

# 1 CORRIGÉ X PHYSIQUE 2021

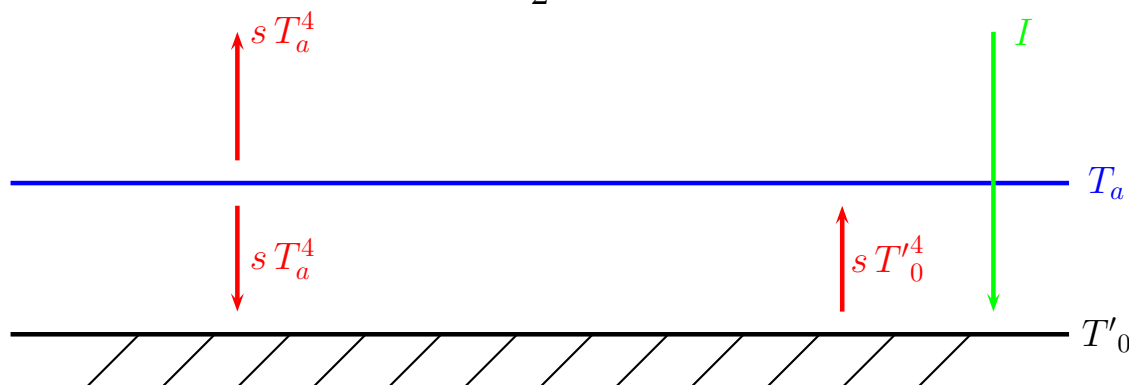
$I$

1

$$I = sT_0^4 \quad T_0 = \left( \frac{220}{5,67 \cdot 10^{-8}} \right)^{1/4} \simeq 2,5 \cdot 10^2 = 250 \text{ K}$$

$t = 250 - 273 = -23 \text{ }^\circ\text{C}$  ce qui est beaucoup trop froid, car la température moyenne à la surface de la Terre est d'environ  $15 \text{ }^\circ\text{C}$ .

2



$$\begin{cases} 2sT_a^4 = sT_0'^4 \\ sT_0'^4 = sT_a^4 + I = \frac{sT_0'^4}{2} + I \end{cases}$$

$$T_0' = 2^{1/4}T_0 \simeq 1,2 \times 250 = 250 + 50 = 300 \text{ K} \quad t_0' = 300 - 273 = 27 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$T_a^4 = \frac{T_0'^4}{2} \Rightarrow T_a = T_0 = 250$$

L'effet mis en évidence est l'effet de serre. L'atmosphère maintient la Terre à une température supérieure. Mais, cette fois-ci, il fait trop chaud. C'est qu'on a oublié le cycle de l'eau qui refroidit la surface terrestre par évaporation de l'eau des océans, et réchauffe la haute atmosphère par condensation de la vapeur. Le cycle de l'eau permet donc à la surface terrestre d'évacuer vers le haut son trop plein de chaleur. Ceci sera étudié dans la suite du problème. Ce n'est pas le cas

sur Vénus par exemple, d'où la température très élevée de Vénus, avec en plus le fait qu'elle a une atmosphère beaucoup plus épaisse, d'où des effets de serre par couches qui s'ajoutent, et qu'elle est plus près du Soleil.

3

$$\frac{1}{5} O_2 \quad \frac{4}{5} N_2 \quad M = \frac{1}{5} 32 + \frac{4}{5} 28 = \frac{64 + 224}{10} = 28,8 \simeq 29 \text{ g}$$

$$S = nC_V \ln PV^\gamma \quad PV = nRT \quad V^\gamma = \frac{n^\gamma R^\gamma T^\gamma}{P^\gamma}$$

$$PV^\gamma = n^\gamma R^\gamma T^\gamma P^{1-\gamma} \quad \ln PV^\gamma = \text{Cte} + \ln \left( TP^{\frac{1}{\gamma}-1} \right)^\gamma = \text{Cte} + \gamma \ln \left( TP^{\frac{1}{\gamma}-1} \right)$$

$$\frac{C_P}{C_V} = \gamma \quad C_P = \gamma C_V \quad \Rightarrow \quad S = nC_P \ln \left( TP^{\frac{1}{\gamma}-1} \right)$$

$$dS = nC_P d \left[ \ln \left( TP^{\frac{1}{\gamma}-1} \right) \right]$$

4

$$dP = -\rho g dz \quad TP^{\frac{1}{\gamma}-1} = \text{constante} \quad \frac{dT}{T} + \left( \frac{1}{\gamma} - 1 \right) \frac{dP}{P} = 0$$

$$PV = nRT \quad PV = \frac{m}{M} RT \quad P = \frac{\rho}{M} RT$$

$$\frac{dP}{P} = \frac{-\rho g dz M}{\rho RT} = -\frac{Mg dz}{RT}$$

$$\frac{dP}{P} = -\frac{1}{\frac{1}{\gamma} - 1} \frac{dT}{T} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{dT}{T}$$

