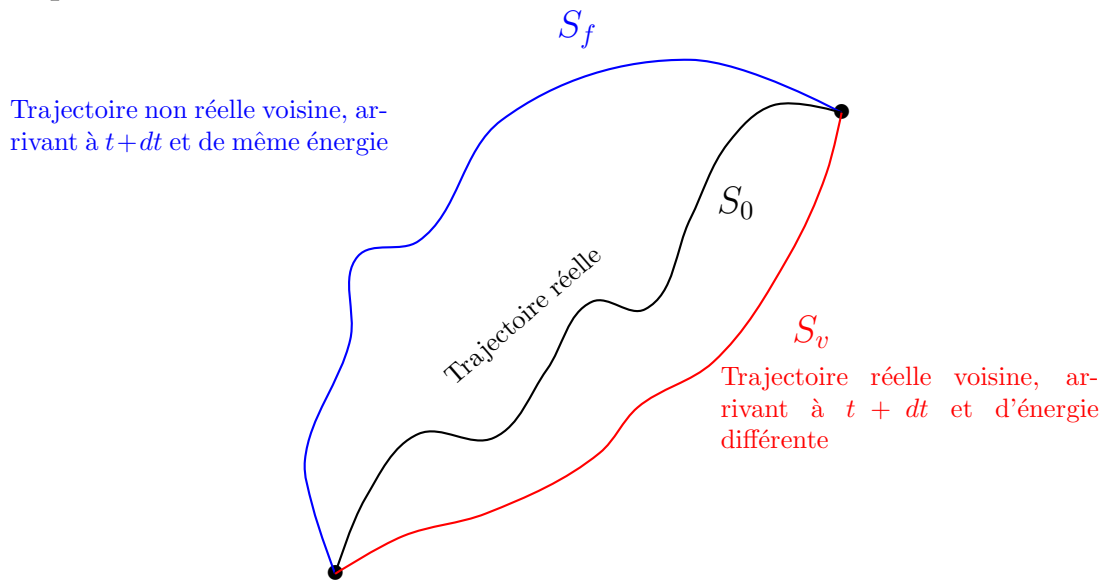
$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1, \dots, q_r; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_r}; t\right) = 0$$

qui donne encore une autre méthode de résolution d'un problème de mécanique.

III QUELQUES APPLICATIONS

1. Principe de Maupertuis. - On considère maintenant un système pour lequel le Hamiltonien est une constante du mouvement et est identique à l'énergie totale E .

Considérons un chemin réel menant de $q_0 = (q_{10} \dots q_{r0})$ à t_0 à q_1 à t_1 . L'action correspondante est S_0 .



Considérons un chemin voisin qui est aussi une trajectoire réelle, d'énergie légèrement différente partant de q_0 à t_0 et arrivant en q_1 à $t_1 + dt$. L'action est S_v .

$$S_v - S_0 = dS = p_i dq_i - H dt = -H dt = -E dt$$

Considérons un autre chemin voisin non réel mais de même énergie que la trajectoire réelle correspondant à S_0 et qui partant de q_0 à t_0 arrive en q_1 en $t_1 + dt$. Son action est S_f .

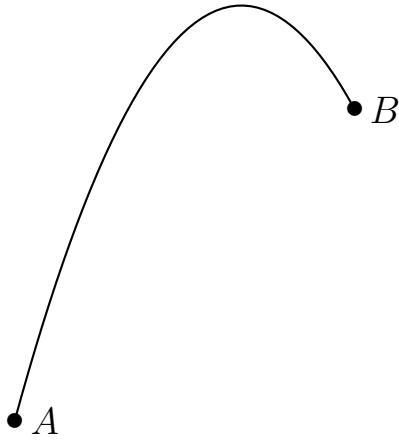
$S_f - S_v = \delta S = 0$ car on a deux trajectoires voisines et tous les q_i et t sont les mêmes au départ et à l'arrivée. Donc $S_f - S_0 = -E dt$ or :

$$\begin{aligned} S_f - S_0 &= \delta \left[\int p_i dq_i - H dt \right] \\ &= \delta \int p_i dq_i - \delta \int H dt \\ &= \delta \int p_i dq_i - \delta \int E dt = \delta \int p_i dq_i - E \delta \int dt \\ &= \delta \int p_i dq_i - E dt \end{aligned}$$

En posant $S_M = \int p_i dq_i$ on arrive à $\delta \int p_i dq_i = 0$.