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{dT}{T} = -\frac{Mg dz}{RT} \quad dT = -\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{Mg}{R} dz$$

$$C_P - C_V = R \quad \gamma - 1 = \frac{R}{C_V} \quad C_V = \frac{R}{\gamma - 1}$$

$$C_P = R + C_V = R + \frac{R}{\gamma - 1} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} R$$

$$dT = -\frac{Mg}{C_P} dz \quad T(z) = T_0 - \frac{Mg}{C_P} z$$

2

5

Il y a 3 degrés de liberté de translation, et pour une molécule diatomique, deux degrés de liberté de rotation. Il n'y a en effet pas de rotation possible autour de la droite joignant les deux atomes. Le moment d'inertie étant très faible, ce degré de liberté est bloqué en mécanique quantique à la température ordinaire.

$$C_V = \left( \frac{3}{2} + 2 \times \frac{1}{2} \right) R = \frac{5}{2}R \quad C_P = \frac{7}{2}R$$

$$\Delta T = \frac{9,81 \times 29 \cdot 10^{-3}}{\frac{7}{2} \times 8,31} 100 \simeq 1^\circ/100 m$$

6

$$P_f^{\frac{1}{\gamma}-1} T_f = P_i^{\frac{1}{\gamma}-1} T_i \quad \frac{1}{\gamma} - 1 = \frac{C_V}{C_P} - 1 = \frac{C_P - R}{C_P} - 1 = -\frac{R}{C_P}$$

$$T_f = \left( \frac{P_i}{P_f} \right)^{-R/C_P} T_i$$

7

$$T_f < T(z_i + dz) \Rightarrow \rho_f > \rho(z_i + dz) \Rightarrow \text{Équilibre stable}$$

En effet, le jeu de la poussée d'Archimède et de la gravité fait retomber la bulle d'air.

La bulle d'air oscille à la fréquence de BRUNT-VÄISÄLÄ.

$$T_f > T(z_i + dz) \Rightarrow \rho_f < \rho(z_i + dz) \Rightarrow \text{Équilibre instable}$$

8

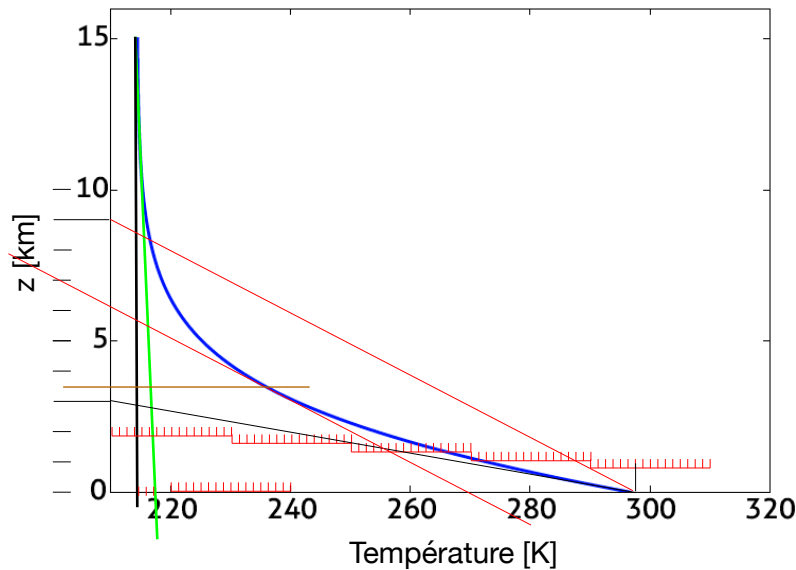
$$\frac{T_f}{P_f^{R/C_P}} = \frac{T_i}{P_i^{R/C_P}} \Rightarrow \frac{T}{P^{R/C_P}} = \text{constante} \quad \frac{dT}{T} - \frac{R}{C_P} \frac{dP}{P} = 0 \quad dP = -\rho g dz$$

$$P = \frac{\rho}{M} RT \quad \frac{dP}{P} = -\frac{gM dz}{RT} \quad \frac{dT}{T} = -\frac{R}{C_P} \frac{gM dz}{RT} \quad dT = -\frac{Mg}{C_P} dz$$

3

On retrouve le profil adiabatique sec précédemment trouvé. Toute atmosphère convectivement instable par effet de serre, évoluera, dans la tranche d'épaisseur où c'est le cas, par convection spontanée, vers le profil adiabatique sec de diminution de la température de  $1^{\circ}C$  pour une montée de  $100\text{ m}$ . Une zone de convection sèche par chauffage du sol par le Soleil adopte donc spontanément un profil adiabatique sec. C'est le cas l'été dans une épaisseur plus ou moins épaisse, avec la formation de grandes bulles d'air chaud qui montent, appelées thermiques, et qui servent aux planeurs ou à certains oiseaux de proie pour se maintenir en l'air. Quand une thermique décolle pour s'envoler, le brusque appel d'air provoque pendant quelques instants un fort vent horizontal localement. Cette convection accroche en altitude le vent géostrophique synoptique, ce qui fait que le vent est toujours plus fort pendant la journée que la nuit.

9



On voit que  $20^{\circ}C$  correspondent sur l'échelle des abscisses à  $16\text{ mm}$ . À haute altitude, la tangente à la courbe tracée en vert s'écarte de  $2\text{ mm}$  de la verticale pour une altitude de  $150\text{ fois }100\text{ m}$ . On a donc :

$$20 \times \frac{2}{16} = 2,5^{\circ} \quad \text{pour } 150 \text{ fois } 100\text{ m} \quad \Rightarrow \quad \Gamma = \frac{2,5}{150} = 0,017^{\circ}C \quad \text{pour } 100\text{ m}$$

On a donc un équilibre stable.

Au sol, la tangente en noir a un point de contact à  $70\text{ mm}$  à droite de l'origine, ce qui correspond à  $20 \times \frac{70}{16} = 87,5^{\circ}$ . Elle touche l'axe vertical à une altitude de  $3000\text{ m} = 30 \times 100\text{ m}$ .

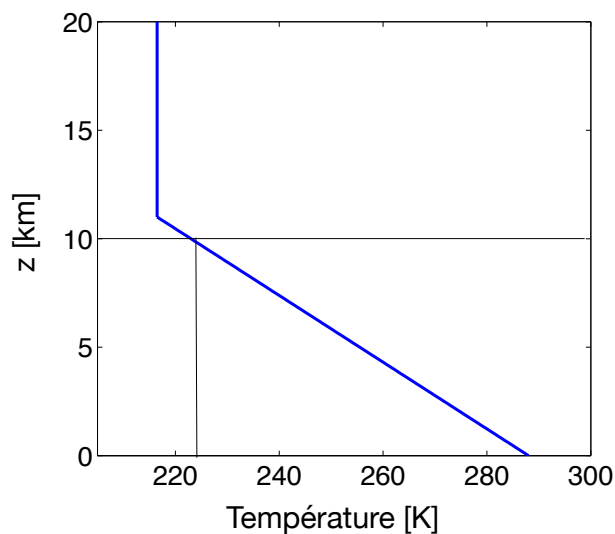
$$\Gamma = \frac{87,5}{30} = 3^{\circ} \quad \text{pour } 100\text{ m}$$

On a donc un équilibre instable.

On trouve une tangente en rouge dont le point de contact est à environ 3500 m d'altitude, dont une parallèle en rouge correspond à la même différence de température que précédemment de  $87,5^\circ$ , pour une altitude de 90 fois 100 m. Donc  $\Gamma \simeq \frac{87,5}{90} = 1^\circ$  pour 100 m. L'atmosphère est stable au dessus de 3500 m, et instable en dessous de 3500 m.

10

Au dessus de 11 km, le profil est stable avec une température constante, c'est la stratosphère. Remarquons que ce qui permet cette température constante en chauffant l'atmosphère est l'absorption du rayonnement ultraviolet du Soleil qui transforme l'oxygène en ozone, permettant de protéger la vie sur Terre de l'ultraviolet dangereux du Soleil. En dessous de 11 km, on a la troposphère. Pour une atmosphère sèche, le profil est stable dans la troposphère, puisqu'on a un gradient de  $\frac{290 - 225}{100} = 0,65^\circ$  pour 100 m. Ceci dit, les choses sont plus compliquées comme on le verra ci-dessous. Il faut prendre en compte le cycle de l'eau.



11

La détente adiabatique de la parcelle d'air qui la refroidit, peut suffisamment la refroidir pour provoquer la liquéfaction d'une partie de la vapeur d'eau. Cette liquéfaction, par la chaleur latente, réchauffe la parcelle d'air, qui peut devenir plus chaude donc moins dense que l'air environnant, même si l'air est stable vis à vis du critère déterminé à la question 7. On voit apparaître dans le ciel des

cumulus, si c'est le phénomène de convection par chauffage du sol par le Soleil qui est à l'origine de cette montée de la parcelle d'air. Si d'autres phénomènes météorologiques sont à l'œuvre, on aura d'autres nuages.

12

$$x_v = \frac{n_v}{n_a + n_v} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad n_a \gg n_v$$

$$dx_v = \frac{dn_v}{n_a + n_v} - \frac{n_v (dn_a + dn_v)}{(n_a + n_v)^2} = \frac{dn_v}{n_a + n_v} - \frac{n_v dn_v}{(n_a + n_v)^2} \simeq \frac{dn_v}{n_a} - \frac{n_v}{n_a} \frac{dn_v}{n_a} \simeq \frac{dn_v}{n_a}$$

13

On note  $L = \Delta_{\text{vap}}H$ .