L'action réduite de MAUPERTUIS S_M a un minimum pour la trajectoire réelle, pour un ensemble de trajectoires de mêmes énergies, partant toutes du même point et arrivant toutes au même point, mais en des temps différents.

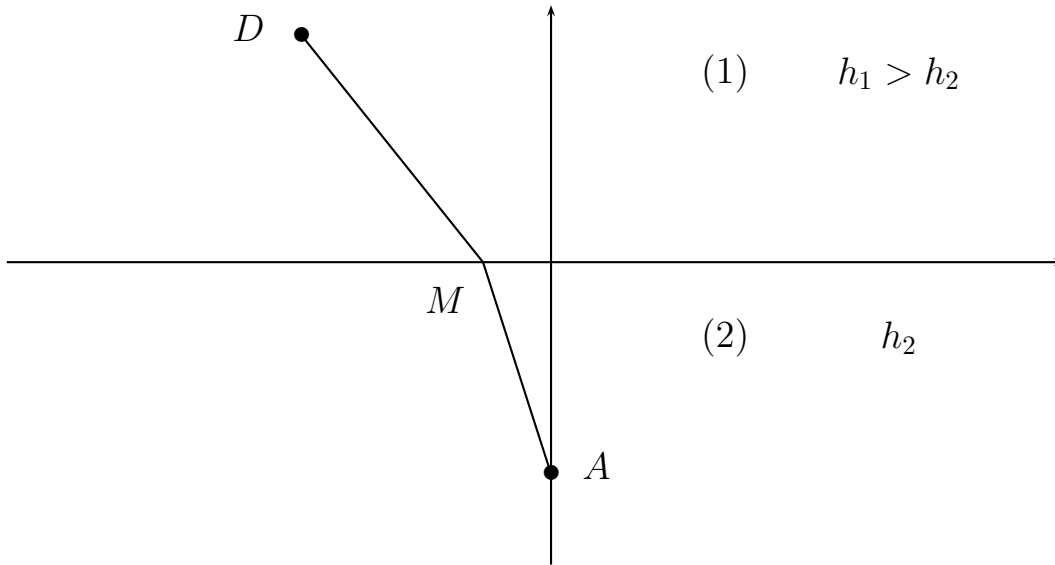
2. Premier exemple. - On peut ainsi comprendre le mouvement parabolique dans le champ de pesanteur. Pour aller de A à B dans le champ de pesanteur avec une certaine énergie E choisie,



$$\begin{aligned} mgz + \frac{p^2}{2m} &= E \Rightarrow \\ p(z) &= \|\vec{p}\|(z) \text{ connu. Il} \\ &\text{faut minimiser } \int \vec{p} d\vec{l}. \end{aligned}$$

On a intérêt à monter beaucoup pour diminuer $\|\vec{p}\|$, quitte à allonger un peu le chemin. On a un principe tout à fait analogue au principe de FERMAT pour l'optique. Dans le cas où il n'y a pas de forces, et donc où $\|\vec{p}\| = Cte$, on retrouve que la trajectoire est le chemin de longueur minimale, donc la droite!

3. Deuxième exemple. - Considérons deux plans parfaitement glissants horizontaux mais d'altitude différente. Ils se rejoignent par une marche rectiligne, en forme de petit plan incliné, pour qu'un point matériel puisse glisser d'un plan à l'autre sans choc. Il va y avoir réfraction du point matériel au passage de la frontière. Calculons cela :



$$\begin{aligned} mgh_1 + \frac{p_1^2}{2m} &= E \\ mgh_2 + \frac{p_2^2}{2m} &= E \end{aligned}$$

$$D \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} ; M \begin{pmatrix} -x \\ 0 \end{pmatrix} ; A \begin{pmatrix} 0 \\ -a \end{pmatrix}$$

$$DM = \sqrt{\begin{pmatrix} -x + b \\ -a \end{pmatrix}^2} = \sqrt{x^2 - 2bx + b^2 + a^2}$$

$$MA = \sqrt{\begin{pmatrix} 0 + x \\ -a \end{pmatrix}^2} = \sqrt{x^2 + a^2}$$

$$\sqrt{2mE - 2m^2gh_1} \sqrt{x^2 - 2bx + b^2 + a^2} + \sqrt{2mE - 2m^2gh_2} \sqrt{x^2 + a^2} \quad \text{minimum}$$

$$\frac{\sqrt{2mE - 2m^2gh_1}}{2\sqrt{\quad}} (2x - 2b) + \frac{\sqrt{2mE - 2m^2gh_2}}{2\sqrt{\quad}} 2x = 0$$

$$\sin r \sqrt{2mE - 2m^2gh_2} = \sin i \sqrt{2mE - 2m^2gh_1}$$

$$\text{soit : } mv_1 \frac{v_{\parallel 1}}{v_1} = mv_2 \frac{v_{\parallel 2}}{v_2}$$

Soit : $v_{\parallel 1} = v_{\parallel 2}$, conservation de la composante parallèle à la frontière de la vitesse, ce qui est bien ce qu'il faut trouver!

IV LIEN AVEC LA MÉCANIQUE QUANTIQUE

1. La Mécanique classique est “l’Optique géométrique” de la Mécanique quantique (Mécanique ondulatoire). - Nous avons vu au II 2, S étant fonction des coordonnées et du temps, que :

$$S = \int p_i dq_i - H dt$$

Nous considérons maintenant uniquement des systèmes pour lesquels le Hamiltonien est une constante du mouvement et est donc égal à l’énergie totale. On obtient donc :

$$S(q_i, t) = S_M(q_i) - Et$$

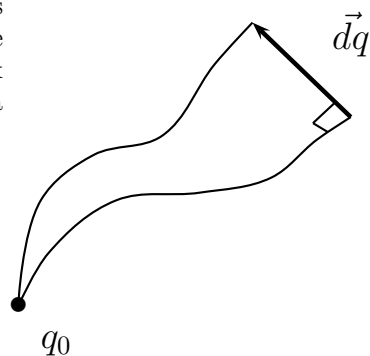
Les surfaces $S_M(q_i) = Cte$ ont une position fixe dans l’espace. Une surface correspondant à une valeur constante de S coïncide à un instant donné t avec une surface particulière $S_M = Cte$; mais à un autre instant : $t + \Delta t$, la coïncidence se fait avec une autre surface $S_M = Cte$ avec une constante différente. Quand $\Delta t \rightarrow 0$, la deuxième surface tend vers la première. Ainsi lorsque t augmente, $S(q_i, t) = Cte$ donne une surface qui avance dans l’espace. Le mouvement de cette surface dans l’espace est analogue à la propagation d’un front d’onde, comme par exemple celui d’une onde de choc. Ainsi, les surfaces $S = Cte$ peuvent être considérées comme des fronts d’onde se déplaçant dans l’espace de configuration à r dimensions des q_i .

Par commodité, nous allons maintenant considérer un système consistant en une particule unique, et nous prenons les coordonnées cartésiennes : $q_i, i = 1, 2, 3$; correspond à x, y, z .

$$S(q_i) = \int \vec{p} \vec{dq} - E dt$$

À un instant t donné, $S(q_i, t) = Cte$ pour un déplacement $\vec{dq} \perp \vec{p}$. Les trajectoires de la particule sont donc perpendiculaires aux surfaces $S(q_i, t) = Cte$ comme en optique géométrique une surface d’onde est perpendiculaire au rayon lumineux.

Deux trajectoires voisines différentes partant du même point q_0 , correspondant à deux valeurs de \vec{p} différentes pour la même énergie E



Cependant, la caractéristique la plus frappante d'un mouvement d'avancée d'une onde est la périodicité (spatiale et temporelle).

Localement, la surface d'onde ressemble à un plan et la trajectoire est presque rectiligne. On a donc $S(q_i, t) = Cte \Leftrightarrow \vec{p}\vec{x} - Et = Cte$ avec $\vec{p} = \vec{C}te$. Une onde plane équivalente aura une phase de la forme $\vec{k}\vec{x} - \omega t$.