$$0 = dS = n_a C_P d \left[ \ln \left( T P^{\frac{1}{\gamma}-1} \right) \right] + \frac{L}{T} dn_v$$

$$n_a C_P \frac{dT}{T} + n_a C_P \left( \frac{1}{\gamma} - 1 \right) \frac{dP}{P} + \frac{L}{T} dn_v = 0 \quad dP = -\rho g dz$$

$$\frac{n_a C_P}{T} \frac{dT}{dz} - n_a C_P \left( \frac{1}{\gamma} - 1 \right) \frac{\rho g}{P} + \frac{L}{T} \frac{dn_v}{dz} = 0 \quad \frac{1}{\gamma} - 1 = -\frac{R}{C_P}$$

$$C_P \frac{dT}{dz} + RT \frac{\rho g}{P} + L \frac{dx_v}{dz} = 0 \quad P = \frac{\rho RT}{M}$$

$$C_P \frac{dT}{dz} + M g = -L \frac{dx_v}{dz}$$

14

$$C_P \frac{\Delta T}{\Delta z} + M g = -L \frac{\Delta x_v}{\Delta z} = -L \frac{0 - 0,04}{10000}$$

15

$$\frac{\Delta T}{\Delta z} = \frac{\frac{L \times 0,04}{10000} - M g}{C_P} = \frac{\frac{4,1 \cdot 10^4 \times 0,04}{10000} - 28,8 \cdot 10^{-3} \times 9,81}{\frac{7}{2} \times 8,31} = -4 \cdot 10^{-3}$$

La température diminue donc en moyenne de  $0,4^{\circ}\text{C}$  à chaque fois qu'on monte de 100 m. Dans le profil de température standard, la température diminue en moyenne de  $0,65^{\circ}\text{C}$  quand on monte de 100 m. Le profil de température de  $0,4^{\circ}\text{C}$  tous les 100 m a lieu au voisinage de l'équateur (aux équinoxes) dans la ZCIT (zone de convergence intertropicale), là où il y a ascendance avec condensation. Par contre, dans les anticyclones subtropicaux comme l'anticyclone des Açores, là où l'air retombe (flèches bleues verticales orientées vers le bas sur la figure 3) donc là où il y a subsidence, on a le gradient adiabatique sec, par compression de l'air qui devient sec, de  $1^{\circ}\text{C}$  tous les 100 m. Il est donc normal d'avoir une moyenne dans l'atmosphère intermédiaire entre ces deux valeurs, donc de l'ordre de  $\frac{0,4 + 1}{2} = 0,7 \simeq 0,65$ .

## 16

La température de surface des océans est supérieure au voisinage de l'équateur par rapport aux latitudes subtropicales car le rayonnement reçu du Soleil y est plus important par le fait que le Soleil est plus proche du zénith en moyenne près de l'équateur. La surface terrestre éclairée par un faisceau du Soleil est donc minimale ce qui donne une puissance par unité de surface maximale.

Il faut ajouter à cela que les alizés qui débutent leur cours sur les façades est des océans y soufflent du nord vers le sud provoquant sur les façades ouest des continents un courant océanique du nord vers le sud. Par l'action de la force de Coriolis, ce courant est dévié vers l'ouest provoquant un upwelling d'eau froide au large du Portugal par exemple ou au large de la Californie. C'est pourquoi l'eau est toujours très froide à San Fransisco. Les alizés commencent donc leur course au dessus d'un océan froid ce qui entraîne qu'ils sont sec et frais.

Les alizés se réchauffent peu à peu en soufflant sur l'océan quand ils se rapprochent de l'équateur. Mais en plus, ils se chargent d'humidité. Or d'après la loi d'Avogadro, dans les mêmes conditions de température et de pression, dans un volume donné, il y a la même quantité de molécules quel que soit le gaz. La molécule d'eau étant plus légère que les molécules d'azote et d'oxygène, toutes choses égales par ailleurs, l'air humide est moins dense que l'air sec.

L'air s'élève donc au voisinage de l'équateur au niveau de la ZCIT parce qu'il est moins dense pour deux raisons donc, parce qu'il est plus chaud mais aussi parce qu'il est plus humide. Dans nos régions tempérées on a le phénomène d'hystérésis climatique pour la même raison. Une longue période de sécheresse entraîne un air sec donc dense, donc provoque de la subsidence, ce qui a tendance à prolonger la sécheresse.

Réciproquement, une longue période de pluie a tendance à se poursuivre, car l'air très humide au dessus de la région arrosée étant moins dense provoque de l'ascendance qui continue la pluie. Ce phénomène se produit uniquement quand l'atmosphère peut contenir beaucoup de vapeur d'eau, donc quand elle est chaude, donc de mai à juillet. À partir du mois d'août, le sol devient trop sec pour que cela fonctionne.

L'air s'élève donc au niveau de l'équateur dans la ZCIT. La détente adiabatique subie le refroidit, et comme nous verrons ci-dessous que la pression de saturation de la vapeur d'eau diminue exponentiellement avec la température, ce refroidissement provoque la liquéfaction de la vapeur d'eau en nuages. Mais cette liquéfaction chauffe l'air humide, donc diminue sa densité, ce qui amplifie l'ascendance. On a là le mécanisme des cyclones tropicaux et des cumulonimbus de la ZCIT. Par conservation du flux, à haute altitude, l'air refoule vers les pôles tout en évacuant son humidité par la pluie, par le fait qu'il se refroidit par son rayonnement infrarouge vers l'espace. Au niveau des anticyclones subtropicaux, l'air en altitude est devenu très dense par son refroidissement par rayonnement infrarouge et par son assèchement. Il tombe donc. On a de la subsidence, et le circuit est bouclé.