On peut donc postuler :

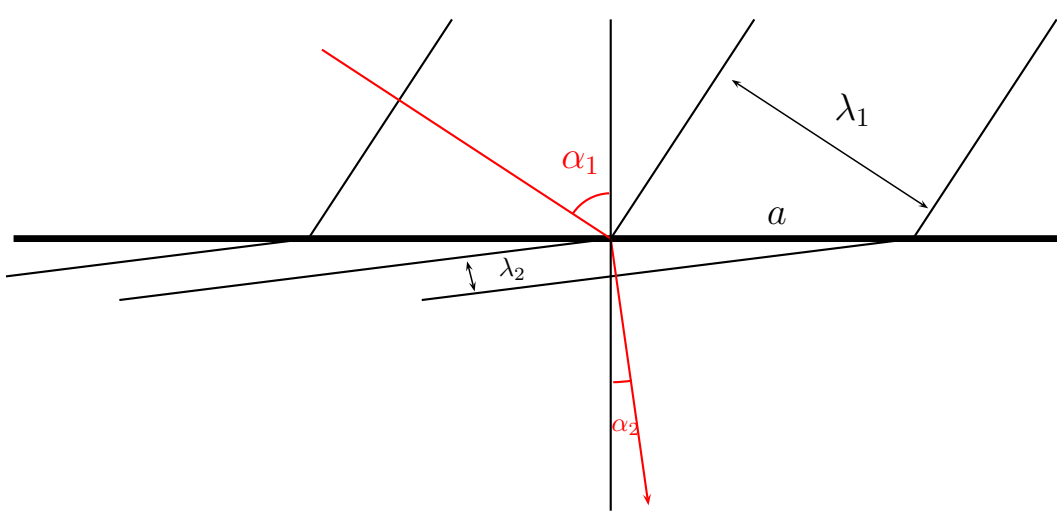
$$\vec{p}\vec{x} - Et = \hbar (\vec{k}\vec{x} - \omega t)$$

\hbar étant une constante qui s'identifie à $\frac{h}{2\pi}$; h étant la constante de PLANCK si l'on se rend compte que la mécanique quantique associe à une particule animée d'un mouvement rectiligne uniforme une onde plane de la forme $\psi = e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)} = e^{i\frac{S}{\hbar}}$ avec $E = \hbar\omega$ et $\vec{p} = \hbar\vec{k}$.

Cette analogie entre la mécanique et l'optique géométrique fut comprise par HAMILTON en 1834; l'équation d'onde correspondante fut découverte par de BROGLIE et SCHRÖDINGER en 1926. Si HAMILTON était allé un peu plus loin, il aurait découvert l'équation de SCHRÖDINGER.

Ainsi, la mécanique classique contient en elle-même le germe de la Mécanique quantique, et la formulation de HAMILTON et JACOBI est particulièrement bien adaptée pour une généralisation menant à la construction de la mécanique quantique.

Montrons un exemple simple concret de ce qui vient d'être dit avec la réfraction d'une particule ponctuelle au passage d'une barrière de potentiel :



$$\begin{aligned} \lambda_1 &= a \sin \alpha_1 \quad ; \quad \lambda_1 = \frac{h}{mv_1} \\ \lambda_2 &= a \sin \alpha_2 \quad ; \quad \lambda_2 = \frac{h}{mv_2} \\ \Rightarrow \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} &= \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_2}{v_1} \end{aligned}$$

$v_1 \sin \alpha_1 = v_2 \sin \alpha_2$; d'où la continuité de la composante parallèle à la paroi de la vitesse, comme le donne la loi de la réfraction par une barrière de potentiel de la mécanique classique.

2. Lien avec l'intégrale de chemins de Feynman. - FEYNMAN a découvert une nouvelle formulation de la mécanique quantique, *l'intégrale de chemins*. Dans cette formulation, on considère qu'une particule emprunte tous les chemins possibles pour aller d'un point A à un autre B . Mais chaque chemin, le k^{em} par exemple, est pondéré par un terme proportionnel à $e^{\frac{iS(\text{chemin}_k)}{\hbar}}$.

S étant l'action entre A et B pour le chemin choisi, la probabilité P qu'il soit emprunté est :

$$P\{\text{chemin}_k\} \propto e^{\frac{iS(\text{chemin}_k)}{\hbar}}$$

L'amplitude de probabilité totale pour que le système aille de A à B est donnée par la somme :

$$K(A, B) = \sum_{\text{chemins}_k} P\{\text{chemin}_k\}$$

ou par une *intégrale de chemins* si les différents chemins possibles forment un continuum. L'équation précédente est la définition formelle du propagateur de FEYNMAN pour le système. Il contient toute l'information sur le comportement quantique du système.

Si maintenant, nous faisons $\hbar \rightarrow 0$ nous devons arriver à la limite classique, qui est donc une conséquence de la mécanique quantique.

Quand \hbar devient petit, P oscille rapidement, et, à moins que les oscillations soient systématiquement en phase pour les différents termes, la somme donnera 0. La seule manière pour laquelle la cohérence de phase est obtenue pour différents chemins, est en assurant que S est la même.

En d'autres termes, dans la limite classique $\hbar \rightarrow 0$, seuls les chemins voisins qui vérifient $\delta S = 0$ contribuent à l'amplitude finale! $\delta S = 0$ décrit ainsi le comportement le plus probable, quasi certain du système en physique classique.

On voit donc que derrière le principe de moindre action, réside l'indétermination quantique et la non localisation d'un système.

V L'ACTION EN RELATIVITÉ

1. L'action en relativité restreinte - Considérons une particule (\mathcal{R}_0) libre, animée d'un mouvement rectiligne uniforme dans un référentiel galiléen (\mathcal{R}) (elle est elle-même un référentiel galiléen). Supposons qu'il y ait une horloge liée à cette particule qui indique le temps t . Une horloge identique qui mesure le temps τ est placée dans un objet (M) qui quitte à l'instant (α), point A de (\mathcal{R}), la particule (\mathcal{R}_0) et y revient à l'instant (β), point B de (\mathcal{R}). La particule (M) est accélérée à certains moments. Un résultat classique de relativité restreinte dit que $\tau_B - \tau_A < t_B - t_A$. Il y a ralentissement apparent du temps pour l'objet en mouvement (paradoxe des jumeaux de LANGEVIN).

On voit que $d(\tau_B - \tau_A) = 0$ pour la ligne droite joignant A et B à vitesse constante (mouvement de (\mathcal{R}_0)). Donc $S_{AB} \propto -\tau_{AB} = -(\tau_B - \tau_A)$; L'horloge de (M) mesure directement l'action (au sens du *I 1*) entre deux évènements, pour une certaine trajectoire. L'horloge de (\mathcal{R}_0) mesure elle, l'action comme fonction des coordonnées et du temps du *II 2*; cela sera utilisé au § 2.

Autrement dit, pour mesurer l'action au sens du *I 1* pour une trajectoire (non réelle à priori) parcourue par une particule de masse m , il suffit de faire suivre la trajectoire par une horloge étalon et de voir la durée indiquée et de la multiplier par $-mC^2$.

L'action est opposée au temps propre. En fait, la relativité restreinte donne :

$$\delta S = -mC^2 \delta \tau = -mC^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}} dt$$

$$S = -mC^2 \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}} dt$$

$$\text{et } L = -mC^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}$$

$$v \ll C \quad L \simeq -mC^2 \left(1 - \frac{v^2}{2C^2}\right) = -mC^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

On retrouve à une constante près qui ne joue pas de rôle le lagrangien d'une particule libre en mécanique newtonienne : $L_N = \frac{1}{2}mv^2$.

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}}$$

$$E = H = \frac{mv^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}} + mC^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}} = \frac{mC^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}}$$

2. L'action pour une particule en relativité générale - D'après le principe d'équivalence entre l'inertie et la gravitation d'EINSTEIN, une particule en chute libre dans un champ de gravitation peut être considérée comme l'origine d'un référentiel galiléen local. À chaque instant, on a donc : $\delta S = -mC^2 d\tau$. Donc :

$$S = -mC^2 \int d\tau$$

L'horloge d'une particule en chute libre affiche donc au facteur $-mC^2$ près, l'action fonction des coordonnées et du temps (au sens du II 2) $S(q_i, t)$ de cette particule. Comme application de cela, citons ici FEYNMAN :