Au sol, au niveau des anticyclones tropicaux qu'on appelle des anticyclones dynamiques car ils sont associés à la circulation de Hadley, la pression est élevée pour deux raisons : il y a épais d'air au dessus, par l'afflux d'air de l'équateur en altitude. De plus il s'agit en altitude d'air frais et sec, donc dense pour ces deux raisons.

17

On utilise la notation habituelle :

$$G_{lm} = \mu_l \quad G_{vm} = \mu_v \quad V_{lm} = V_l \quad V_{vm} = V_v \quad S_{lm} = S_l \quad S_{vm} = S_v$$

$$d\mu_l = V_l dP - S_l dT \quad d\mu_v = V_v dP - S_v dT$$

$$G = n_v \mu_v + (n - n_v) \mu_l$$

18

$$\mu_l = \mu_v$$



$$\begin{cases} \mu_v(T, P) & = & \mu_l(T, P) \\ \mu_v(T + dT, P + dP) & = & \mu_l(T + dT, P + dP) \end{cases}$$

$$\frac{\partial \mu_v}{\partial T} dT + \frac{\partial \mu_v}{\partial P} dP = \frac{\partial \mu_l}{\partial T} dT + \frac{\partial \mu_l}{\partial P} dP$$

$$-S_v dT + V_v dP = -S_l dT + V_l dP$$

$$(V_v - V_l) dP = (S_v - S_l) dT = \frac{L}{T} dT$$

$$\frac{dP}{dT} = \frac{L}{T(V_v - V_l)} > 0$$

car  $V_v > V_l$ . Donc  $P$  croît avec  $T$ .

$$\frac{dP}{dT} = \frac{L}{T \frac{RT}{P}} = \frac{LP}{RT^2} \quad \frac{dP}{P} = \frac{L}{R} \frac{dT}{T^2}$$

$$\ln \left[ \frac{P_{\text{sat}}(T)}{P_{\text{sat}}(T_0)} \right] = \frac{L}{R} \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) \quad C = \frac{L}{R}$$

Voir :

<http://bouteloup.pierre.free.fr/art/eci.pdf>

II

22

$$\xi = -\frac{W}{Q_1} \quad \Delta S = 0 = \frac{Q_1}{T_c} + \frac{Q_2}{T_f} \quad -W = Q_1 + Q_2 \quad \frac{T_f}{T_c} + \frac{Q_2}{Q_1} = 0$$

$$\xi_c = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_f}{T_c}$$

C'est le rendement maximal. Dans les autres cas  $\Delta S \geq 0$ , ce qui donne  $\frac{-Q_1}{T_c} + \frac{-Q_2}{T_f} \geq 0$ , soit  $\xi \leq 1 - \frac{T_f}{T_c}$ .

23

Le fonctionnement en moteur donne  $Q_1 > 0$ ,  $Q_2 < 0$ ,  $W < 0$ . Le sens de la propagation de l'énergie dans les résistances thermiques donne  $T_c > T_1 > T_2 > T_f$ . Ce modèle vient de l'article : Efficiency of a Carnot engine at maximum power output F.L. CURZON and B. AHLBORN American Journal of Physics 1975.

24

$$\begin{cases} T_c - T_1 = R\phi_1 = R\frac{Q_1}{\tau} \\ T_f - T_2 = R\phi_2 = R\frac{Q_2}{\tau} \end{cases}$$

25

$$P = \frac{-W}{2\tau} = \frac{Q_1 + Q_2}{2\tau} = \frac{\tau\frac{T_c - T_1}{R} + \tau\frac{T_f - T_2}{R}}{2\tau} = \frac{T_c - T_1 + T_f - T_2}{2R}$$

26

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0 \quad \frac{T_c - T_1}{T_1} + \frac{T_f - T_2}{T_2} \leq 0 \quad \frac{T_c}{T_1} + \frac{T_f}{T_2} - 2 \leq 0$$

$$\frac{T_c}{T_1} + \frac{T_f}{T_2} - 2 = 0 \quad \frac{T_f}{T_2} = 2 - \frac{T_c}{T_1} \quad T_2 = \frac{T_f}{2 - \frac{T_c}{T_1}}$$

$$P = \frac{T_c - T_1 + T_f - T_2}{2R} = \frac{T_c - T_1 + T_f}{2R} - \frac{1}{2R} \frac{T_f}{2 - \frac{T_c}{T_1}} = \frac{T_c}{2R} \left( 1 - \frac{T_1}{T_c} + \frac{T_f}{T_c} - \frac{T_f}{T_c} \frac{1}{2 - \frac{T_c}{T_1}} \right)$$

$$P = \frac{T_c}{2R} \left( 1 - X + \eta - \eta \frac{1}{2 - \frac{1}{X}} \right)$$

$$f(X, \eta) = 1 - X + \eta \left( 1 - \frac{X}{2X - 1} \right) = 1 - X + \eta \frac{X - 1}{2X - 1} = (X - 1) \left( \frac{\eta}{2X - 1} - 1 \right)$$