J'ai refait le même genre de blague un peu plus tard, à Princeton, mais cette fois sur un savant confirmé, un assistant d'EINSTEIN qui devait bien passer huit heures par jour à travailler sur la théorie de la gravitation. Je lui ai posé le problème suivant. On lance une fusée dans laquelle on a placé une horloge. Une autre horloge reste au sol. On veut que la fusée revienne au sol au moment où l'horloge restée sur Terre marque par exemple, une heure de plus. De plus, on veut que l'horloge de la fusée soit alors aussi en avance que possible par rapport à celle du sol. D'après la théorie d'EINSTEIN, plus la fusée va haut, plus son horloge avance (il y a contraction des temps lorsqu'on s'élève dans le champ de gravitation). Mais, d'un autre côté, pour que la fusée atteigne une certaine hauteur et compte tenu du fait que la durée du vol est limitée, il est nécessaire que la fusée atteigne une certaine vitesse ; d'où une dilatation du temps. Il y a donc une hauteur optimale. Question : calculer

la vitesse et la hauteur atteintes par la fusée pour que la différence entre les indications des deux horloges au retour soit maximale.

Il a fallu pas mal de temps à cet assistant d'EINSTEIN pour s'apercevoir que la réponse était très simple : il suffit de lancer la fusée de manière qu'elle revienne sur Terre une heure après, un point c'est tout. En effet, d'après le principe fondamental de la théorie d'EINSTEIN, ce que l'on appelle le "temps propre" est maximal sur le trajet réel. Mais parce que je lui avais présenté en termes de fusées et d'horloges, l'assistant d'EINSTEIN n'avait pas reconnu ce principe fondamental. Exactement comme mes camarades du dessin industriel. À ceci près que, en l'occurrence, il ne s'agissait pas d'un novice. En fait, la fragilité du savoir dont je parlais à l'instant est beaucoup plus répandue qu'on ne le croit.

VI L'ACTION AU DELÀ DE LA MÉCANIQUE DU SOLIDE

1. Lagrangien d'interaction - Considérons le système constitué de deux pendules tige reliés par un ressort :



$$T = \frac{ml^2}{6}\theta_1^2 + \frac{ml^2}{6}\theta_2^2$$

Pour θ_1 et θ_2 faibles :

$$V = mg\theta_1 + mg\theta_2 + \frac{1}{2}k(\theta_2 - \theta_1)^2$$

$$V \simeq mg\theta_1 + mg\theta_2 - k\theta_1\theta_2$$

$$L = \frac{ml^2}{6}\theta_1^2 + \frac{ml^2}{6}\theta_2^2 - mg\theta_1 - mg\theta_2 + k\theta_1\theta_2$$

$L_{int} = k\theta_1\theta_2$ est le Lagrangien d'interaction.

Considérons un état initial constitué du pendule (1) en mouvement et du pendule (2) immobile. Par le phénomène de battement, le pendule (2) se met en mouvement.

En théorie quantique des champs, les particules sont des oscillations quantifiées de champs. Le passage du pendule (1) en mouvement au pendule (2)

en mouvement correspond à la transformation d'une particule en une autre grâce au lagrangien d'interaction.

2. Lagrangien pour un système continu - Considérons une chaîne de r points matériels équidistants attachés à un fil de masse négligeable tendu avec la tension T . Quand $r \rightarrow \infty$ et que la distance entre deux points tend vers 0, on arrive à une corde ayant une certaine densité linéique de masse λ .

À $q_i(t)$ correspond $\phi(x)$ amplitude de la corde au point d'abscisse $x : i \leftrightarrow x$. On a $S = \int L dt$ avec $L = \int \mathcal{L} dx$, et les équations de LAGRANGE deviennent :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial \phi}{\partial x})} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) = 0$$

Pour la corde :

$$\mathcal{L}_\lambda = \frac{1}{2} \lambda \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \lambda C^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2$$

et on obtient l'équation de d'ALEMBERT :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$

Pour un champ continu à trois dimensions, $L = \int \int \int \mathcal{L} d\tau$ et les équations de Lagrange deviennent :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi)} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) = 0$$

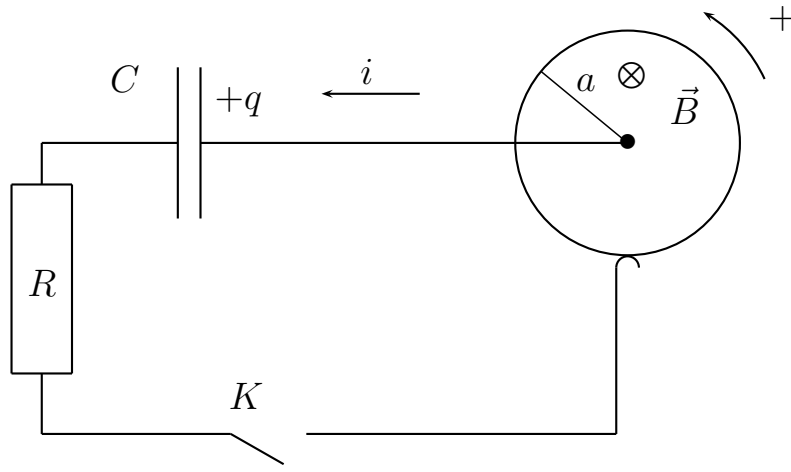
3. Lagrangien du champ électromagnétique - Pour le champ électromagnétique, on obtient :

$$\underbrace{\int \int \int \left(\overbrace{\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}}^{\text{Énergie cinétique}} - \overbrace{\frac{B^2}{2\mu_0}}^{\text{Énergie potentielle}} \right) d\tau}_{\text{Lagrangien du champ électromagnétique}}$$

$$\underbrace{- \int \int \int \rho \varphi d\tau + \int \int \int \vec{A} \cdot \vec{j} d\tau}_{\text{Lagrangien d'interaction du champ avec les charges}}$$

avec : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$.

4. Exemples. - On considère une roue de moment d'inertie I tournant sans frottement dans un champ magnétique \vec{B} uniforme qui lui est perpendiculaire. Le courant passe entre son axe, et un curseur qui glisse parfaitement sur sa périphérie. On branche en série une résistance et un condensateur.



$$L_{roue} = \frac{1}{2}I\omega^2; L_{champ} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}; L_{charges-champ} = -\frac{q^2}{C}$$

$$L_{courant-champ} = + \int \int \int \vec{A} \cdot \vec{j} \, dx dy dz = +\phi \, i$$

déplacement \wedge courant opposé à $\vec{B} \Rightarrow$ signe $-$

$$\text{Donc : } \phi = -\frac{a^2 B}{2}\theta.$$

$$L = -\frac{a^2 B}{2}\theta i + \frac{1}{2}I\omega^2 - \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

L'action de la résistance ne peut être mise dans le Lagrangien, car l'énergie ne dérive pas d'un potentiel. Prenons l'exemple d'un point matériel dans le champ de pesanteur. Si on prend comme système le point et la Terre, $L = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz$ et on obtient $m\ddot{z} = -mg$, en orientant l'axe des z vers le haut. Si on prend le point matériel seul, $L = \frac{1}{2}m\dot{z}^2$ et la force de pesanteur devient une force extérieure. $d(\mathcal{E}_C) = Fdz = -mgdz$ et on voit qu'il faut mettre $-mg$ dans le second membre.

Donc, ici, puisque $d(\mathcal{E}) = -Ridq$ quel que soit le signe de dq , il faut mettre $-Ri$ dans le second membre; c'est une *force généralisée*.

$$\text{En } q : \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial i} = \frac{\partial L}{\partial q} - Ri$$

$$\text{soit : } -\frac{a^2 B}{2}\omega = -\frac{q}{C} - Ri$$

$$\text{En } \theta : \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta}$$

$$I\dot{\omega} = -\frac{a^2 B}{2}i$$

Plus simple, un condensateur branché directement aux extrémités d'une

inductance :

$$L_{\text{charges-champ}} = -\frac{q^2}{C} + Li^2 \quad L_{\text{champ}} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} - \frac{1}{2} Li^2$$

$$L_{\text{total}} = \frac{1}{2} Li^2 - \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$$

Prenons $i = \frac{dq}{dt}$:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial i} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

$$L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

BIBLIOGRAPHIE :

LANDAU Mécanique, Éditions de Moscou; LANDAU Théorie des champs, Éditions de Moscou; GOLDSTEIN Classical Mechanics, Addison-Wesley; NARLIKAR General Relativity and Cosmology, The Macmillan Press; CASTAING Thermodynamique statistique, Masson; AITCHISON Gauge theories in particle physics Volume 1, Institute of Physics Publishing. FEYNMAN Vous voulez rire Monsieur Feynman, InterEditions.