$$X < 1 \quad f(X, \eta) = (1 - X) \left( 1 - \frac{\eta}{2X - 1} \right)$$

$$T_2 = \frac{T_f}{2 - \frac{T_c}{T_1}} = \frac{T_f}{2 - \frac{1}{X}} > T_f \quad \Rightarrow \quad 0 < 2 - \frac{1}{X} < 1$$

$$2 > \frac{1}{X} \quad X > \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} < X < 1$$

$$-\left( 1 - \frac{\eta}{2X - 1} \right) + (1 - X) \frac{2\eta}{(2X - 1)^2} = 0 \quad -(2X - 1)^2 + \eta(2X - 1) + 2\eta(1 - X) = 0$$

$$-4X^2 + 4X - 1 + 2X\eta - \eta + 2\eta - 2\eta X = 0 \quad -4X^2 + 4X - 1 + \eta = 0$$

$$4X^2 - 4X + 1 - \eta = 0$$

$$X^2 - X + \frac{1-\eta}{4} = 0$$

$$\Delta = 1 - 1 + \eta = \eta \quad X_+ = \frac{1 + \sqrt{\eta}}{2} \quad \text{car } X_+ > \frac{1}{2}$$

$$f = \left( \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\eta}}{2} \right) \left( 1 - \frac{\eta}{\sqrt{\eta}} \right) = \frac{1}{2} (1 - \sqrt{\eta})^2$$

Il s'agit bien d'un maximum de  $f$  car :

$$f(1) = 0 \quad f\left(\frac{1+\eta}{2}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1+\eta}{2} < \frac{1+\sqrt{\eta}}{2} < 1$$

$$P = \frac{T_c}{4R} (1 - \sqrt{\eta})^2$$

30

$$\xi = \frac{P}{\left(\frac{Q_1}{2\tau}\right)} = \frac{P}{\frac{T_c - T_1}{2R}} = \frac{P}{\frac{T_c}{2R} \left(1 - \frac{T_1}{T_c}\right)} = \frac{P}{\frac{T_c}{2R} (1 - X)} = \frac{\frac{T_c}{4R} (1 - \sqrt{\eta})^2}{\frac{T_c}{2R} \frac{1 - \sqrt{\eta}}{2}} = 1 - \sqrt{\eta}$$

$$\xi = 1 - \sqrt{\frac{T_f}{T_c}}$$

Il est remarquable que ce rendement à puissance motrice maximale, comme le rendement de CARNOT, ne dépende que des températures des deux sources. Il est facile de vérifier qu'il est plus petit que le rendement de CARNOT.

31

Il n'y a variation d'entropie que pour les thermostats, puisque l'état des résistances thermiques et du moteur ne change pas sur un cycle.

$$\Delta S = -\frac{Q_1}{T_c} - \frac{Q_2}{T_f} = -\frac{\tau(T_c - T_1)}{RT_c} - \frac{\tau(T_f - T_2)}{RT_f}$$

$$\dot{S} = \frac{\Delta S}{2\tau} = -\frac{1}{2R} \left( 1 - \frac{T_1}{T_c} + 1 - \frac{T_2}{T_f} \right) = \frac{1}{2R} \left( X - 1 + \frac{1}{2 - \frac{1}{X}} - 1 \right)$$

$$\dot{S} = \frac{1}{2R} \left( \frac{\sqrt{\eta}}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1 + \sqrt{\eta}}{2\sqrt{\eta}} - 1 \right) = \frac{1}{2R} \left( \frac{\sqrt{\eta}}{2} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\eta}} + \frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2R} \left( \frac{\sqrt{\eta}}{2} - 1 + \frac{1}{2\sqrt{\eta}} \right) = \frac{1}{4R\sqrt{\eta}} (\eta - 2\sqrt{\eta} + 1)$$

$$\dot{S} = \frac{\xi^2}{4R(1-\xi)}$$

32

$$\xi = 1 - \sqrt{\frac{220}{290}} = 0,129$$

$$P = 0,129 \times 220 \times 4\pi (6400 \cdot 10^3)^2 = 1,46 \cdot 10^{16} \text{ Watt}$$

33

$$P = 0,129 \times 220 \times 4\pi (6400 \cdot 10^3)^2 = 0,05 \times 1 \times 4\pi (6400 \cdot 10^3)^2 \times h \times U^3 \frac{1}{h}$$

$$U = \sqrt[3]{\frac{0,129 \times 220}{0,05}} = 8,28 \text{ m/s}$$

C'est un bon ordre de grandeur. Une bonne mesure de l'intensité de la circulation de HADLEY est la vitesse des alizés. On trouve dans la littérature une vitesse moyenne de 14 knots soit 7,2 m/s.

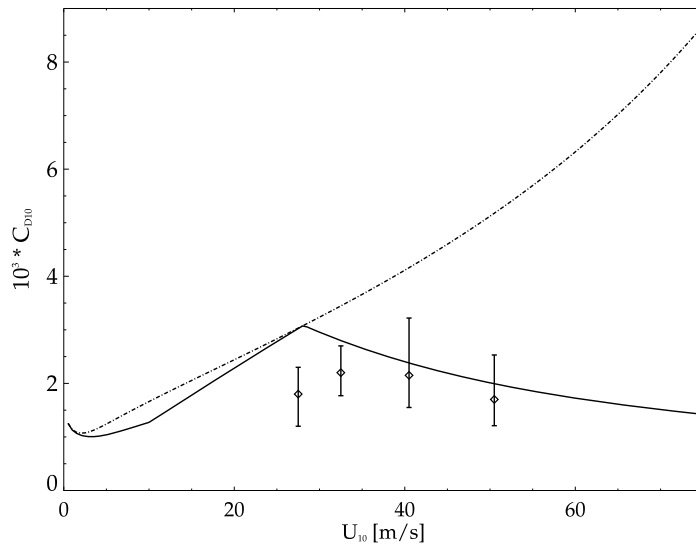
La formule de la dissipation est tirée de la formule faisant intervenir le coefficient de traînée  $C_D$  :

$$D = \rho C_D V^3 \quad \text{l'unité est le Watt par mètre carré}$$

On en déduit la formule du texte par :

$$\mathcal{D} = \rho C_D V^3 S = \rho C_D V^3 \frac{Sh}{h} = \frac{C_D M V^3}{h}$$

En particulier, la formule  $D = \rho C_D V^3$  est utilisée dans le calcul de l'ordre de grandeur du vent dans les cyclones par Kerry EMANUEL. Cependant, pour un écoulement turbulent sur un plan on trouve  $C_D = 0,0025$ . Effectivement, on voit sur la figure ci-dessous, qu'on a bien une telle valeur du coefficient dans le cas des cyclones. D'autre part le rendement de la cellule de HADLEY est connu pour être de l'ordre de 1 %.



**Figure 1.** The drag coefficient at 10-meter height as a function of 10-meter wind speed, for the common Charnock relation in (1) (dashed-dotted line) and the new drag parameterization in (2) (solid line). Observational data by *Powell et al.* [2003] are indicated by diamonds.

Pour le même ordre de grandeur du vent, si le rendement passe de 0,13 à 0,01, il faut que le coefficient de traînée passe de 0,05 à 0,005. Avec 0,0025, on trouve un vent  $\sqrt[3]{2}$  plus fort, soit 10,4 m/s, ce qui est encore un très bon ordre de grandeur. Il reste à expliquer le rendement beaucoup plus fort, et le coefficient de traînée beaucoup plus fort.

La conversion d'énergie thermique en énergie mécanique donc en énergie cinétique des vents a lieu dans les fortes ascendances convectives à l'origine des nuages et des fortes précipitations caractéristiques de la zone de convergence intertropicale (ZCIT), donc dans les gigantesques cumulonimbus qui y sont. Également dans les cyclones. Or, les cyclones sont de très bonnes machines thermique réalisant un cycle de CARNOT parfait. Ils ont donc un rendement de l'ordre de grandeur de celui calculé. On peut penser qu'il en est de même pour les cumulonimbus de la ZCIT. Mais seulement 10 % de l'énergie ainsi produite se retrouve dans la circulation moyenne de HADLEY. Le reste se perd par mélange turbulent dans l'atmosphère par une cascade énergétique de KOLMOGOROV vers des mouvements d'échelles de plus en plus petites jusqu'à l'agitation thermique. En particulier, pour les cyclones, cette perte d'énergie est liée à la perte du moment cinétique associé au cyclone. Si on garde le rendement de l'ordre de 13 %, le coefficient de traînée monté à 0,05 prend en compte cette dissipation turbulente à l'intérieur de l'atmosphère d'une manière phénoménologique.

III

34

$$\mu_l = \mu_v$$

35

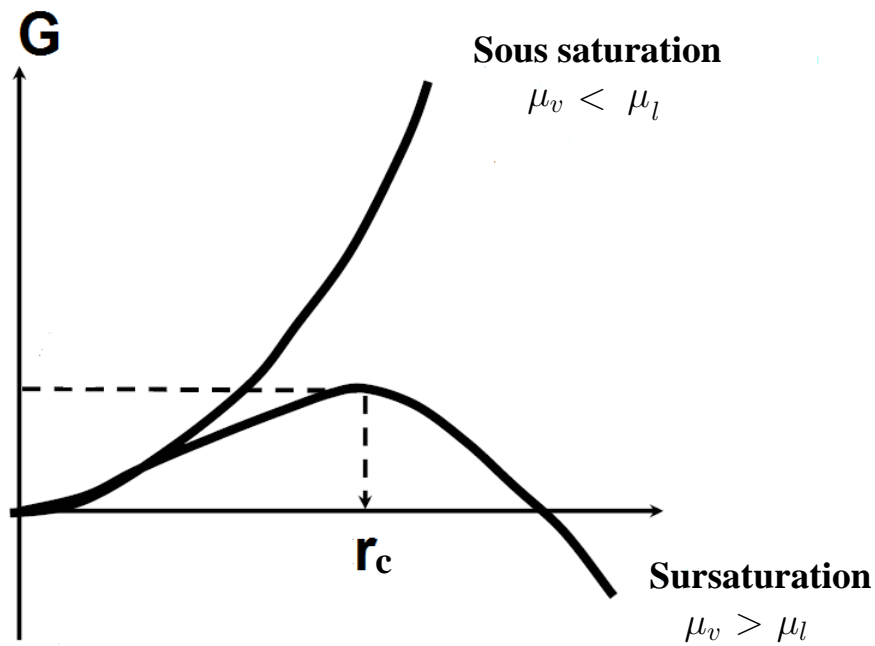
$$dG = \mu_v dn_v + \mu_l dn_l + \sigma dA = (\mu_l - \mu_v) dn_l + \sigma dA$$

36

$$dG = (\mu_l - \mu_v) \rho_0 \frac{4\pi r^2 dr}{M_{H_2O}} + \sigma d(4\pi r^2) = (\mu_l - \mu_v) \rho_0 \frac{4\pi r^2 dr}{M_{H_2O}} + 8\pi r dr \sigma$$

37

$$G = (\mu_l - \mu_v) \frac{\rho_0}{M_{H_2O}} \frac{4}{3}\pi r^3 + 4\pi r^2 \sigma$$



Le cas intéressant est le cas de sursaturation quand  $\mu_v > \mu_l$ . On observe un rayon critique au-delà duquel l'énergie libre du système décroît quand le rayon augmente. Les gouttes ont donc tendance spontanément à grossir jusqu'à être suffisamment lourde pour tomber en pluie. Calculons le rayon critique  $r_c$  :

$$8\pi r\sigma - (\mu_v - \mu_l) \rho_0 \frac{4\pi r^2}{M_{H_2O}} = 0 \quad 2\sigma - (\mu_v - \mu_l) \rho_0 \frac{r}{M_{H_2O}} = 0$$

$$r_c = \frac{2\sigma M_{H_2O}}{(\mu_v - \mu_l) \rho_0}$$

$r_c$  est le rayon de KELVIN à partir duquel la goutte d'eau grossit spontanément. Pour l'énergie d'activation  $G(r_c)$ , voir 40.

$$\mu_v - \mu_l = \mu_v(P_v) - \mu_v(P_{\text{sat}}) = RT \ln \frac{P_v}{P_{\text{sat}}}$$

$$r_c = \frac{2\sigma M_{H_2O}}{\rho_0 RT \ln \chi}$$

$$v = e^{-\frac{G(r_c)}{RT}}$$

$$\frac{G(r_c)}{RT} = -\ln \chi \frac{\rho_0}{M_{H_2O}} \frac{4}{3} \pi \frac{8\sigma^3 M_{H_2O}^3}{\rho_0^3 R^3 T^3 \ln^3 \chi} + 4\pi\sigma \frac{4\sigma^2 M_{H_2O}^2}{\rho_0^2 R^2 T^2 \ln^2 \chi} = \frac{16\pi}{3} \frac{M_{H_2O}^2 \sigma^3}{\rho_0^2 R^3 T^3 \ln^2 \chi}$$

La vitesse augmente quand  $\chi$  augmente.

$$\frac{r}{l} = \tan \theta \quad V = \frac{\pi r^2 l}{3} = \frac{\pi r^3}{3 \tan \theta} \quad dV = \frac{\pi r^2 dr}{\tan \theta} \quad S = \pi r^2 \quad dS = 2\pi r dr$$

$$dG = (\mu_l - \mu_v) \frac{\rho_0}{M_{H_2O}} \frac{\pi r^2 dr}{\tan \theta} + 2\pi r dr \sigma$$



$$(\mu_l - \mu_v) \frac{\rho_0}{M_{H_2O} \tan \theta} r + 2 \sigma = 0$$

$$r_c = \frac{2 \sigma M_{H_2O} \tan \theta}{\rho_0 (\mu_v - \mu_l)}$$

$$G = (\mu_l - \mu_v) \frac{\rho_0}{M_{H_2O}} \frac{\pi r^3}{3 \tan \theta} + \pi r^2 \sigma$$

$$\frac{G}{RT} = -\ln \chi \frac{\rho_0}{M_{H_2O}} \frac{\pi}{3 \tan \theta} \frac{8 \sigma^3 M_{H_2O}^3 \tan^3 \theta}{\rho_0^3 \ln^3 \chi R^3 T^3} + \pi \sigma \frac{4 \sigma^2 M_{H_2O}^2 \tan^2 \theta}{\rho_0^2 R^3 T^3 \ln^2 \chi}$$

$$\frac{G}{RT} = \frac{4}{3} \frac{\sigma^3 \pi M_{H_2O}^2}{R^3 T^3 \rho_0^2 \ln^2 \chi} \tan^2 \theta$$

L'énergie d'activation est très faible si l'angle  $\theta$  est faible, facilitant grandement la liquéfaction de la vapeur d'eau sur de telles poussières, d'autant plus d'ailleurs, si elles sont salées ou hydrophiles.